高考必读

GĀO ZHŌNG KǍO SHÌ JIĚ TÍ JĪNG DIǍN

数学

高中考试解题精典

海南出版社

高中数学考试解题精典

（第二版）

主　编　唐国庆
副主编　胡振大
编著者　孟庆祥　李心涤　杨万维
　　　　曾海平　蒋吉靖　刘伟燕
　　　　刘少山　常业恒　金世雄

海南出版社

高中考试解题精典·语文	11.00元
高中考试解题精典·数学	15.00元
高中考试解题精典·化学	15.00元
高中考试解题精典·物理	11.00元
高中考试解题精典·英语	11.00元
高中考试解题精典·历史	10.00元
高中文言文阅读解题精典	9.50元

邮购地址：湖南省长沙市五一西路南阳街新80号 邮编：410005

海南少儿读物出版发行公司长沙经营部　电话：4452053

高中数学考试解题精典

（第二版）

编　　者：唐国庆　胡振大等

责任编辑：贺晓兴

*

海南出版社出版　新华书店经销

（海口市滨海大道华信路2号）　长沙环境保护学校印刷厂印刷

开本：787毫米×1092毫米　1/32　印张：16.875　字数：512000

1995年1月第1版　1997年7月第2版　1997年7月第7次印刷

印数：98001—118000册

ISBN7－80617－426－5/G·152

定价：15.00元

若有印装质量问题，请直接与印刷厂联系调换

厂址：长沙市井湾路4号　　邮编：410004

前　言

著名数学教育家G·波利亚说过："掌握数学就意味着解题."解题的过程是学生消化、巩固和运用所学数学基础知识的过程. 教师教会学生解答所有数学问题是不可能的，但从某种意义上讲，赋予学生具有解答所有数学问题的能力却是可能的. 为了提高学生的解题能力和解题技巧，我们编写了这本查阅起来比较方便的工具书《高中数学考试解题精典》第二版.

本书选编的题目覆盖了高中数学课程的全部知识点，涉及到高中学习阶段学生应掌握的数学思想方法和基本技能技巧. 既注重知识体系，又注重知识间的内在联系；既考虑其典型性，又考虑其新颖性. 同时，还适当地选取了一些综合性强、难度稍大的题目，这些题目难而不偏，有利于学生解题能力的提高. 部分题目作了简要的分析和说明，意在点拨解题思路，总结解题规律. 编者窃以为本书定会受到读者的青睐和欢迎.

本书在编写过程中，参阅了不少有关书刊资料，在此谨向其作者表示诚挚的谢忱.

由于时间仓促，水平有限，疏漏与错误之处在所难免，望读者不吝赐教.

编　者

1997 年元月

感谢启示

《高中数学考试解题精典》第一版出版后，受到广大中学师生的欢迎。迄今为止，收到对该书表示赞扬和提出各种建议的读者来信数千封，它们寄自 20 多个省市的城乡中学。

为适应高考新要求，我们对该书进行了全面修订。读者来信中的建议和指出的印制差错对我们重新修订该书也提供了很好的帮助。借该书第二版出版之机，我们在此对广大热心读者表示我们的谢意。限于篇幅我们不能一一登出这些热心读者的名字，仅只能将部分读者的姓名恭录如下，以表示我们的感谢之情：

