



教育科学“十五”国家规划课题研究成果



高等学校经济管理学科数学基础教材

# 微积分

主编 苏德矿 金蒙伟



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果  
高等学校经济管理学科数学基础教材

# 微 积 分

主编 苏德矿 金蒙伟

编者 (按编写顺序排名)

浙 江 大 学 苏德矿

浙 江 科 技 学 院 章迪平

浙 江 理 工 大 学 胡觉亮

浙 江 财 经 学 院 杨辉煌

浙 江 林 学 院 徐光辉

中 国 计 量 学 院 吴跃生

浙 江 工 业 大 学 周 南

杭 州 电 子 科 技 大 学 程吉树



高等教育出版社  
Higher Education Press

## 内 容 提 要

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践”的研究成果之一。由浙江大学等八所高校长期从事微积分教学,且具有丰富教学经验,教学效果显著的教师参加,并根据中华人民共和国教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学三、四考试大纲的基本要求,参照教育部高教司颁发的《经济数学基础》大纲,在认真研究部颁教材与国外同类数学教材的基础上,取长补短而编写的。

本书主要内容有:函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程、多元函数微分学、二重积分和级数九部分。书中冠有“\*”号的部分供对微积分有较高要求的专业选用和有兴趣欲扩大知识面的学生阅读。本书表述确切,思路清楚,由浅入深,直观形象,通俗易懂,并注意数学思想与数学方法的论述。例题具有典型性,既便于教师教学,更利于学生自学。本书将微积分与数学模型有机结合起来,除了包含大纲要求的微积分在经济中的应用,还增加了连续复利、现值与将来值等经管专业中经常要用的内容。

本书可供经济、管理专业学生选用,也可供有关经济管理人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

微积分/苏德矿,金蒙伟主编. —北京:高等教育出版社,2004.7

ISBN 7 04-014384-4

I. 微... II. ①苏...②金... III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 050045 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-82028899		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京印刷集团有限责任公司印刷二厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004年7月第1版
印 张	21	印 次	2004年9月第2次印刷
字 数	390 000	定 价	22.10元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

策划编辑	马 丽
责任编辑	马 丽
封面设计	王凌波
责任绘图	朱 静
版式设计	马静如
责任校对	殷 然
责任印制	宋克学

## 郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010) 58581897/58581896/58581879

**传 真：**(010) 82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100011

**购书请拨打电话：**(010)64014089 64054601 64054588

# 总 序

在社会科学中,数学的首要应用领域无疑是经济学。马克思认为,一门学科成熟与否的标志就是看其对数学的应用程度。经济学在上世纪飞速发展,其数学工具、模型的应用越来越广泛和深入,这是毋庸置疑的进步。随着中国加入WTO,经济全球化进程加快和知识经济时代的到来,培养经济学、管理学与数学相结合的复合型人才成为一种大趋势。为了探索和建立我国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系,全国高等学校教学研究中心(以下简称“教研中心”)在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上,决定组织高等学校经济管理专业开展其子项目课题——“21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践”的研究与探索,以进一步推动和促进高等学校经济管理类数学课程建设。本课题的建设目标是:紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在经济管理类数学课程教学内容、课程体系和教材建设已经取得的成果基础上,在建设经济管理类专业的校、省、国家三级精品课程的过程中,集中力量,深入探索,在现代教育技术平台上建成适应经济管理类专业创新人才培养需要的数学课程体系和立体化教材体系。本项目得到了高等教育出版社的大力支持与配合,即将推出一批适应经济管理类数学课程需要的立体化教材,并冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

在项目的研究过程中,我们始终紧紧围绕着以上建设目标,从经济管理数学教学现状的调查研究与分析入手,不断拓宽专业视野,加强应用和实践的环节,力图在整个项目研究过程中,体现以下几点鲜明特色:

## (1) 树立科学的发展观,在继承的基础上不断超越

经济数学,即在经济中应用的数学,是经济学与数学相互交叉的一个跨学科领域。整体项目的研究工作以经管类数学基础课程如何适应现在及未来的经济学、管理学的发展为切入点,全面而深入地进行课程体系和教学内容的探索与研究。即在消化与吸收多年来已有成果的基础上,努力实践,大胆创新,要随着经管学科的发展而不断与其融合,真正体现其应用性,这是项目研究工作的基石。

