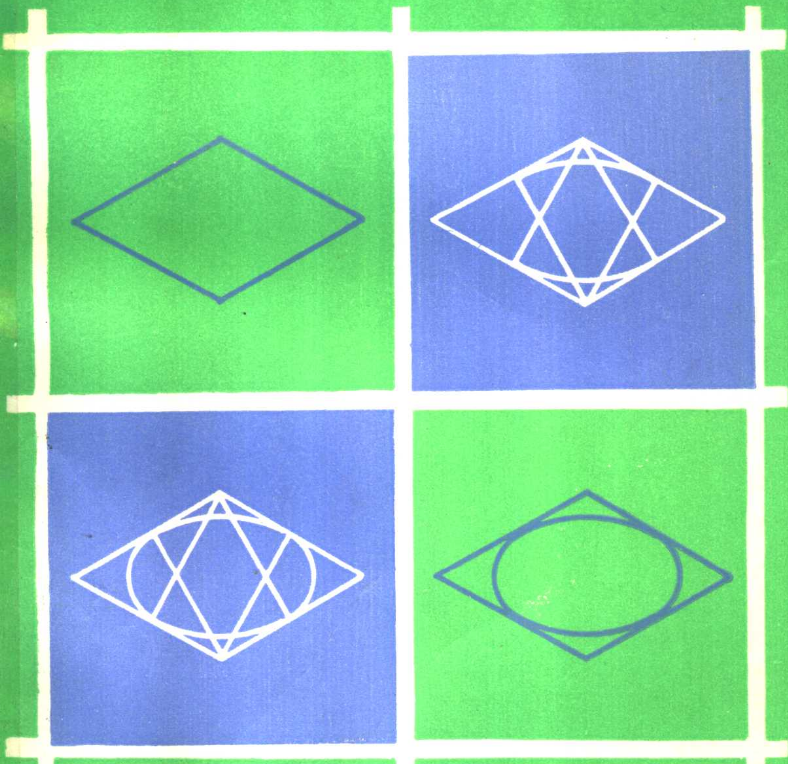
SHUXUE AIHAOZHE TIYUAN

数学爱好者题苑

（高中三年级）

陈敏贤　赖祖正



福建教育出版社

数学爱好者题苑（高中三年级）

版社

高 中 三 年 级

数学爱好者题苑

陈敏贤　赖祖正 编

福 建 教 育 出 版 社

数学爱好者题苑

高中三年级

陈敏贤　赖祖正编

出版：福建教育出版社

发行：福建省新华书店

印刷：福州第二印刷厂

787×1092毫米　32开本　5.625印张　152千字

1988年7月第一版　　1988年7月第一次印刷

印数：1——7,400

ISBN7—5334—0290—1/G·215　定价：1.45元

编者的话

本《题苑》为中学阶段的爱好数学的学生而编，旨在帮助他们打好坚实的数学基础，进一步提高能力、发展智力，增进对数学的学习兴趣，全套共六册，每个年级一册。

编者在长期教学实践中，积累了不少“好题”，近几年又翻阅了一些国内外较新的习题、资料。在这基础上，在提出编写设想和编写组织工作上，陈铁贤同志起了主要作用；共同讨论之后的具体编写工作中赖征正同志做了大多数工作。我们遵循下述四个原则来精选题目：

(1)参照目前通用的中学数学教材和教学要求；

(2)切合中学生的认识能力和智力发展水准；

(3)强调科学性、思考性和趣味性；

(4)力求一题一型，类型的面要广、重复度要小。

对于入选的题目，我们都给出解答。紧要之处，着意加注，作些分析、启示，或点明通法。对趣味数学题，我们强调应用数学知识和方法给予科学的说明或论证。这有助于增强学生运用数学知识的能力。

教师在指导课外数学兴趣小组活动（包括开展数学竞赛）时，本书可以提供参考资料；对于社会青年的学习，本书也有一定的参考价值。

承蒙林世中老师帮助整理了书稿，谨此表示感谢。

编　者

1987年12月于福州三中

问题部分

1. 若关系式 $C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^{m}:C_{n+1}^{m-1}=5:5:a$ 成立，试问：a 可取什么整数？并求出相应的 m、n 的值。