山东省济南市商河县商河一中高三九班	张　晔	陕西省绥德县绥德二中	马鹏翔
湖北省荆沙市江陵区滩桥中学高三二班	曾　辉	湖北省襄樊六〇三厂子校浩然高中	张继光
湖北省枣阳市吴店镇余畈村三组	董寒林	安徽省阜阳市第一中学高一(二)班	丁警卫
湖北省潜江市潜江中学高二(八)班	刘　超	广东省罗定中学高二(六)班	郭棒荣
湖南省双峰县第一中学高一 191 班	胡　豪	江西省丰城市拖船中学补习班	邬海明
湖北省荆沙市弥市红星艺术摄影楼	姚樱桃	湖南省宁远一中高 136 班	成敏轩
湖南省安仁县第一中学高 165 班	吕　翔	湖北省广水市第三中学高三理科班	黄　伟
江西县吉安市吉水县一中	徐　琛	福建省大田五中	连广芽
安徽望江县新桥东村 112 号	韩　春	甘肃省西峰市二中高三二班	田立学
广西玉林博白县中学 952 班	张明辉	山东省微山县一中高二(十一)班	田家才
湖南省衡阳县一中 221 班	洪庆汇	湖北省罗田县第一中学高二(二)班	周汉唐
湖南省湘阴县湘阴三中九十一班	殷　彪	黑龙江省富锦市第一中学一年六班	陈大伟
江西省临川市第十中学	付刚剑	湖北省公安县二中学高一(八)班	刘宏锦
广东县曲江县第一中学高二(四)班	饶润成	湖北省浠水县第一中学高二(七)班	王圣君
浙江省永康市荷园中学	周喜悦		梅森白
广西省桂林市灵川县种子公司	白华军	湖南省浏阳市十三中高一 60 班	李霞珍
江西省南昌市安义中学高一(二)班	刘　娟	福建省武夷山市鸭母洲路 1 号	吴小锋
江西省上饶县皂头镇中学高中部	叶水笔	浙江省龙游县龙游中学高二(一)班	方宏明
黑龙江省海伦市第一中学理科一班	吕淑华	四川省渠县中学高九七级九班	罗小军

江西省乐平市乐平中学高三(十)班	欧阳冬明	江西省高安市高安二中高二(六)班	吴叶龙
湖南湘潭县一中 161 班	刘 柱	云南省大理州鹤庆三中 37 班	段建斌
黑龙江讷河市第一中学 994 班	王洪儒	广东湛江遂溪县杨柑中学高一(4)班	叶康连
山东省荣城市滕家镇荣成五中 285 班	董文学	广东省高要市第一中学高二(二)班	钟剑雄
河南省舞阳一高二(五)班	王景晓	湖南省涟源十中 102 班	梁李祥
广西融安高中理科(一)班	袁志勇	山东省济宁市实验中学高一二班	包国涛
山东省微山县第一中学高一十班	常 凯	山东省安邱市第二中学 95 级 5 班	刘瑞华
江西进贤县李渡中学	闵 平	广东省增城市高二(二)班	何泽沛
北京市东燕郊 206 信箱 27#	李艳坡	江西省余江一中高一(五)班	饶小荣
浙江苍南县灵溪镇二中高三(二)	李学贵	湖南省湘西自治州保靖民中高一(1)班	胡鹏飞
安徽元安市毛毯厂中学高三(四)班	张忠军	广西桂林全州县全州高中高 95 级 3 班	王 勇
新疆石河子一五〇团一中高三(一)班	戚建辉	江西省永新县杨桥中学高二(一)班	颜启雯
山东省微山县微山一中二(三)班	宋 琪	湖北蕲州县第四中学二(八)班	李建伟
湖北省天门市竟陵高中一(五)班	钟 文	湖北省罗田县三星畈高级中学二(四)班	吴晓鹏
湖南省衡阳县第六中学高一 249 班	朱海波	山东省汶上县徐藏高级中学高一四班	曹化冰
山东省昌邑市第二中学高一(三)班	侯旭波	湖南省益阳市第十一中学 143 班	熊金波
江苏省宜兴市张渚镇张渚高二(一)班	陈学妹	湖北省罗田县第一中学高一(六)班	黄德智
山东省东营市东营区一中 95 级三班	张小明	湖南省浏阳市第三中学 157 班	刘章平
江西省奉新县二中高二(三)班	周 伟	湖南省双峰县花门镇新民村体仁组	赵向盛
江西省高安市高安二中高二(六)班	章宋星	湖南省衡南县第一中学高三 210 班	罗元辉

