

先驱者的足迹

——高等数学的形成

李晓奇 编著



NEUPRESS
东北大学出版社

先驱者的足迹

——高等数学的形成

李晓奇 编著

,

© 李晓奇 2004

图书在版编目 (CIP) 数据

先驱者的足迹——高等数学的形成 / 李晓奇编著. — 沈阳 :
东北大学出版社, 2004.2 (2005.1 重印)

ISBN 7-81054-976-6

I. 先… II. 李… III. 数学史 IV. O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 013866 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市政二公司印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 140mm × 203mm

印 张: 9.875

字 数: 257 千字

出版时间: 2004 年 2 月第 1 版

印刷时间: 2005 年 1 月第 2 次印刷

印 数: 3501~7000 册

责任编辑: 任彦斌

责任校对: 李 叶

封面设计: 任彦斌 唐敏智

责任出版: 华 宁

定 价: 20.00 元

编者的话

如果我们想要预见数学的未来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

——庞加莱

介绍科学成就的书籍应该不仅叙述人类思维有限的结果,而且要把读者引到研究工作过程的本身中去,告诉读者怎样逐步克服困难,怎样寻求正确的方法。

——高尔基

提到数学,人们都会想到它在现实生活和科技发展中的重要作用。而事实上,数学的作用要远远大于我们对它的直接感受。看一下先人对数学的评价和认识吧。

意大利科学家伽利略(G. Galileo, 1564—1642):

“哲学(自然)是写在那本永远向人们打开着的伟大的宇宙之书上的。但如果我们不先学会书中所用的语言,掌握书中的符号,就不能读懂它。这本书是用数学语言写成的,符号就是三角形、圆和其他几何图形。没有它们的帮助,会连一个字也看不懂;没有它们,人们将在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着。”

英国统计学家阿巴思诺特(J. Arbuthnot, 1667—1735):

“数学知识使思维增加活力,使之摆脱偏见、轻信和迷信的束缚。”

美国政治家、科学家富兰克林(B. Franklin, 1706—1790):

“有什么科学比数学这门科学更雄伟,更卓越,对人类更有用,更令人崇尚及更富有论证性呢?”

德国哲学家康德(I. Kant, 1724—1804):

“我坚定地认为,任何一门自然科学,只有当它能够应用数学工具进行研究时才能算是真正的科学……也许可以有不用数学的纯粹的自然哲学(即只研究一般自然概念的哲学),但研究确定对象的纯粹自然科学(如物理或心理学),却不可能不用到数学。”

法兰西第一帝国皇帝、军事家拿破仑(Napoleon, 1769—1821):

“数学的发展与完善和国家的繁荣富强紧密相关。”

德国哲学家赫尔巴特(J. F. Herbart, 1776—1841):

“数学是我们这个时代(18世纪)压倒一切的科学,它不声不响地扩大着自己的领域。谁要是不用数学来为自己服务,那有朝一日他就会发现,别人正在用数学来同自己对抗。”

法国哲学家孔德(A. Comte, 1798—1857):

“只有通过数学,我们才能透彻地理解什么是真正的科学。只有在数学中,我们才能以高度的简明性、严格性来认识科学规律以及人类思维所能达到的抽象境界。”

美国数学家、“电子计算机之父”冯·诺伊曼(J. Von Neumann, 1903—1957):

“数学方法渗透并支配着一切自然科学的‘理论’分支。在现代经验科学中,它已越来越成为衡量成就的主要标准。”

如同一个人的成长一样,数学的发展也经历了由小到大的过程。而在这个过程中有一个特殊时期,它标志着数学开始长大成人,开始更有效地为社会服务。这个时期就是从常量数学到变量数学的飞跃。

今天看来,把卫星发射上天是理所当然的事情,因而人们也就忘记了当人类第一次发射卫星时的艰难,更忘记了当有人第一次提出这种想法时人们又认为它是多么的荒唐可笑。科技的高速发展使得我们的感官能够很轻易地接受各种信息,同时使得人们的感官变得越来越懒惰。因为一切都是那么的轻而易举,那么自然而然。如果对照一下今天成熟的事物、成果,不难发现与其雏形相比可谓面目全非。与昔日相比,今天确已大大向前迈进,因而人们通常不会再去留意最初