2. 解不等式：$xC_{x}^{x-3}+P_{x}^{3}>4C_{x+1}^{3}$。

3. 某铁路沿线随着四化建设需要增添车站，除原有车票外又添 22 种车票，问这条线路上增添多少车站？

4. 有锁若干把。现有 6 个人各掌握一部分钥匙。已知任意两个人同时去开锁有且只有一把锁打不开，而任何三个人都可以把全部锁打开。问最少有多少把锁？

5. 四个男同学三个女同学排成一排，在下列情况下分别有多少种排法？

(1) 女同学必须排在一起；

(2) 女同学互不相邻；

(3) 女同学必须排在偶数位；

(4) 女同学必须按从高到矮的顺序排列；

(5) 某两女同学不在两端。

6. 12 位翻译人员，其中 4 人只会英语，3 人只会日语，余下 5 人既会英语又会日语。现从这 12 人中抽选 6 人去完成某次翻译任务，要求 6 人中有 3 人会英语，3 人会日语。问有多少种抽选方法？

7. $n+1$ 件不同的新年礼物全部分给 n 个同学，每人至少一件，有多少种不同的分法？

8. 从 1、2、3、8、9、10 六个数中每次取出两个数，使其和为偶数，问有多少种取法？

9. 有 9 张卡片分别写着 0、1、2、3、…、8 九个数字，现从中取 3 张并排着组成三位整数。

(1) 问能组成多少个整数？其中有多少个偶数？

(2) 若“6”的卡片也可作为“9”使用又能组成多少个整数？

10. 同时满足下列条件的整数有多少？(1) 它的常用对数首数为 2；(2) 它的末位数码不是2；(3) 它的各位数码各不相同。

11. 从 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中取两个分别作一个对数的底和真数，一共可以得到多少个不同的对数值？一共可以得到多少个大于 1 的对数值？

12. 复数 $x+yi\ (x\neq y)$，若 x、y 可取 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十个数字，试问：(1) 可组成多少个不同的复数？(2) 可组成多少个不同的虚数？(3) 可组成多少个不同的实数？

13. (1) 从 1、3、4、5、7 中每次取出四个数组成二阶行列式，能得到多少个不同的行列式的值？

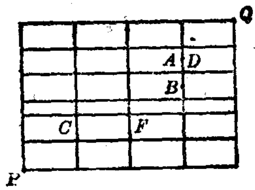
(2)从0、1、2、3和4、5、6、7两组数中各取二个数字能组成多少个不重复数字的四位偶数？

14. 9个正数数字可以用9!种方法排成三阶行列式，求所有这样的行列式的和。

15. 一个袋子里放了12个球，其中3个是红色的，4个是白色的，5个是黄色的。从袋里取出4个球，(1)取出的球全是黄色的取法有多少种？(2)取出的球的颜色至少是两种的取法有多少种？

16. 右图是某地区的街道图。试分别根据下列条件求从P点到Q点的最短路线的种数。

(1)图中无任何障碍，均可自由通行；(2)A、B两点间因施工禁止通行；(3)禁止从C点向右拐弯。



(16题)

17. 通过平面上三点A、B、C，分别作m条、n条和q条直线。除m条、n条、q条直线分别共点于A、B、C外，再没有三条直线共点，且任意两条不平行，问：这些直线可组成多少个三角形？

18. 一平面上有红点9个，白点5个。在这些点中有4个红点在一直线上，其余无三点共线。问：

(1)过任二点引直线一共可引多少条？

(2)以相同颜色的点作顶点可以作几个三角形？

19. 某篮球队有10人，其中某4人善打锋，另4人善打卫，其余2人锋卫均可。今选5人出场，3人打锋（分左中右

锋），2人打卫（分左右卫），使各人发挥所长。试问，共有多少种选派方法？

20. 从7名运动员中选出4人参加4× 100米接力赛，分别跑第一、二、三、四棒。问：

(1) 有几种安排方法？

(2) 若其中甲、乙两人都不跑中间两棒有几种安排方法？

(3) 若其中甲、乙两人不都跑中间两棒有几种安排方法？

21. 已知在$\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x^4}\right)^n$的展开式中，第三项的系数比第二项的系数大44，求展开式的常数项。