为了使这本新书更适合中学广大师生使用,希望广大数学教师和中学生继续对《高中数学考试解题精典》(第二版)提出建设性建议和批评。地址仍寄:海口市滨海大道华信路 2 号 海南出版社少儿编辑室贺晓兴收。邮编:570105。

目　录

代　数

平面三角

立体几何

平面解析几何

代 数

第一章 函 数

一、集合与映射

(一)选择题:

【1】 集合 $A=\{x|x=2k,k\in Z\}$,$B=\{x|x=2k+1,k\in Z\}$,$C=\{x|x=4k+1,k\in Z\}$,又 $a\in A$,$b\in B$,则一定有(　　)

(A) $a+b\in A$;　　(B) $a+b\in B$;

(C) $a+b\in C$;　　(D) $a+b\notin A,B,C$ 中任何一个.

解 令 $a=2k_1$,$b=2k_2+1$,则 $a+b=2(k_1+k_2)+1$,所以 $a+b\in B$,应选(B).

【2】 若 $A=\{1,3,x\}$,$B=\{x^2,1\}$,且 $A\cup B=\{1,3,x\}$,则这样的 x 的不同的值有(　　)

(A) 1 个;　(B) 2 个;　(C) 3 个;　(D) 4 个.

解 满足题设条件为 $\begin{cases}x^2=3\\x\neq 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2=x\\x\neq 1,x\neq 3\end{cases}$,解得 $x=\pm\sqrt{3}$ 或 $x=1$,故选(C).

【3】 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合,最多含有(　　)

(A) 2 个元素;　(B) 3 个元素;　(C) 4 个元素;　(D) 5 个元素.

解 因为 $\sqrt{x^2}=|x|=\pm x$,$-\sqrt[3]{x^3}=-x$,当且仅当 $x\neq 0$ 时,$x\neq -x$,根据集合的互异性可知集合中最多含有 2 个元素,所以(A) 正确.

【4】 满足关系式 $\{a\}\subset A\subseteq\{a,b,c\}$ 的集合 A 的个数是(　　)

(A) 2 个;　(B) 3 个;　(C) 4 个;　(D) 6 个.

解 满足关系式的集合有 $\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{a,b,c\}$,故选(B).

【5】 已知全集 I,集合 A、B 满足 $A\cap B=B$,$A\cup B=A$,则必定有(　　)

(A) $B\subset A$； (B) $B\supset A$； (C) $A=B$； (D) $\bar{A}\cap B=\varnothing$.

解 因为 $A\cap B=B, A\cup B=A$，所以集合 A、B 的关系式有 $B\subset A$ 或 $B=A$ 两种可能，应选(D)．

【6】 若方程 $x^2-px+6=0$ 的解集是 M，方程 $x^2+6x-q=0$ 的解集是 N，且 $M\cap N=\{2\}$，那么 $p+q$ 等于(　　)

(A) 21； (B) 8； (C) 6； (D) 7.

解 $\because M\cap N=\{2\}$，故 $x=2$ 既满足方程 $x^2-px+6=0$ 又满足方程 $x^2+6x-q=0$，将 $x=2$ 分别代入两个方程可解得 $p=5, q=16$，$\therefore p+q=5+16=21$，(A) 正确.

【7】 若 $x, y\in R$，数集 $P=\{s|s=x^2+3x+1\}$，$Q=\{y|y=y^2-3y+1\}$，则 P，Q 具有的关系式是(　　)

(A) $P\cap Q=\varnothing$；(B) $P\subset Q$； (C) $P\supset Q$； (D) $P=Q$.

解 $\because P=\{s|s=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}\}=[-\frac{5}{4},+\infty)$，$Q=\{y|y=(y-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}\}=[-\frac{5}{4},+\infty)$，$\therefore P=Q$，故选(D)．

【8】 若 $A=\{x|x\in N\}$，$B=\{y|y\in N\}$，下列对应中构成从 A 到 B 的映射是(　　)

(A) $f: x\rightarrow y=x-1$； (B) $f: x\rightarrow y=\sqrt{x}$；

(C) $f: x\rightarrow y=x^2-2x$； (D) $f: x\rightarrow y=x+1$.

