〔日〕力武常次 佐藤良辅 荻原幸男 编著
周胜奎 校
杨懋源 译

地球科学中的数学物理方法

下册 应用篇

地震出版社

地球科学中的数学物理方法

下册·应用篇

力武常次
[日]佐藤良辅　编著
萩原幸男
杨懋源　译
周胜奎　校

地震出版社

1988

内 容 简 介

本书分上下册，是日本《地球物理学》丛书中的两个分册，系统地论述了数学物理方法中的基础理论及其在地球科学中的应用。上册是基础篇，介绍了数学物理中常用的基础理论；下册是应用篇，围绕地震波、重力、地球自转和潮汐、地热、地磁以及地球的电磁感应等问题，进行了具体的数学推导和物理论述。

本书在内容上把数学问题和地球科学问题融为一体，对地球科学各领域的科研人员和大学师生十分有用，同时也可供数理学科有关专业人员参考。

地球物理シリーズ03
物理・数学〈II〉(応用編)
地球科学を主体として
力武常次・佐藤良輔・萩原幸男
学会出版センター198?

地球科学中的数学物理方法

（下册・应用篇）

[日] 力武常次等 编著
杨懋源 译 周雅荃 校
责任编辑：裴 中

地震出版社出版
北京复兴路63号
北京昌平展望印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 9.375印张 252千字
1988年7月第一版 1988年7月第一次印刷
印数 0001—2500册

ISBN 7-5028-0009-3/P·9
(418) 定价：4.5元

序

对于我的研究生涯来说，数学物理方法是头等重要的事情了。当然，设计仪器、进行实验和野外观测也是非常重要的，但是为了分析实验和观测结果，并把它们提高成理论，无论如何必须借助于数学物理方法。

在我的手边有一张普通的旧明信片，日期是1934年5月4日，明信片是2钱的，同时还贴了1钱的邮票。寄信人是佐藤泰夫(现任鹿儿岛大学教授，东京大学名誉教授，当时是东大理学部地球物理教研室的助教)，收信人是我，我当时作为技师在横须贺海军工厂航海实验部工作。为了使大家对于佐藤先生也有所了解，我把全文抄录如下：

“昨天虽然已给您去信，但由于弄清了 Hobson 的错误，再来打扰您一次。

Hobson 在他的书中第289页中间有

$$(\mu^2-1)\frac{d}{d\mu}U(n,m)=(n-m+1)U(n+1,m)-$$
$$-(n+m+1)\mu U(n,m),$$

这是正确的。

然后将

$$P_n^m(\mu)=c_m(\mu^2-1)^{m/2}U(n,m)$$

即
$$U(nm)=c_m^{-1}(\mu^2-1)^{-m/2}P_n^m(\mu)$$

代入等式的左边，得

$$(\mu^2-1)\frac{d}{d\mu}\{c_m^{-1}(\mu^2-1)^{-m/2}P_n^m\}.$$

但是在进行微分时，Hoboson 忘掉了第一项：

$$(\mu^2-1)C_m^{-1}\left\{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{d}{d\mu}((\mu^2-1)^{m/2})\cdot}P_n^m+(\mu^2-1)^{-m/2}\frac{d}{d\mu}P_n^m\right\}.$$

这样在(162)式右边：$-(n+\underset{\sim}{m}+1)\mu P_n^m$，与 m 有关的项就被漏掉了，因此 Jannke 是正确的。

我想您也已经弄清楚了，但是，为了慎重起见，特致此信。

Hobson 尚未指出这一点。”

当时，我为了解析船体的磁性，需要球函数的知识，把剑桥大学出版物，E. W. Hobson 所著的“Spherical and Ellipsoidal Harmonics”(1931,500pp.)翻来复去地读，但是由于渐近公式与著名的 E. Jahnke 和 F. Emde 所著的“Funktionentateln mit Formeln und kurven”(1933, 330 pp.)的公式不一致，因而十分不快，于是我就向擅长数学的佐藤先生请教。

在关于球函数最权威的书中，发现把对积的微分 $d(xy)=ydx+xdy$ 忘了一项的基本错误，这对于年轻的我来说，是一件非常惊奇的事。因此，即使乍一看是很出色的书，刚开始时也不应该全然相信，这便是我得到的教训。