22. 已知$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$展开式前三项系数成等差数列，(1) 求展开式所有的有理项；(2) 求展开式里系数最大的项。

23. $\left(\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$展开式中，已知某项$x$的指数是其后一项$x$指数的2倍，而这一项比后一项小30，求$x$。

24. 二项式$\left[\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right]^n$展开式第六项为21，且第二、三、四项的二项式系数成等差数列，求x值。

25. 已知$(x^{\lg x}+1)^n$展开式最后三项的系数和是方程：

$$3^{y^2}\cdot 9^{-10y}\cdot 81^{-11}=1$$

的正整数解，而它的中项是方程：$3\sqrt[q]{\frac{z}{2}}=100+\sqrt{2z}$的解，求$x$。

26. 已知q为正整数，试将$(1+x+2px^2)^q$展成x之升幂多项

式至 x^3 项。

(1) 若 x 与 x^2 之系数各为 6 与 27，试求 p 与 q 之值；

(2) 试求在此展式中 x^3 之系数；

(3) 利用以上结果试求 1.0102^6 之值(准确至 4 位小数)；

(4) H 市之人口增长率估计为 1.02%，设 H 市现在人口是四百万，问在第六年年终时，H 市之人口为若干？(答案准确至三位有效数字)

27. 求 $(2x-3y)^{28}$ 展开式中系数的绝对值最大的项。

28. 确定 $(p+q)^n$ 按 p 降幂展开式中的最大项。假定 $p>0$，$q>0$，$p+q=1$。在什么条件下：(a) 最大项是首项；(b) 最大项是末项；(c) 展开式将包含超过所有其它项的两同样的项？

29. 若 $(ax+1)^{2n}$ 和 $(x+a)^{2n+1}$ 展开式中含 x^n 项系数相等，求证：$\dfrac{1}{a}$ 必是方程 $n^2(n+1)x^3+(2n+1)^2x^2-(2n+1)^3=0$ 的根。

30. m、n 是正整数，整式 $f(x)=(1+x)^m+(1+x)^n$ 中 x 的系数为 19。试求 x^2 系数的最小值。

31. 若 a_1、a_2、a_3、a_4 为二项式展开式中相邻的四个系数，求证：$\dfrac{a_1}{a_1+a_2}$，$\dfrac{a_2}{a_2+a_3}$，$\dfrac{a_3}{a_3+a_4}$ 成等差数列。

32. 设 $(3+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$，$n$ 为自然数，a_n、b_n 为整数。

(1) 试推测用 a_n、b_n 表示 $(3-\sqrt{2})^n$；

(2) 证明你的推测；

(3) 若连结 (a_n, b_n)，(a_{n+1}, b_{n+1}) 两点的直线斜率为 k_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n$。

33. 设 a_0，a_1，a_2，…是 $(1+x+x^2)^n$ 按 x 的升幂展开式中的系数，求证：$a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \cdots - a_{2n-1}a_{2n} = 0$。

34. 试证：(1) $C_n^0 C_n^{2r} - C_n^1 C_n^{2r-1} + C_n^2 C_n^{2r-2} - \cdots + C_n^{2r} C_n^0$

$= (-1)^r C_n^r$；

(2) $C_n^0 C_n^{2r+1} - C_n^1 C_n^{2r} + C_n^2 C_n^{2r-1} - \cdots - C_n^{2r+1} C_n^0$

$= 0$。

35. 证明：

$$2^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots)^2\text{。}$$

36. 求证：$C_n^1 + C_n^4 + \cdots = \dfrac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\dfrac{n-2}{3}\pi\right)$，

$$C_n^2 + C_n^5 + \cdots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n-4}{3}\pi\right)\text{。}$$

37. 任取一个正整数 N，求该数的立方的最后两个数字都为 1 的概率。

38. 箱子中有 9 张卡片，各张上分别写着从 1 到 9 的数字。将它们很好地混合后，从其中相继取出 4 张卡片，按取出的顺序从左至右地排列，组成一个四位数，求这个数小于 1986 的概率。