解 $f: x\rightarrow y=x-1$ 使集合 A 中元素 1 在集合 B 中没有元素和它对应；$f: x\rightarrow y=\sqrt{x}$ 使集合 A 中元素 2，3，5…等在集合 B 中没有元素和它对应；$f: x\rightarrow y=x^2-2x$ 使集合 A 中元素 1 在集合 B 中没有元素和它对应，故只有(D) 正确.

(二)填空题：

【9】 集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$中只有一个元素，则 a 的值是______.

解 1；0. $A=\{x|ax^2+2x+1=0\}$中只有一个元素 $\Rightarrow$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的实数根或只有一个实数根 $\Rightarrow \Delta=4-4a=0$ 或 $a=0$ $\Rightarrow a=1$ 或 $a=0$.

【10】 已知 a、b 是非零实数，那么 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$ 可能取的值组成的集合

是____.

解 $\underline{\{2,0,-2\}}$. 当 a、b 同为正数，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=2$；当 a、b 同为负数时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=-2$；当 a、b 异号时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=0$.

【11】 集合 $A=\{x|x^2-2x-1=0,x\in R\}$的所有子集的个数为________.

解 $\underline{4}$. 因为方程 $x^2-2x-1=0$ 的判别式 $\Delta=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot1=8>0$,集合 A 中有两个元素，故集合 A 有 $2^2=4$ 个子集.

【12】 设全集 $I=R$,集合 $M=\{x|x^2-x\neq0\}$,集合 $N=\{x|x^2-2x+1=0\}$,则$\overline{M\cup N}=$______.

解 $\underline{\{0\}}$. 因为 $x^2-x\neq0\Rightarrow x\neq0,1\Rightarrow M=\{x|x\in R$,但 $x\neq0,1\}$. $x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow N=\{1\}$. 所以 $M\cup N=\{x|x\in R,x\neq0\}$,故
$\overline{M\cup N}=\{0\}$.

【13】 $x,y\in R$, $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$, $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,a>0,b>0\right\}$,若 $A\cap B$ 只有一个元素时，则 a、b 之间的关系是____.

解 $\underline{a^2+b^2=a^2b^2}$. 因为 $A\cap B$ 只有一个元素，故圆 $x^2+y^2=1$ 与直线$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ 在第一象限内相切，联立方程化简得 x 或 y 的一元二次方程，利用判别式 $\Delta=0$ 可得 $a^2+b^2=a^2b^2$.

【14】 用描述法可将 $A=\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{9},\frac{4}{27},\frac{5}{81},\frac{6}{243}\right\}$表示为____. 可将 $B=\{(x,y)|(x-2)^2+|5-y|=0,x,y\in R\}$用列举法表示为____.

解 $\underline{A=\{x|x=\frac{n+1}{3^n},1\leqslant n\leqslant5,\text{且 }n\in N\}}$; $\underline{B=\{(2,5)\}}$.

(三)解答题

【15】 已知集合 $N=\{x|a+1\leqslant x<2a-1\}$是集合 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$的子集，求 a 的取值范围.

解 $N\subseteq M$ 有下列两种情况

(1) $N=\varnothing\Rightarrow a+1\geqslant 2a-1\Rightarrow a\leqslant2$;

(2) $N\neq\varnothing\Rightarrow\begin{cases}a+1\geqslant-2\\2a-1\leqslant5\\2a-1>a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant-3\\a\leqslant3\\a>2\end{cases}\Rightarrow2<a\leqslant3.$

综合(1),(2)可得 a 的取值范围是 $a\leqslant3$.

说明 $N\subseteq M$ 不能丢掉 $N=\varnothing$ 这样一种情况.

【16】 设 $M=\{a|a=x^2-y^2,x,y\in Z\}$,求证:① 一切奇数属于 M;② 偶数 $4k-2(k\in Z)$不属于 M;③ 属于 M 的两个整数,其积仍属于 M.