第二次世界大战后，我回到地震研究所，开始应用数学物理方法对磁位势、地球电磁感应、地磁发电机理论、电磁流体振动、地球内部热传导、地球的弹性变形等各种问题进行研究。每当我找到了有效的复变积分的方法，或者导出了现在书中尚未给出的普遍公式时，或者找到了一开始感到非常棘手的微分方程的解的时候，都使我对研究工作感到小小的欣慰。近来，由于电子计算机的普及，深夜静稍稍地思考围道积分的那种乐趣(艰苦?!)几乎已经消失，但是比起从头开始就进行数值积分，不如在可能的情况下，使用球函数和 Bessel 函数这样的特殊函数更好一些。

仔细一想，与纯粹的物理学相比，在地球物理学中适合于应用数学物理方法的问题或许更多一些。因为是在地球中，当然球的振动、热传导、位势理论等典型的问题比比皆是。然而在局部问题中，地球就成了半无限介质的近似对象，给出了求直角坐标

和柱坐标形式的 Laplace 方程式及波动方程式的解的很好例子，也就是说，存在着很多典型的边值问题。

与数学严格性相比，更重要的是我们希望能够求得问题的解，并将此解与实测结果进行比较，进行讨论，这些对地球物理学来说是主要的。

考虑到这些方面，本书把精力花在边值问题求解的同时，也涉及到了有关算子法及松弛法等，在不同的情况下，这些方法并不能认为是“笨拙”的方法。大多数例题在同类的书中恐怕是难以找到的。这样，对于以地球科学的各种问题为主体的数学物理方法进行归纳的书，我相信对立志于地球物理学的学生、研究生、年轻的研究者等读者是有益的。另外，如果对于地球科学以外的学者来说，也有人进行这些方面的研究，那就更荣幸了。

本书在计划和写作过程中，由于弹性理论专家佐藤良辅先生和重力、测地学专家并活跃在地球物理学各领域内的萩原幸男先生的参加，我想几乎是无遗漏地涉及到固体地球物理学的各领域。为了论述的方便，本书分为二册，即作为基础编及上册作为应用编的下册，大体的分工如下：

上册(基础编)

第一章	Fourier 变换	佐藤
第二章	Laplace 变换	佐藤
第三章	Heaviside 算子法	力武
第四章	频谱分析	佐藤
第五章	特殊函数	萩原
第六章	Laplace 方程	萩原
第七章	波动方程	佐藤
第八章	松弛法	力武

下册(应用编)

第一章	弹性体的位移分量	佐藤
第二章	弹性波的传播	佐藤

第三章　弹性波的发生　佐藤

第四章　弹性体的静变形　佐藤

第五章　重力势理论　荻原

第六章　地球自转和潮汐　荻原

第七章　热传导　荻原

第八章　磁势和电势　力武，荻原

第九章　电磁感应　力武

第十章　电磁场与运动的相互作用——电磁流体力学　力武

最后要说明的是，本书在计划、执笔和出版过程中得到了学报发行中心的押田惠司先生的帮助，在此表示感谢。

力武常次

于东工大的研究室　1980 年 1 月

目　　录

第一章　弹性体的位移

1.1　位 移 势

各向同性的完全弹性体中，位移的运动方程由下式给出：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_x,\ u_y,\ u_z)$$

$$=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta+\mu\nabla^2(u_x,\ u_y,\ u_z),\quad(1.1)$$

推导此方程已超出本书范围，请参考弹性理论书籍。上式中，u_x、u_y、u_z是位移的x、y、z分量，ρ为密度，λ、μ是Lamé弹性系数。另外，

$$\Delta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad(1.2)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.\quad(1.3)$$

微分算子(1.3)式称为 Laplace 算子。

现在令位移矢量为$\boldsymbol{u}$，若使用矢量分析中所用的微分算子定义式：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{grad}\ \phi=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi,\\&\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z},\end{aligned}\right\}\quad(1.4)$$

由于(1.2)式的Δ可以写为$\mathrm{div}\boldsymbol{u}$，所以(1.1)式可写为

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}.\quad(1.5)$$

进一步，将微分算子的恒等式

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = \text{grad div}\boldsymbol{u} - \text{curl curl}\boldsymbol{u}, \tag{1.6}$$

$$\text{curl}\,\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z},\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x},\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{1.7}$$

代入到 (1.5)式中，最后得到

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\text{grad div}\boldsymbol{u} - \mu\text{curl curl}\boldsymbol{u}. \tag{1.8}$$

上式不仅对于直角坐标系成立，只要使用各种正交坐标系中的微分算子表达式，则对于任一种正交坐标系均成立。

现在我们设

$$\boldsymbol{u} = \text{grad}\phi + \text{curl}\boldsymbol{\psi} \equiv \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \tag{1.9}$$