39. 在水平面上沿直线 AB 垂直地摆着一些半径为 r 的相同的圆柱体，其中心之间隔为 l。以角度 α 向直线投一半径为 R 的圆球．如果圆球的运动轨迹与直线 AB 等可能地相交于任何一点，求圆球与圆柱体相碰的概率。

40. 地下铁道售票员在开始售票之前有 $2m$ 个 5 分的硬币。票价每张为 5 分。如果每一个乘客各买一张车票，而且付款时用 5 分硬币与 1 角的纸币是等可能的。试问：售票员在卖出 $2n$ 张车票之后他将没有零钱可付的概率是多少？

41. 从 52 张扑克牌中随便抽取出 3 张。问：3 张是顺子的事件 B 的概率是多少？

42. 一个盒子中装有 3 只好灯泡，一个调皮的孩子又放进 2 只坏灯泡。假如从 5 只灯泡里先取出 1 只(不放回)，再取出第 2 只。求取出 2 只都是好灯泡的概率是多少？

43. 甲、乙、丙、丁四人玩扑克，甲、丙为一家，乙、丁为一家。假定把 52 张牌随机地分给每人 13 张，定义事件：

$B_1=\{$甲、丙二人共拿到 3 张 $A\}$，

$B_2=\{$乙、丁二人共拿到 3 张 $A\}$，

$C=\{$玩牌者中有一家(两人)拿到 3 张 $A\}$。

问：(1) B_1，B_2 是否是互斥事件？(2) B_1，B_2 是否是独立事件？(3) 求概率 $P(C)$。

44. 当同时扔 $n(n\geqslant 2)$ 枚造得标准的硬币时，设至少 $n-1$ 个出反面的事件为 A，至少 1 个出正面但不全部出正面的事件为 B，A 且 B 的事件记为 $A\cap B$。

(1) 试求 $P(A)$、$P(B)$，$P(A\cap B)$；

(2) 若 A 同 B 独立，试求自然数 n。

45. 设某一正四面体的四个顶点为 A、B、C、D，有一个棋子，根据骰子的点数按如下规定在各顶点间移动：各顶点分别从 1 至 6 中选定一个各不相同的点数，掷骰子后根据骰子所出的点数将棋子移到与该点数相对应的顶点上，当

骰子没出能移动棋子的点数时，则棋子在原处不动。

(1) 位于顶点 A 的棋子掷 3 次骰子后处在顶点 B 的位置的概率是多少？

(2) 位于顶点 A 的棋子掷 4 次骰子后第一次移动至顶点 B 的概率是多少？

46. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$。

47. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n}\right]$。

48. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$。

49. 已知数列$\dfrac{1}{1\cdot3}$，$\dfrac{1}{2\cdot4}$，$\dfrac{1}{3\cdot5}$，…，$\dfrac{1}{n(n+2)}$，…，

(1) 求它的前 n 项和 S_n；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$；

(3) 设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。对任给 $\varepsilon>0$，求自然数 N，使得 $n>N$ 时，$|S_n-A|<\varepsilon$。

50. 在数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中，$3a_1=2a+b$，$3b_1=a+2b$，且对自然数 $n\geq2$ 有 $3a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$，$3b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$。

(1) 求通项 a_n 与 b_n；

(2) 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

51. $\{z_n\}$是首项为 48，公比为$\dfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}i)$的等比数列。

(1) 求 z_4 和 z_{13}；

(2) 将这个数列中的实数项不改变原来顺序从首项开始排成 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，试求 a_4；

(3) 求无穷数列 $\{a_n\}$ 的和。

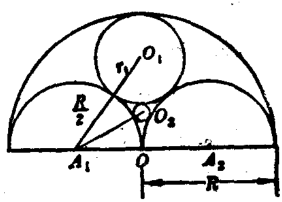
52. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=b(b\neq0)$，它的前 n 项和 $S_n=a_1+\cdots+a_n(n\geqslant1)$，并且 S_1，S_2，…，S_n 是一个等比数列，其公比为 $p(p\neq0$，且 $|p|<1)$。

(1) 证明：a_2，a_3，…，a_n 是一个等比数列；

(2) 设 $\omega_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kS_k$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n$（用 b，p 表示）。