证明 ① 设 a 为任意奇数,令 $a=2k-1\quad(k\in Z)$,

$\because\quad 2k-1=k^2-(k-1)^2,k,k-1\in Z$,

$\therefore\quad a\in M$. 由 a 的任意性可知,一切奇数属于 M.

② 假设 $4k-2\in M$,则存在 $x,y\in Z$,使 $4k-2=x^2-y^2$.

即:$(x+y)(x-y)=2(2k-1)$

上式说明 $x+y,x-y$ 中必有一个是奇数,另一个是偶数,这与 $x+y$,$x-y$ 具有相同的奇偶性矛盾.故假设不成立. $\therefore 4k-2\notin M$.

③ 设 $a,b\in M$

令:$a=x_1^2-y_1^2,b=x_2^2-y_2^2(x_1,x_2,y_1,y_2\in Z)$

$\because ab=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2$,

而 $x_1x_2-y_1y_2\in Z,\qquad x_1y_2-x_2y_1\in Z,\qquad\therefore ab\in M$.

说明 要判断一个元素是否属于某一个集合,关键要看该元素是否满足此集合的属性.

【17】 设 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\},B=\{y|y=2x+3,x\in A\},C=\{Z|Z=x^2,x\in A\}$,且 $C\subseteq B$,求实数 a 的取值集合.

解 $\because C=\{Z|Z=x^2,x\in A\},A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$,

$\therefore$ 集合 C 应为$[0,a^2]$或$[0,4]$,又$\because C\subseteq B$,

$$\therefore\quad\begin{cases}a^2\leqslant2a+3\\4\leqslant2a+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant a\leqslant3\\a\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant3,$$

故实数 a 的取值集合为$[\frac{1}{2},3]$.

【18】 设集合 $M=\{u|u=12m+8n+4l$,其中 $m,n,l\in Z\}$,集合 $N=\{u|u=20p+16q+12r$,其中 $p,q,r\in Z\}$. 求证:$M=N$.

分析：要证 $M=N$，只需证① $M\subseteq N$，② $M\supseteq N$.

证明 ① 任取 $u\in M$，则存在 $m,n,l\in Z$，使得 $u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)$，$\because m-n-l\in Z$，$\therefore u\in N$，即 $M\subseteq N$.

② 任取 $u\in N$，则存在 $p,q,r\in Z$，使得 $u=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5q)$，而 $2q\in Z$，$5p\in Z$，$\therefore N\subseteq M$，因此 $M=N$.

【19】 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, x\in R\}$ 且 $A\cap R^+=\varnothing$

求实数 p 的取值范围.

解 $A\cap R^+=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}① \ A=\varnothing \\ \text{或} \\ ② \ x^2+(p+2)x+1=0 \text{ 只有非正数根.}\end{cases}$

① 若 $A=\varnothing$，则 $\Delta=(p+2)^2-4<0$，解得 $-4<p<0$.

② 若方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 只有非正根，

则 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0 \\ -(p+2)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p\geqslant 0 \text{ 或 } p\leqslant -4 \\ p\geqslant -2\end{cases}\Rightarrow p\geqslant 0$，

$\therefore$满足条件的 p 值集合 $(-4,0)\cup[0,+\infty)=(-4,+\infty)$.

【20】 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，问：

① 当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

② 当 a 取何值时，$(A\cap B)\cap C$ 为含有三个元素的集合？

解 $\because (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组 $\begin{cases}ax+y=1 \\ x^2+y^2=1\end{cases}\cdots$①和 $\begin{cases}x+ay=1 \\ x^2+y^2=1\end{cases}\cdots$②的解集.

解方程组①得：$(0,1)$，$\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$，

解方程组②得：$(1,0)$，$\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\dfrac{2a}{1+a^2}\right)$.

① 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能

$\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0, \\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a=0$； $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1, \\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

故当 $a=0$ 或 1 时，$(A\cup B)\cap C$ 中恰有两个元素

② 使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素的情况是：

$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$，解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时，$(A\cup B)\cap C$ 中恰有三个元素.