的样子。然而事实上,恰恰是最初的成果中包含着创立者的深刻思想,这种思想不仅在当时具有革命性的作用,即使在今天,它所具有的启发作用是单纯接受前人的现成结果的做法远远不能相比的。

现存的数学学习中的最突出问题之一,就是忽视概念与内容的形成历史和形成过程中所包含的思想,而只注意前人成果的叙述与机械接受。到头来,随着时间的推移,具体公式、定义、定理、方法遗忘了,而对所学内容的主要思想也没有了解、掌握。爱因斯坦在谈到自己为什么能够发现相对论时说:“我之所以能够发现相对论,是因为我比别人更笨,别人能够很快理解什么是时间,而我却需要经过长时间的思考才能弄懂。”

高等数学是高等院校的一门重要基础课。当代著名数学家柯朗曾指出:“微积分,或者数学分析,是人类思维的伟大成果之一。它处于自然科学与人文科学之间的地位,使它成为高等教育的一种特别有效的工具。遗憾的是,微积分的教学方法有时流于机械,不能体现出这门学科乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶;这种奋斗已经历了两千五百多年之久,它深深扎根于人类活动的许多领域,并且,只要人类认识自己和认识自然的努力一日不止,这种奋斗就将继续不已。”

在多年的教学实践中,我深感学生和数学爱好者的需要和欠缺。他们非常希望有一本与教材配套的读物作为对课上内容的补充,使他们从中了解到课上所学内容的产生、发展、思想方法及相关发明者的奋斗过程。而教师也需要这样的参考资料以丰富自己的教学内容。于是在参考了一些文献后,编写了此书。试图用尽可能简短的篇幅和生动的语言使读者在上述内容上有所收获。对于相关内容的论述,有些出现在每章开始的正文内,而有些则出现在相关数学家的介绍中。

本书首先在第1章介绍数学发展简史。

对此问题可谓仁者见仁,智者见智。这里没有必要对它作专门的探讨,而只需使读者对数学的发展脉络有一个总体的认识。因此,重

点介绍了数学史的几个重要阶段和数学史上的大事。其中包括近年来蓬勃发展并广泛应用的模糊数学、分形几何、小波分析、混沌理论等新学科的简单介绍,并收入了1994年英国数学家A·怀尔斯证明费尔马大定理,从而获1995—1996年度沃尔夫奖这一“20世纪最伟大的数学成就”;2002年第24届国际数学家大会在北京举行(这是国际数学家大会首次在发展中国家举行);2003年挪威政府创立“阿贝尔”奖,并于6月3日为首位获奖者——法国数学家让·皮埃尔·塞尔颁发了600万挪威克朗(约合83万美元)的奖金等最新进展。

本书的第2章介绍了解析几何的诞生和发展。解析几何的诞生可以说是数学发展史上的一次革命性飞跃,一个最为关键的转折点,它为微积分的发明做了直接的准备。在此过程中,笛卡儿和费尔马可谓居功至伟,本章对他们的生平作了简介。

本书的第3章介绍了函数概念的产生和发展史。

学生在高等数学的学习中最先遇到的就是这个概念。函数是高等数学的研究对象,没有它,高等数学就失去了基础。现在的问题是,学生们是在机械地学习这个概念,而对它的形成与发展史一无所知。事实上,对函数概念的形成过程作一个了解所得到的收获是机械地接受概念所不能代替的。从先驱者们给出的各个不同的函数定义中可以清楚地看到人们对此概念的逐步认识过程,从而可以更好地理解今天的函数概念的实质含义。第3章的后半部分介绍了对函数概念的发展做出突出贡献的数学家欧拉和沃利斯。从中不仅可以看到他们的奋斗和成就,而且可以进一步加深对函数概念的掌握。