53. 已知数列 $\{a_n\}$ 中有 $a_n\sin\alpha+a_{n+1}\cos\alpha=1$，其中 $a_1=a$，$a_2=b$，且 $a\neq b$，$0<|\alpha|<\dfrac{\pi}{4}$，$n\in N$。求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\sec\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}$。

54. 如图示，设半圆 O 的半径为 R，半圆 A_1、A_2 的半径 $A_1O=A_2O=\dfrac{R}{2}$，作 $\odot O_1$ 与半圆 O 内切并与 $\odot A_1$、$\odot A_2$ 外切，再作 $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$、$\odot A_1$、$\odot A_2$ 外切，……如此无限作下去，得到一串 $\odot O_1$，$\odot O_2$，…，半径分别为 r_1，r_2，…。



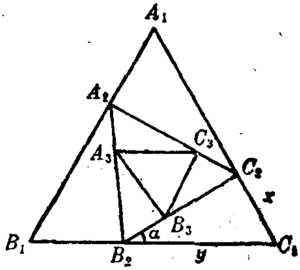
（54题）

求：(1) $S_n=r_1+r_2+\cdots+r_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

55. 如图示，$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$，…都是等

边三角形，而且$\angle C_2B_2C_1 = \angle C_3B_3C_2 = \angle C_4B_4C_3 = \cdots = \alpha(0° < \alpha < 60°)$。依次设$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$，…的边长分别为$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，面积分别为$S_1$，$S_2$，$S_3$，…。



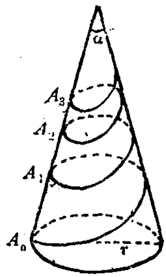
（55题）

(1) 求a_{n+1}和a_n的关系；

(2) 若$a_1 = m$，用m表示$S = \lim\limits_{n\to\infty}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$；

(3) 若$S = 2S_1$，求角α的值。

56．已知底面半径为r的圆锥的轴截面的顶角为$\arccos\dfrac{71}{72}$。一根绳子由A_0用最短的距离绕圆锥的面一周至A_1，再由A_1用最短距离绕圆锥一周至A_2，……如此无限继续下去。求所有绳子的长度总和。



（56题）

57．A是以BC为直径的半圆周上任意一点，$BC = 3$。将BC n等分，令其分点依次为P_1，P_2，…，P_{n-1}，$P_n(P_n \equiv C)$。令$\angle ABC = \theta$，$S_n = \dfrac{1}{n}(AP_1^2 + AP_2^2 + \cdots + AP_n^2)$。证明：不论$\theta$如何变化，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$之值不变，并求其值。

58．等腰$Rt\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$P_0 = A$，P_1为BA的中点，P_{2k}为AP_{2k-1}的中点，P_{2k+1}为BP_{2k}的中点$(k = 1, 2, \cdots)$。

证明：点列 $\{P_{2k}\}$ 和 $\{P_{2k+1}\}$ 收敛于两点，此两点将斜边三等分。

59. 在直角坐标平面 XOY 中两个定点 $A(a, b)$、$B(c, d)$，两个点列 P_1，P_2，…，P_n，…和 Q_1，Q_2，…，Q_n…，定义如下：P_1 为线段 OB 的中点，Q_1 为线段 P_1A 的中点，P_2 为线段 OQ_1 的中点，Q_2 为线段 P_2A 的中点，……P_n 为线段 OQ_{n-1} 的中点，Q_n 为线段 P_nA 的中点。

(1) 设 P_n 坐标为 (x_n, y_n)，Q_n 坐标为 (u_n, v_n)，求证数列 $\left\{x_n-\frac{a}{3}\right\}$ 与数列 $\left\{y_n-\frac{b}{3}\right\}$ 都是等比数列；

(2) 当 n 趋向无穷大时，求点 P_n 的极限位置。

60. 设点 A_1 为曲线 $xy=1(x>0, y>0)$ 与直线 $y=x$ 的交点，过 A_1 作直线 $y=x$ 的垂线交 x 轴于 B_1，过 B_1 作与直线 $y=x$ 平行的直线交曲线于 A_2，再过 A_2 作直线 B_1A_2 的垂线交 x 轴于 B_2，如此继续下去，得点列 B_1，B_2，…，B_n，…。试求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{B_nB_{n+1}}{B_{n-1}B_n}$。