说明 交集、并集不仅有交换律，结合律而且还有分配律即：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

【21】 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a、m 的值.

解 $\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，

又 $\because A=\{1,2\}$，它的子集有：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

而方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的根为 1 和 $a-1$，

$\therefore$ B 的可能性只有 $a-1=1$ 或 $a-1=2$，

即 $a=2$ 或 $a=3$，$\because A\cap C=C$，$\therefore C\subseteq A$，

易知当 $m=3$ 时，$C=A$，当 $C=\varnothing$，$\Delta=m^2-8<0$，

$\therefore$ $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

【22】 已知 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，$A=B$ 求：x，y.

解 $\because$ 要使 $\lg(xy)$ 有意义，必须 $xy>0$.

$\therefore x\neq 0$，$y\neq 0$，即 A 中元素 x，xy 都不可能与 B 中的元素 0 对应.

$\therefore$ $\lg xy=0$，$\therefore xy=1$，$A=\{x,1,0\}$，

$\because$ $A=B$，即 $\{x,1,0\}=\{0,|x|,y\}$，

$\because y\neq 1$，$\therefore x\neq 1$，而 $|x|=1$ 只能得到 $x=-1$，

因此当 $x=-1$，$y=-1$ 时，$A=B=\{-1,1,0\}$.

说明 本题中若 $y=1$，则 $x=1$，这样 A 中有两个元素都为 1，这与集合中元素的互异性矛盾，因此判断两集合中元素的对应关系是解决这类问题的关键.

【23】 设 a、b 是两个实数，$A=\{(x,y)\mid x=n, y=na+b, n$ 是整数$\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m, y=3m^2+15, m$ 是整数$\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内的点的集合，讨论是否存在 a 和 b 使得：

① $A\cap B\neq\varnothing$
② $(a,b)\in C$
同时成立.

解 如果实数 a 和 b 使得①成立，则存在整数 m,n 使得 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$，即

$$\begin{cases}m=n\\3m^2+15=na+b\end{cases}\Rightarrow 3n^2+15=na+b\Rightarrow na+b-(3n^2+15)=0.$$

说明点 (a,b) 在直线 $l:nx+y-(3n^2+15)=0$ 上.

设原点到直线 l 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=6\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}}\right)\geqslant 2$，而且仅当 $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2}=1$ 时，即 $n^2=3$ 时上式等号成立.

而 n 是整数，$\therefore n^2\neq 3$，$\therefore$ 上式等号不可能成立，即 $d>12$，

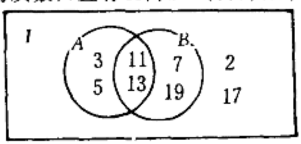
因为 $P(a,b)$ 在直线 l 上，所以 P 到原点距离 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$，

另一方面②成立，要求 $a^2+b^2\leqslant 144$，即 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant 12$，

故①成立的 a、b 不能使②成立，

$\therefore$ 不存在实数 a,b 使得①②同时成立.

【24】 设 $I=\{x|x$ 为不大于 20 的质数$\}$，且有 $A\cap\overline{B}=\{5,3\}$，$\overline{A}\cap B=\{7,19\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,17\}$，求 A,B.



解 由题意可知 $I=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$，

$\because \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{2,17\}$，

借助韦恩图（见右图）易求出 $A\cap B=\{11,13\}$.

故 $A=\{3,5,11,13\}$，$B=\{7,11,13,19\}$.

说明 ①韦恩图是解决集合问题的有力武器；

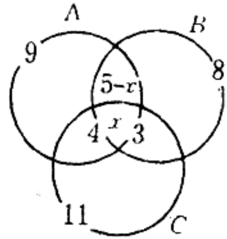
②在集合式的化简中，有一个比较重要的公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，记为"并之补，补之交；交之补，补之并".