本书第4章介绍了极限、无穷小及连续概念的形成与发展。

极限是高等数学中最基本的工具,对这一概念的掌握至关重要。无穷小在其中又扮演着特殊的角色。历史上人们对无穷小的认识经历了很长的一个过程。由于最初概念上的混乱,导致第二次数学危机的爆发。如果历史地看问题,那么这场危机的出现有其必然性。因为人类在认识论上恰好正经历一场历史变革。旧的认识论的痕迹

很难立即消失而直接跨越到一个理想的高度。对同一事物的认识,在不同时期会有不同的结果。以圆、椭圆、抛物线、双曲线这些大家熟悉的曲线来说,人们过去称它们为圆锥曲线,正是因为它们是圆锥面被不同角度的平面截割后所形成的曲线。而后来随着认识的深入,又发现它们可以被看做宇宙间物体运动的轨迹。在高等数学刚刚出现的时候,无穷小在人们看来既“是零”又“不是零”——在做加法运算时是零,而在做除法运算时又不是零。我们现在可以很“清楚”地谈论这一问题,因为书上已把一切都作了严密的论述。但在历史上,人们的认识无论如何是不会达到今天的高度的。人们对新工具中所出现的“错误”给予了宽容的理解,而且发现这并不影响新工具的使用,以至在微积分创立不久,人们发现其巨大威力后,18世纪进入了数学的“英雄世纪”。人们放开手脚把微积分应用到各个领域,用它解决了大量的实际问题,就好像找到一种高速建设高楼的方法,人们只顾一味建设,而并不管其基础是否牢固。在危机真正出现后所引起的恐慌是可想而知的。不过历史的发展又让我们看到,这样的“大跃进”倒也无妨,就像盖高楼一样,当人们盖到40层的时候突然发现20层的地方出现了问题,回头再来补救也无妨。这里仅仅是一个比方,科学的发展毕竟和建楼不完全一样。失误是难免的,如果真的期望每一层都一次性完成而不再返工是不现实的。“一个不亲自检查桥梁每一部分的坚固性就不过桥的旅行者,是不可能走远的。在数学研究中,有些事情也需冒险。”(英国数学家拉木(H. Lamb), 1849—1934)。过分的苛求会使科学停滞不前。“如果牛顿和莱布尼兹想到过连续函数不一定有导数——而这却是普遍存在的情形,那么微积分就决不会被创造出来。”(法国数学家皮卡(C. E. Picard), 1856—1941)。

为使读者对极限概念有更深刻的理解,我们从反面的“芝诺悖论”的介绍下手,以期获得“正面进攻”得不到的效果。

现在人们可以很“清楚”地谈论极限、无穷小等问题,事实上真的

清楚吗？恐怕未必。直接拿前人的结果来学习，很难体会到在这个成果形成之前所经历的艰辛，因而很难对其中的实质有深刻的理解。

本书后面各章陆续介绍了导数及其应用、积分概念的产生及应用、微分方程发展史、无穷级数等内容。每一部分除了介绍相关概念的历史演变外，都要给大家介绍与之相关的数学家的生平与业绩，读者不仅可以了解他们的治学态度、在科学上的杰出贡献，还可以对学习中的相关内容作进一步的理解。比如在第6章“积分概念的产生及应用”中，突出介绍了积分概念产生前的重要方法——不可分量法。不可分量法即我国古代的“刘祖原理”，虽然在今天看来并不十分严密，但在历史上确是一种解决问题的行之有效的方法。而且对我们今天思考问题的思路仍有启发作用。下面通过一个例子来体会一下这种方法的妙处。