## (2) 以项目研究为先导,为高校教学改革服务

随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施,建设一批具有示范性和适

应性的经管数学精品课程教材已经成为一种迫切的要求,而这些工作需要通过深入的研究和探索作为支撑。2003年8月,在西安召开的高等学校非数学类专业数学课程教学基本要求研讨会上,经管项目小组成员集中讨论了在当前经管专业不断扩招的新形势下,应该如何制定与经管类专业数学教学相适应的基本要求。并对《经济管理类数学课程教学基本要求(初稿)》提出了很多具有建设性的意见和构想。目前修改稿在全国范围内征求意见。2003年12月,国内七所财经类院校(中央财经大学、上海财经大学、对外经济贸易大学、南京财经大学、东北财经大学、山西财经大学、中南财经政法大学)的专家学者齐聚北京,在深入分析现阶段我国对经济管理类人才需求,并在广泛征求一线教师意见的基础上,根据《经济管理类数学课程教学基本要求》修改稿着手编写一套具有先进性、适用性、示范性和系统性的精品教材,为各高校进行相关专业课程体系和教学内容的设计与改革提供参考。

### (3) 注重学科的交叉融合,建设立体化资源体系

经管类数学基础课程应重视数学、计算机技术与经济管理学的交叉结合,充分利用各个学校经济学和管理学的资源优势,强调基本概念的阐述,简化理论推导,反映科学技术的发展水平,突出学生的个性发展。经管类数学基础课程教材及教学资源的建设在项目研究的基础上,不断研制和开发与系列教材相关配套的教学资源,即注重配套的教学参考书、学习指导书、电子教案、多媒体课件、网络课程等的研发,鼓励先进的教学方法和手段特别是信息技术的应用。

### (4) 进行分类指导,建设交流共享平台

如今,知识结构完整、适应性强、动手能力强的经济管理复合型人才越来越受欢迎,同时,对经济管理人才需求的层次化和多样性也带来了高等学校经管专业定位的层次化和多样性,因此需要通过研究对各高校的经管专业进行分类指导。此外,还要为广大教师搭建一个交流共享的平台,强调师资培训的重要性,通过各种层面和形式的示范交流与师资培训,帮助广大一线教师提高教学水平,促进先进教学经验和优秀教学资源的交流与推广,帮助各高校加快课程体系和教学内容更新的步伐。

在新的世纪,经济管理类数学基础课程改革将不断培养出满足市场需求的人才,寻找自身的新定位,项目研究也将在对国内外经济管理类专业数学教学内容和课程体系进行深入研究的基础上,吸取各项教改成果,从而快速有效地建立起一个高水平的学习环境,为建设具有中国特色的适应21世纪人才培养需要的经管数学教材和全面提高经管数学教学质量而不懈努力。

# 前 言

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21世纪中国高等学校经济管理类数学课程教学内容和课程体系的创新与实践”的研究成果之一,是根据中华人民共和国教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学三、四考试大纲的基本要求,并参照教育部高教司颁发的《经济数学基础》大纲,在认真研究部颁教材与国外同类数学教材的基础上,取长补短而编写的。

本书主要内容有:函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程、多元函数微分学、二重积分和级数九部分。可作为高等学校经济、管理等相关专业本科生的微积分课程的教材。书中冠有“\*”号的部分供对微积分有较高要求的专业选用和有兴趣欲扩大知识面的学生阅读。

在内容安排上我们注意以下几点:

1. 编写时力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂,并注意数学思维与数学方法的论述,例题具有典型性。教材内容力求做到既便于教师教学,也利于学生自学。

2. 对概念的引入,注重概念与实际背景的分析与教学,许多重要定理的条件与结论用发现探索的方式引出(即由果索因),并用分析、综合的方法给予证明,以便学生比较系统地理解数学的基本概念和基本定理,掌握数学的基本方法。

3. 将微积分与数学模型有机地结合起来,从而恢复了微积分的真实面目:即微积分来源于实践,又应用于实践。而数学模型的引入正是为学习微积分提供了实践基础,使学生在学微积分的过程中,也学会用数学方法建立数学模型,解决实际问题,从而有利于提高学生的综合素质。

4. 强调微积分在经济中的应用:如复利、连续复利、年有效收益、现值与将来值、边际分析、弹性分析、最大利润、收入流、收入流的现值与将来值。

本书由苏德矿、金蒙伟主编,其中第一章由苏德矿编写,第二章由章迪平编写,第三章由苏德矿、胡觉亮编写,第四章由胡觉亮编写,第五章由杨辉煌编写,第六章由徐光辉编写,第七章§2—§6由吴跃生编写,第七章§1、第八章由周南编写,第九章由程吉树编写。全书由苏德矿、金蒙伟统稿。