【25】 有 A,B,C 三部影片，某班至少看过其中一部的 18 人，看过 A,B,C 的分别为 9，8，11 人，同时看过 A,B 的 5 人，看过 B,C 的 3 人，看过 C,A 的 4 人，问：A,B,C 全看过的有多少人？

解 设 A、B、C 全看过的有 x 人

画韦恩图（见 $P8$）并把已知条件标在图上，根据图形 可得 $x+(5-x)+x+11=18$，解得 $x=2$.

答：A、B、C 全看过的有 2 人.



说明 像上面这一类型的题目也可运用公式：$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|)+|A\cap B\cap C|$（容斥原理），但这种方法没有运用韦恩图解题方便直观.

【26】 ①若点 (a,b) 在映射 f 下的像是 $(a+b,a-b)$，求 $(\lg(xy),\lg\dfrac{x}{y})$ 在 f 下的像.

②已知点 (x,y) 在映射 g 下的像是 (x^2+y^2,x^2-y^2)，求点 $(4,-2)$ 在 g 下的原像.

解 ① 设像为 (m,n)，则有

$$m=\lg(xy)+\lg\frac{x}{y}=\lg x+\lg y+\lg x-\lg y=2\lg x=\lg x^2,$$

$$n=\lg xy-\lg\frac{x}{y}=\lg x+\lg y-\lg x+\lg y=2\lg y=\lg y^2,$$

即所求的像为 $(\lg x^2,\lg y^2)$.

② 令 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2-y^2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm\sqrt{3}\end{cases}$

故所求的原像有四个，即 $(1,\sqrt{3})$；$(1,-\sqrt{3})$；$(-1,\sqrt{3})$；$(-1,-\sqrt{3})$.

说明 准确理解“对应法则”的意义是解决映射问题的关键，在②题结果中，一个像有多个原像，这符合映射的定义.

二、函数的概念

(一)选择题

【27】 下列各函数中，图象完全一致的是(　　　)

(A) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　　　(B) $y=\dfrac{x}{x}$ 与 $y=x^0$；

(C) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=|x|$；

(D) $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$与 $y=\sqrt{(x+1)(x-1)}$.

解 函数的图象完全一致必须具备两个条件,一是函数的解析式(即对应法则)可化为相同的形式,二是函数的定义域相同.上面四个答案中只有(B) 满足条件.

【28】 函数 $f(x)=\dfrac{cx}{2x+3}$ $(x\neq-\dfrac{3}{2})$,满足 $f[f(x)]=x$,则 c 等于( )

(A) 3;　　(B) -3;　　(C) 3 或 -3;　　(D) 5 或 -3.

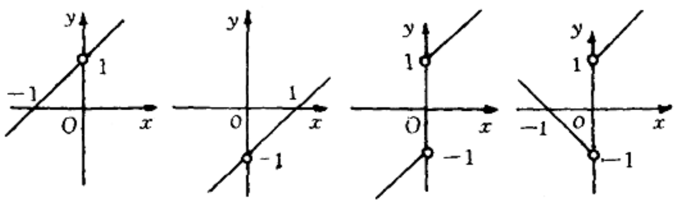
解

$$f[f(x)]=\frac{c\cdot\dfrac{cx}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{cx}{2x+3}+3}=x\Rightarrow(2c+6)x=c^2-9\text{ 对所有 }x(x\neq-\frac{3}{2})$$

都成立.由方程 $ax=b$ 当且仅当 $a=b=0$ 时才有无穷多解.

故 $2c+6=c^2-9=0$,得 $c=-3$.故选(B).

【29】 如图,函数 $y=x+\dfrac{|x|}{x}$的图象是( )



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

解 去掉绝对值符号,所给函数即为:

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ x-1, & x<0,\end{cases}$$ 故选(C).

【30】 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{1-x}$的定义域是( )

(A) $[-2,1]\cup[1,2]$;　　(B) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$;

(C) $(-\sqrt{2},1]\cup(1,\sqrt{2}]$;　　(D) $[-\sqrt{2},1)\cup(1,\sqrt{2}]$.