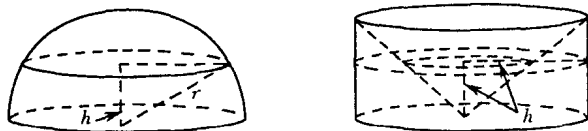
例 求半径为 r 的球的体积。

解 如图，左边是一个半径为 r 的半球，右边是一个半径为 r 高也为 r 的圆柱和一个以圆柱的上底为底、以圆柱的下底中心为顶点的圆锥。这个半球和挖出圆锥的圆柱处在同一平面上。用平行于底面、与底面距离为 h 的平面截两个立体，所得截面一个是圆形，一个是圆环。用初等几何不难证明，这两个截面的面积都等于 $\pi(r^2 - h^2)$ 。根据“卡瓦列里原理”或“刘祖原理”——“夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异”（即：由于横截面积之间的关系已经处处相同，体积之间的关系也不能不是这样）。这两个立体有相同的体积。所以球的体积为

$$V = 2(\text{圆柱的体积} - \text{圆锥的体积}) = 2\left(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

本书最后给出了四个附录。其中附录1介绍了中外著名数学竞赛，并在中国参加IMO统计表中收入了截至2003年的统计结果。

附录2介绍了中外各类数学奖。其中包括与数学家有关的中国国家最高科学技术奖。国内知名的陈省身数学奖、华罗庚数学奖和



国际知名的菲尔兹奖、沃尔夫奖均列举了截至目前的所有获奖情况。最后还收入了 2003 年 6 月刚刚由挪威政府设立的阿贝尔奖以及首位获奖者——法国数学家让-皮埃尔·塞尔——的简介。

附录 3 中介绍了中外数学名题供大家了解。

附录 4 辑录了 99 则数学名言。

相信读者会对其中的内容感兴趣的。

作为一名教师,如果熟悉本课程的发展史及相关数学家的生平、业绩、治学方法、治学态度、名言、趣闻等等,一定会把这门课程讲得生动、有趣,富于思想和哲理;而对于学习高等数学的学生和数学爱好者,了解前辈们的学术成就和道德风范以及相关内容的演化过程,必会从中受到鼓舞,提高学习兴趣,激发刻苦钻研的奋斗精神。

本书在编写过程中,得到了东北大学秦皇岛分校领导和多位同事的大力帮助,经济管理系史家龙老师在资料搜集及书稿整理方面给予了很大帮助,东北大学任彦斌老师担任责任编辑付出了辛勤的劳动,在此一并表示衷心的感谢。

本书根据所列参考文献及自己在多年的教学工作中的体会编写而成,在此,特向这些作者、译者致谢。由于水平所限,本书难免有遗漏、不当或错误之处,恳请读者批评指正。

作 者

2003 年 9 月

于东北大学秦皇岛分校

目 录

编者的话.....	1
第1章 数学发展史简介.....	1
1.1 数学发展史简介.....	1
1.2 数学史大事记	15
第2章 解析几何的诞生	62
2.1 解析几何的创立	62
2.2 解析几何的发展	68
2.3 笛卡儿	69
2.4 费尔马	74
第3章 函数概念的起源及演变	79
3.1 简述	79
3.2 函数概念的起源	84
3.3 函数概念的演变	87
3.4 欧拉	91
3.5 沃利斯	95
第4章 极限 无穷小 连续	99
4.1 极限的形成	99
4.2 无穷小量.....	103
4.3 芝诺悖论.....	105

4. 4	连续性	111
4. 5	柯西	112
4. 6	魏尔斯特拉斯	117
4. 7	斯蒂文	121
4. 8	波尔察诺	123
第 5 章 导数 微分及其应用		127
5. 1	导数概念的产生	127
5. 2	微分	131
5. 3	中值定理	133
5. 4	洛必达法则	134
5. 5	函数的极值	135
5. 6	拉格朗日	137
5. 7	罗尔	140
5. 8	洛必达	142
5. 9	巴罗	144
第 6 章 积分概念的产生及应用		147
6. 1	古代的面积与体积计算	147
6. 2	从形态幅度研究到不可分量算法	149
6. 3	微元法	152
6. 4	积分概念的确立	157
6. 5	换元积分法与分部积分法	158
6. 6	阿基米得	159
6. 7	卡瓦列里	161
6. 8	牛顿	166
6. 9	莱布尼茨	171
6. 10	黎曼	176