浙江大学数学系蔡燧林教授、吴明华教授对本教材的编写提出了很多具体的意见和建议,有些建议已在撰写本书时采纳。在此向他们表示衷心地感谢。



在这里,我们要特别感谢本书的主审人北京大学的姚孟臣教授,他花费了大量的宝贵时间,对书稿进行了非常认真仔细的审查,并提出了许多宝贵的意见和建议。此外,在本书的整个撰写过程中,自始至终得到了高等教育出版社李艳馥、徐可、马丽同志的热情支持与帮助,在此一并向他们表示衷心地感谢。

由于编者水平有限,本书中难免会有欠妥和有误之处,我们衷心希望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书在教学实践中不断完善起来。

编者于杭州

2004年3月

# 目 录

第一章 函数与极限	1
§ 1 函数	1
1.1 函数的概念	1
1.2 具有某些特性的函数	7
习题 1-1	9
§ 2 数列极限	12
2.1 数列极限的概念	12
2.2 收敛数列的性质	15
2.3 数列极限存在的准则	17
习题 1-2	20
§ 3 函数极限	21
3.1 函数极限的概念	21
3.2 函数极限的性质	24
3.3 函数极限存在的准则及两个重要极限	26
3.4 无穷小量、无穷大量、阶的比较	31
习题 1-3	35
§ 4 函数的连续性	36
4.1 函数连续的概念	36
4.2 连续函数的性质	39
4.3 初等函数在其定义域上的连续性	40
习题 1-4	42
复习题一	43
第二章 导数与微分	46
§ 1 导数	46
1.1 导数的概念	46
1.2 求导法则和基本求导公式	51
1.3 隐函数的导数	56
1.4 高阶导数	58
1.5 导数概念在实际中的应用	60
习题 2-1	61
§ 2 微分	63
2.1 微分的概念	63

2.2 微分的计算	65
习题 2-2	68
复习题二	68
<b>第三章 微分中值定理及导数的应用</b>	<b>71</b>
§1 微分中值定理	71
1.1 费马(Fermat)定理、最大(小)值	71
1.2 罗尔(Rolle)定理	74
1.3 拉格朗日(Lagrange)定理、函数的单调区间与极值	75
1.4 柯西(Cauchy)定理	81
习题 3-1	82
§2 未定式的极限	83
2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	83
2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	86
2.3 其他类型未定式的极限	87
习题 3-2	89
§3 泰勒(Taylor)定理与应用	90
3.1 泰勒(Taylor)定理	90
3.2 几个常用函数的麦克劳林(Maclaurin)公式	91
3.3 带有佩亚诺(Peano)余项的泰勒公式	93
3.4 泰勒公式的应用	94
习题 3-3	95
§4 数学建模初步	96
习题 3-4	100
§5 函数图形的凹凸性与拐点	100
习题 3-5	103
§6 函数图形的描绘	103
6.1 曲线的渐近线	103
6.2 函数图形的描绘	105
习题 3-6	107
§7 导数在经济中的应用	107
7.1 经济中常用的一些函数	107
7.2 边际分析	110
7.3 弹性分析	112
习题 3-7	116
复习题三	118
<b>第四章 不定积分</b>	<b>121</b>

§ 1 不定积分的概念 .....	121
1.1 原函数与不定积分 .....	121
1.2 不定积分的性质 .....	122
1.3 基本积分 .....	123
习题 4-1 .....	125
§ 2 求不定积分的几种基本方法 .....	125
2.1 凑微分法(第一类换元法) .....	125
2.2 变量代换法(第二类换元法) .....	128
2.3 分部积分法 .....	132
习题 4-2 .....	135
§ 3 某些特殊类型函数的不定积分 .....	137
3.1 有理函数的不定积分 .....	137
3.2 三角函数有理式的不定积分 .....	141
习题 4-3 .....	143
复习题四 .....	143
<b>第五章 定积分及其应用</b> .....	<b>145</b>
§ 1 定积分的概念与性质 .....	145
1.1 引例 .....	145
1.2 定积分的定义 .....	147
1.3 定积分的几何意义 .....	148
1.4 定积分的基本性质 .....	149
习题 5-1 .....	152
§ 2 定积分基本定理 .....	152
2.1 原函数存在定理 .....	152
2.2 牛顿-莱布尼茨公式 .....	154
习题 5-2 .....	155
§ 3 定积分的计算 .....	156
3.1 定积分的换元积分法 .....	156
3.2 定积分的分部积分法 .....	158
习题 5-3 .....	159
§ 4 定积分的应用 .....	160
4.1 平面图形的面积 .....	160
4.2 立体的体积 .....	163
4.3 定积分的经济应用 .....	166
习题 5-4 .....	169
§ 5 反常积分 .....	170
5.1 无穷区间上的反常积分 .....	170