61. 已知正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 在正方形 $ABCD$ 内，A_2，B_2，C_2，D_2 分别是 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 的中点，求证：$A_2B_2C_2D_2$ 是正方形。

62. 已知一个矩形 $ABCD$ 的对角线的长为 l，对角线与 BC 的夹角为 α。以 AB 为高把这个矩形卷成圆柱的侧面，或以 AD 为高卷成正四棱柱的侧面，试比较这两个柱体的体积的大小。

63. 三棱锥各侧面与底面成 45° 角。底面三角形各角成等差数

列，而最大边和最小边的长是方程 $2x^2-27x+32=0$ 的根。求此三棱锥的侧面积和体积。

64. 设 a、b 是两个实数，$A=\{(x,y)|x=n,\ y=na+b,\ n\in Z\}$，$B=\{(x,\ y)|x=m,\ y=3m^2+15,\ m\in Z\}$，$C=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 XOY 内的点的集合，讨论是否存在 a 和 b 使得：(1) $A\cap B\neq\varnothing$；(2) $(a,b)\in C$同时成立。

65. 已知集合 $D_a=\{(x,\ y)|x^2+2ax+y^2+2(a-2)y+2>0\}$，

(1) 当 a 为小于 1 的某一常数时，用图表示 D_a；

(2) 当 a 在区间$(-\infty,\ 1)$内变化时，用图表示同时属于一切 D_a 的元素所组成的集合。

66. 函数 $y=\log_a x(a>1,\ x>1)$的图象上有 A、B、C 三点，它们的横坐标分别为 m，$m+2$，$m+4(m>1)$。

(1) 设$\triangle ABC$ 的面积为 S，求 $S=f(m)$；

(2) 判定 $S=f(m)$的增减性；

(3) 求 $S=f(m)$的值域。

67. 设函数 $f(x)=\log_3\left(x^2-4mx+4m^2+m+\dfrac{1}{m-1}\right)$，其中 m 是实数，又 $M=\{m|m>1\}$。

(1) 求证：当 $m\in M$ 时 $f(x)$对所有的实数 x 都有意义。反之，如果 $f(x)$对所有实数 x 都有意义，则 $m\in M$；

(2) 当 $m\in M$ 时，求函数 $f(x)$的最小值；

(3) 求证：对每一个 $m\in M$，函数 $f(x)$的最小值都不小于 1。

68. 设函数 $\varphi(x)=\dfrac{x^2+2ax+b}{x^2+1}$，其中 $a\neq0$，a、$b\in R$，试

证明：

(1) 存在两个实数 m_1，$m_2(m_1<m_2)$，满足等式

$$\varphi(x)-m_k=\frac{[(1-m_k)x+a]^2}{(1-m_k)(x^2+1)},\ k=1,\ 2;$$

(2) $(1-m_1)(1-m_2)=-a^2$；

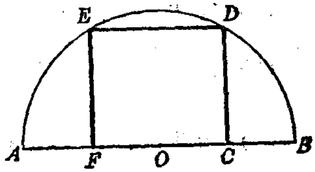
(3) $m_1\leqslant\varphi(x)\leqslant m_2$。

69. 设 $f(x)=x^2-x+k$，若 $\log_2 f(a)=2$，$f(\log_2 a)=k$ $(a\neq1)$。

(1) 求 $f(\log_2 x)$的最小值及对应的 x 值；

(2) x 为何值时，$f(\log_2 x)>f(1)$ 且 $\log_2 f(x)<f(1)$。

70. 已知以 AB 为直径的半圆有一个内接正方形 $CDEF$，其边长为 1。设 $AC=a$，$BC=b$，作数列



（70题）

$$u_1=a-b,$$
$$u_2=a^2-ab+b^2,$$
$$u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots+(-1)^kb^k,$$
$$\cdots\cdots$$

求证：$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\quad(n\geqslant3)$。

71. 已知数列 a_1，a_2，…，a_n…的任何相邻两项 a_n，a_{n+1} 都是方程：

$$x^2-c_nx+\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$$