6. 11 帕斯卡	179
6. 12 开普勒	183
第 7 章 常微分方程的起源与发展	187
7. 1 常微分方程的起源与发展	187
7. 2 雅科布·伯努利	192
7. 3 约翰·伯努利	194
第 8 章 无穷级数	198
8. 1 无穷级数的早期发展	198
8. 2 微积分初创时期的无穷级数	199
8. 3 泰勒级数与泰勒定理	201
8. 4 e 和 π 的近似计算	202
8. 5 无穷级数理论的严格化	206
8. 6 三角级数	207
8. 7 泰勒	209
8. 8 麦克劳林	211
8. 9 达朗贝尔	214
8. 10 阿贝尔	217
8. 11 傅立叶	221
8. 12 高斯	224
8. 13 狄利克雷	227
附录 1 中外著名数学竞赛	232
附录 2 中外各类数学奖	238
附录 3 数学名题与猜想	261
附录 4 数学名言 (99 则)	286
参考文献	298

第 1 章 数学发展史简介

如果我们想要预见数学的未来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

——庞加莱

1.1 数学发展史简介

1.1.1 数学史分期简介

数学史的分期涉及按怎样的线索来描述数学发展的历史。不同的线索将给出不同的分期,通常采用的有如下线索。

- 按时代顺序;
- 按数学对象、方法等本身的质变过程;
- 按数学发展的社会背景等等。

由于数学的发展是一个错综复杂的知识过程与社会过程,用单一的线索贯穿难免会有偏颇,因此一般数学通史著作往往采用某一线索为主,同时兼顾其他因素的做法。比如以数学思想为主的数学史教程对数学史作出如下的分期。

- ① 数学的起源与早期发展(从远古到公元前 6 世纪)
- ② 初等数学时期(公元前 6 世纪—16 世纪)
 - 古代希腊数学(公元前 6 世纪—6 世纪)
 - 中世纪东方数学(3—15 世纪)
 - 欧洲文艺复兴时期(15—16 世纪)
- ③ 近代数学时期(或称变量数学时期,17—18 世纪)
- ④ 现代数学时期(1820—现在)

- 现代数学酝酿时期(1820—1870)
- 现代数学形成时期(1870—1940)
- 现代数学繁荣时期(或称当代数学时期, 1950—现在)

还有些观点认为, 17 世纪之前的数学不必再仔细区分, 而可以通称为初等数学时期。我们在此不必论述不同观点的优劣, 因为在这个问题上本来就是仁者见仁, 智者见智。我们的目的是对数学的发展有一个了解, 因而不必拘泥于一种观点, 只要对数学发展过程中所经历的一些重要阶段有所了解就够了。

1.1.2 数学发展史上的几个重要阶段

(1) 公元前 6—3 世纪

这个时期的世界数学中心在希腊, 发生了几起对整个数学史起着重要影响的事件。

① 毕达哥拉斯学派。首先是, 他的学派可算是历史上时间最早(公元前 580—公元前 500 左右)、规模最大的学派; 其次是毕氏犯了一个错误, 他误认为任何两线段间皆可公比, 即认为任一线段长皆为有理数, 实则认为数只有有理数, 由此产生了第一次数学危机, 对数学和哲学产生了一次大的推动; 第三点是毕氏对黄金分割的深刻研究和运用。黄金分割是在整个数学史中的应用数学优化理论中一直起着重要作用的一个数学成果; 最后, 毕氏发现了我们熟知的勾股定理。

② 欧几里得。欧氏是毕氏学派的继承者, 他对数学的最大贡献是撰写了《几何原本》。早在印刷术发明以前, 《几何原本》的手抄本就统御几何学达一千八百年之久, 一直被选为学校的数学教本。印刷术发明以后, 《几何原本》被译成多种文字, 一千多种版本。两千多年来, 这部著作在几何学教学中一直占统制地位。英国数学家德·摩根说: “除了《圣经》, 再没有任何一种书像《几何原本》这样拥有如此众多的读者, 被译成如此多种语言。”而原本的最大特色是创造了公