5.2	无界函数的反常积分	173
5.3	$\Gamma$ 函数	174
习题 5-5		175
复习题五		175
<b>第六章</b>	<b>微分方程与差分方程</b>	179
§ 1	微分方程的基本概念	179
习题 6-1		181
§ 2	一阶微分方程	181
2.1	可分离变量的一阶微分方程	181
2.2	一阶齐次微分方程	182
2.3	一阶线性微分方程	184
习题 6-2		189
§ 3	可降阶的二阶微分方程	190
3.1	$y'' = f(x)$ 型	190
3.2	$y'' = f(x, y')$ 型	190
3.3	$y'' = f(y, y')$ 型	191
习题 6-3		193
§ 4	二阶常系数线性微分方程	193
4.1	二阶常系数齐次线性微分方程	194
4.2	二阶常系数非齐次线性微分方程	197
习题 6-4		203
§ 5	差分及差分方程的基本概念	204
5.1	差分的概念	204
5.2	差分方程的基本概念	205
习题 6-5		206
§ 6	一阶常系数线性差分方程	207
6.1	齐次方程 $y_{t+1} - ay_t = 0$ 的解法	207
6.2	非齐次方程 $y_{t+1} - ay_t = f(t)$ 的解法	208
习题 6-6		210
复习题六		211
<b>第七章</b>	<b>多元函数微分学</b>	214
§ 1	空间解析几何简介	214
1.1	空间直角坐标系	214
1.2	空间曲面及其方程	216
习题 7-1		221
§ 2	多元函数的极限与连续性	221
2.1	平面区域	221

2.2	多元函数的概念 .....	222
2.3	二元函数的极限与连续 .....	223
	习题 7-2 .....	227
§ 3	偏导数与全微分 .....	228
3.1	偏导数 .....	228
3.2	全微分 .....	232
	习题 7-3 .....	236
§ 4	复合函数的微分法 .....	236
	习题 7-4 .....	241
§ 5	隐函数的偏导数 .....	242
	习题 7-5 .....	244
§ 6	多元函数的极值 .....	245
	习题 7-6 .....	249
	复习题七 .....	250
<b>第八章</b>	<b>二重积分</b> .....	<b>252</b>
§ 1	二重积分的概念 .....	252
	习题 8-1 .....	255
§ 2	利用直角坐标计算二重积分 .....	255
	习题 8-2 .....	262
§ 3	利用极坐标计算二重积分 .....	263
	习题 8-3 .....	267
	复习题八 .....	268
<b>第九章</b>	<b>级数</b> .....	<b>270</b>
§ 1	数项级数的基本概念与性质 .....	270
1.1	数项级数的概念 .....	270
1.2	收敛级数的性质 .....	272
	习题 9-1 .....	273
§ 2	正项级数收敛性的判别法 .....	273
	习题 9-2 .....	279
§ 3	一般项级数 .....	280
3.1	交错级数 .....	280
3.2	绝对收敛与条件收敛 .....	281
	习题 9-3 .....	282
§ 4	幂级数 .....	283
4.1	幂级数的收敛半径与收敛区间 .....	283
4.2	幂级数的性质 .....	286
	习题 9-4 .....	288

---

§ 5 函数展开成幂级数 .....	288
5.1 泰勒公式与泰勒级数 .....	289
5.2 几个基本初等函数的幂级数展开 .....	290
习题 9-5 .....	294
复习题九 .....	295
习题答案 .....	297

# 第一章 函数与极限

微积分的基础是极限,极限的思想自始至终贯穿于微积分之中.极限是建立在无限基础上的概念,它的研究对象是函数,考虑的是一个动态过程.极限方法的无限性和动态性与初等数学处理问题的方法(其主要特征为有限性和静态性)有着本质的不同,但又有着密切的联系.微积分就是一门以函数为研究对象,运用极限手段(如取无穷小或无穷逼近等极限过程)分析处理问题的数学学科.