ϕ, $\boldsymbol{\psi}$ 称为位移势，将 $\boldsymbol{u}_1$代入(1.8)式中，且因

$$\text{div grad}\phi = \nabla^2\phi,\ \text{curl grad}\phi = 0,$$

所以

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi. \tag{1.10}$$

再把 $\boldsymbol{u}_2$ 代入(1.8)式中，且由于

$$\text{div curl}\,\boldsymbol{\psi} = 0,$$

$$\text{curl curl curl}\,\boldsymbol{\psi} = -\nabla^2\text{curl}\,\boldsymbol{\psi},$$

所以 (1.8)式变为

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\boldsymbol{\psi}. \tag{1.11}$$

(1.10)式和(1.11)式即为本书上册第七章所述波动方程的形式。这样一来，虽然位移 $\boldsymbol{u}$ 本身并不是波动方程的解，但因引入了(1.9)式中的位移势，而 ϕ, $\boldsymbol{\psi}$ 又是熟知的波动方程的解，于是位移的求解就很简便了。

从(1.10)式的解 ϕ 所得到位移 $\boldsymbol{u}_1$给出了以速度

$$v_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \tag{1.12}$$

传播的 P 波(纵波)；从(1.11) 式的解 $\boldsymbol{\psi}$ 所得到位移 $\boldsymbol{u}_2$ 给出了以速度

$$v_S = \sqrt{\mu/\rho} \tag{1.13}$$

传播的 S 波(横波)。

因此，在完全弹性体中存在着 P、S 两种波，将它们称为体波。

由(1.12)和(1.13)式可知，$v_P > v_S$。地震时，在震源处发生了 P 波和 S 波(这种情况下这些弹性波都是地震波)，P 波将首先到达观测点。P 波的"P"取自英文 Primary wave 一词；S 波的"S"取自英文 Secondary wave 一词。

若用 Young 模量 E 和 Poisson 比 σ 表示 P、S 波速度，则(参见附录 2)

$$\left.\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \\ v_S &= \sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{1}{2(1+\sigma)}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

另外，还存在关系

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v_P}{v_S}\right)^2 - 1\right] \Big/ \left[\left(\frac{v_P}{v_S}\right)^2 - 1\right], \\ \frac{v_P}{v_S} &= [2(1-\sigma)/(1-2\sigma)]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

1.2 二维问题中的位移

研究弹性体问题时，如果现象沿 y 方向不发生变化，那就不必考虑位移对 y 微分的诸项，于是(1.1) 式变为

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u_x, \\ \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \mu\nabla^2 u_y, \\ \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} + \mu\nabla^2 u_z, \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta&=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z},\\ \nabla^2&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}\right\}\tag{1.17}$$

由上式可知，对于位移的 y 分量 u_y 的表达式，由于它不包含其它位移分量，所以相对于其它位移分量而言，能够单独处理。

如果紧接着使用以

$$\left.\begin{aligned}u_x&=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\\ u_z&=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{1.18}$$

定义的位移势 ϕ、ψ[这相当于(1.9)式中取 $\boldsymbol{\psi}=(0,\ -\psi,\ 0)$]，那么 ϕ、ψ 便是方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{v_P^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}&=\nabla^2\phi,\\ \frac{1}{v_S^2}\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2}&=\nabla^2\psi\end{aligned}\right\}\tag{1.19}$$

的解。

如上节所述，由 ϕ 导出的位移表示P波，由 ψ 导出的位移表示S波。z 为常数的面即密度、弹性常数等物理量不连续的面(地表面是其中之一，z 轴取为铅直方向)，这种情况下尽管由 ψ 产生的S波位移有水平、铅直分量，但 u_y 仍仅仅是平行于水平面振动的分量，称为SH波(取自英文 horizontal)。对于 ψ 导出的 x，z 方向位移分量之和称为SV波(取自英文 vertical)。

当波动方程的解随时间呈正弦形式变化时，例如取 $\phi e^{i\omega t}$(ω 为角频率)代换上面的 ϕ(这相当于对时间做 Fourier 变换)，则有

$$\nabla^2\phi+h^2\phi=0,\tag{1.20}$$

$$h^2=\rho\omega^2/(\lambda+2\mu)=\omega^2/v_P^2.\tag{1.21}$$

这便是本书上册 7.2 节所述及的 Helmholtz方程，式中