理化方法。这是吸取了毕达哥拉斯错误的教训而提出来的。公理化方法发展至今,对数学起着基础性的作用。此外《几何原本》使得人们把凡是满足它的五大公理、五大公设的几何学都叫做欧氏几何学,把推广物理空间所成的 n 维直角坐标系所表示的空间(满足欧氏公理者)叫做欧氏空间。

③ 哲学家芝诺(Zeno, 公元前 5 世纪)提出“芝诺悖论”(简单地说他提出诡辩,“飞矢不达的,静矢不起飞”,或者说“走神亚其尔追不上乌龟”悖论),这为第二次数学危机埋下伏笔,因为它标志着数学对“无穷小”思考的第一次深入。

④ 产生了几何学世界三大难题:用圆规和无刻度直尺化圆为方、三等分任意角和倍立方体。它们是产生高等几何(19 世纪,以射影几何为代表的推广欧氏空间的几何)的先驱思想。

(2) 公元 17 世纪:产生了高等数学

17 世纪发生了如下几大重要事件,使得它堪称高等数学的世纪或叫做近代数学的开端。依时间顺序如下。

① 开普勒天体三大定律的发现(1601—1619)

可以说是三大定律开创和推动了堪称应用数学分支的天体力学和天文学的发展,因而也推动了数学的发展。这三大定律是:

太阳的行星沿着以太阳为一焦点的椭圆轨道运行;
连接行星与太阳的“矢径”在相等时间内扫过相等面积;
行星公转的周期平方与该轨道的半长轴的立方成正比。

② 纳皮尔发明了对数(1613 年)

可以说,在积分学中没有对数(自然对数)运算就无法进行。比如 $dy = ydx$ 这样一个极简单的微分方程,如果没有对数概念就表达不出它的原函数(积分式)。可见对数的发明为高等数学的诞生做了直接的准备。

③ 笛卡儿发明了直角坐标系(1619 年)

据说是 1619 年 11 月 10 日笛卡儿的一个祥梦产生了直角坐标

系,又叫笛卡儿坐标,从而产生了解析几何学——高等数学的三大基础之一,产生了坐标系下的函数讨论,产生了“活”的数学。因此说笛卡儿坐标标志着数学进入新的时代。

④ 微积分的发明(17世纪70年代)

是牛顿和莱布尼茨分别从不同出发点独立而同时期地发明了微积分学。微积分学在整个数学中的地位已不用任何人宣传解释。正如恩格斯所说:“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看做人类精神的最大胜利了,如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹和惟一的功绩,那就正是在这里”,“微积分学或者数学分析是人类思维的伟大成果之一”。

⑤ 从应用数学角度,不能不承认牛顿的《自然哲学的数学原理》(1687年,以下简称《原理》)是推动近代数学的一大动力。因为《原理》已被公认为是整个自然科学的奠基性巨著,特别是其中提出的运动学三大定律和万有引力定律,直接丰富了数学、力学和天体力学的研究。

⑥ 数论的成熟(17世纪末)

数论是数学中一门特殊学科,它的产生很早,成熟也早,但至今仍是一门活跃而“年轻”的学科。数论问题吸引力强,似乎很容易,但“易进不易出”,因为它要求的技巧性很高,不易出成果。先后发生在17世纪末和18世纪初的世界三大难题:费尔马问题、歌德巴赫问题、华林问题,使数论发展成为一门独立的数学学科。

也许会认为数论不过是玩整数游戏,与数学的现代化没有多大关系。其实不然,就以三大难题来说,不仅因为其难度和吸引力而增强了数学的知名度,也因为解决它们必须在现有数学基础上进行再创造,产生新的突破,从而推动了数学和科学的发展。19世纪末解决华林问题(希尔伯特)如此,1994年解决费尔马问题(A·怀尔斯)也是如此。至于歌德巴赫问题,虽已有过很多突破性创造,其方法已广泛应用于其他分支,但“ $1+1$ ”问题至今仍未解决。