## § 1 函 数

### 1.1 函数的概念

#### 一、常量与变量

人们在观察、研究某一运动过程中,会遇到许多不同的量.其中有的量在研究过程中保持不变,这种量叫做常量;也有的量在运动过程中可取不同的值,这种量叫做变量.例如,火车在两车站之间的行驶过程中,乘客的数量是常量;而火车离两站的距离,燃料的储存量等都是变量.必须注意,上述常量与变量的概念,依赖于所考察的过程.仍以上述例子为例,如果火车从起点到终点的行驶过程中,途中若停靠一些站,这时乘客的数量就不是常量而是变量.

#### 二、函数的定义

一切客观事物都是不断变化发展的,在变化过程中,各个变量的变化不是孤立的,而是彼此联系着的.为了探索和掌握运动的规律性,就必须深入研究变量的变化状态和变量间的依赖关系,这是微积分研究的主要内容.

函数是微积分研究的对象.虽然在中学已经讲授过一些有关函数的知识,但不够详尽透彻.我们要对函数有一个清楚的认识.

**定义 1.1** 设  $D, B$  是两个非空实数集,如果存在一个对应法则  $f$ ,使得对  $D$  中任何一个实数  $x$ ,在  $B$  中都有唯一确定的实数  $y$  与  $x$  对应,则称对应法则  $f$  是  $D$  上的函数,记为

$$f: x \mapsto y \quad \text{或} \quad f: D \rightarrow B.$$



$y$  称为  $x$  对应的函数值, 记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中  $x$  叫做自变量,  $y$  又叫做因变量.

有时也简称因变量  $y$  是自变量  $x$  的函数, 虽然这种说法并不太确切, 但反映了  $y$  是依赖于  $x$  的变量, 在使用上有方便之处. 所以我们在以后常用这种说法, 但应正确理解, 函数的本质是指对应法则  $f$  与定义域, 不是指因变量  $y$ .

$D$  称为函数  $f$  的定义域, 记为  $D(f)$ .  $\{f(x) | x \in D\}$  称为函数的值域, 记作  $R(f)$ . 在平面坐标系  $Oxy$  下, 集合  $\{(x, y) : y = f(x), x \in D\}$  称为函数  $y = f(x)$  的图形或图像.

由函数的定义可知, 定义域、对应法则是确定函数的二要素. 至于变量本身的具体意义及采用什么记号, 那是无关紧要的, 比如

$$y = f(x), x \in D \quad \text{与} \quad S = f(t), t \in D$$

代表同一个函数.

如果同时研究几个不同的函数, 即不同的对应规律, 就必须用不同的记号加以区别, 如  $f, g, \varphi, \psi, \dots$  等等. 有时为了简便起见, 可用  $y = y(x)$  表示一个函数, 这样  $y$  既代表对应规律又代表因变量.

在函数的定义中, 当  $x$  在  $D$  上每取一个值  $x_0$ , 所对应的值  $y_0$  称为函数  $f$  在  $x = x_0$  处的值, 记作  $f(x_0)$ , 即有  $y_0 = f(x_0)$ .

如果一个函数是由数学表达式给出, 而定义域没有具体的规定, 那么它的定义域就是使得函数在数学上有意义的自变量所取数值的全体. 如果该函数有实际背景, 则它的定义域还要根据问题的实际条件来确定.

表示函数的定义域常用区间、不等式两种方法.

对区间我们常引入下面的记号. 开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \stackrel{\text{def} \textcircled{1}}{=} U(x_0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 称为以  $x_0$  为心, 以  $\delta$  为半径的邻域, 简称为  $x_0$  的  $\delta$  邻域. 若不需要指明半径  $\delta$  时, 记作  $U(x_0)$ , 称为  $x_0$  的某邻域.  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{U}(x_0, \delta)$  称为以  $x_0$  为心, 以  $\delta$  为半径的去心邻域, 简称为  $x_0$  的  $\delta$  去心邻域, 若不需要指明半径  $\delta$  时, 记作  $\dot{U}(x_0)$ , 称为  $x_0$  的某去心邻域. 同理,

$(x_0, x_0 + \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{U}_+(x_0, \delta), [x_0, x_0 + \delta) = U_+(x_0, \delta)$  统称为  $x_0$  的右邻域,

$(x_0 - \delta, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{U}_-(x_0, \delta), (x_0 - \delta, x_0] = U_-(x_0, \delta)$  统称为  $x_0$  的左邻域.

**例 1** (1)  $y = x^2$ , 其中  $x \in [0, 1]$ , 该函数的定义域是  $[0, 1]$ ;

① 符号“ $\stackrel{\text{def}}{=}$ ”表示“定义为”或“记为”