中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数学

第三册

财经类中专数学教材编写组编

高等教育出版社

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数　　学

第　三　册

财经类中专数学教材编写组

高等教育出版社

本书是根据国家教委1987年审定的财经类专业通用《中等专业学校数学教学大纲》编写的．全书共分四册．第三册内容为微积分．

本书由全国中专数学课程组组织审阅，并定为招收初中毕业生的中等专业学校财经类各专业的试用教材．招收高中生的中等专业学校财经类各专业也可选用．

中等专业学校试用教材
财经类专业通用

数　学

第 三 册

财经类中专数学教材编写组编

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 8.375　字数 172,000
1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷
印数 0001—90,730

ISBN 7-04-000913-7/O·349

定价 1.20元

序　言

本教材是根据 1987 年国家教育委员会审定的财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》编写的.

本教材共分四册

第一册　集合、函数、三角;

第二册　*立体几何、解析几何、排列组合与二项式定理、数列;

第三册　微积分;

第四册　矩阵及其应用(*投入产出、*线性规划)、概率论与*数理统计初步.

本教材可供招收初中毕业生财经类各专业试用,第三、四册也可供招收高中毕业生财经类各专业选用,带*的内容可供选学.

本教材是由国家教育委员会组织的财经类中等专业学校数学教材编写组编写的. 编写组由南京铁路运输学校沈清任主编,上海银行学校姚叠叁、北京供销学校贝虹任协编,其中第一、二册初稿由贝虹编写,第三册初稿由姚叠叁编写,第四册初稿由沈清编写.

本教材由全国中专数学课程组组织审稿,参加第三册审稿会的有任必,秦柏前、邵玉书、胡伯权、张又昌、侯昭群、谈兴华.

在编写过程中,曾得到有关单位的大力支持和协助,谨

在此表示衷心的感谢.

由于编者的水平所限，加以编写时间仓促，难免有错误和不当之处，恳切期望广大读者批评指正，以便今后进一步修订改进.

财经类中专数学教材编写组

一九八七年五月

目　　录

第十二章　极限与连续

极限是微积分学中一个重要的基本概念，本章将在复习和加深函数概念的基础上描述极限的意义，讨论有关的性质与运算法则.

对于函数的连续性，只作比较直观的介绍.

§12-1　函　　数

一　函数的概念

有许多变量在某一确定的问题中存在相互联系、相互制约的关系.

例如，某地区薄板钢材第一年到第八年的消费方程为

$$y=150+40x,$$

其中 y 表示消费量(单位：千吨)，x 表示时序数(即第几年). 这个方程给出了两个变量 y 和 x 之间的关系：当 x 取 $[1, 8]$ 上任何一个自然数时，都有唯一确定的 y 与它对应. 如

$x=2$ 时，$y=230$(即第二年消费量为 230 千吨)；

$x=5$ 时，$y=350$(即第五年消费量为 350 千吨).

又如某运输公司规定每吨货物的运费，当运输里程不超过 100 公里时，每公里运费 0.5 元；若超过 100 公里，其超过部分，每公里运费 0.4 元. 如果用 y 表示每吨货物的运费(单位：元)，x 表示运输里程(单位：公里)，则表示每吨货物的运价方程为

$$y=\begin{cases}0.5x, & (0\leqslant x\leqslant 100);\\ 50+0.4(x-100), & (x>100),\end{cases}$$

这个方程给出了变量 y 和 x 之间的关系：当 x 取任何非负实数时，都有唯一确定的 y 与它对应．如

$$x=53.25\text{ 时，}\ y=26.625;$$

$$x=153.72\text{ 时，}\ y=71.488.$$

定义　在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，若对于变量 x 的允许值集合中的每一个值，按照一定的对应关系，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，则把 x 叫做**自变量**，把 y 叫做自变量 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),$$

自变量 x 的允许值的集合叫做函数的**定义域**，函数 y 与它相对应的值的集合叫做函数的**值域**．

前面所举的两个例子中，y 都是 x 的函数．对于薄板钢材的消费方程，函数的对应关系是 $y=150+40x$，定义域是 $\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$．对于每吨货物的运价方程，函数的对应关系是

$$y=\begin{cases}0.5x, & (0\leqslant x\leqslant 100);\\ 50+0.4(x-100), & (x>100),\end{cases}$$

定义域是 $\{x|x\geqslant 0\}$．

有时变量 x 在一定的范围内变化时，y 的值保持不变，根据函数的定义，y 仍是 x 的函数，一般地写成

$$y=C\ (C\text{ 是常数}).$$

前面学过，函数的对应关系通常可用三种方法（表格法、解析法和图象法）来描述，这三种方法在财经工作中都有广泛

的用途.

例如，价目表、利息表和许多会计报表，都是利用表格将函数的对应关系简明地反映出来. 下面是某基层商店向中心店汇报上旬营业情况的旬报表:

日　　期	销　售　金　额　（元）
1	4156.28
2	4726.19
⋮	⋮
10	6112.06

这个表格就是用**表格法**表示函数关系的例子.

用**解析法**表示两个经济量之间的函数关系，便于利用相应的数学方法进行研究，可以比较全面地反映出函数的对应关系. 这种函数解析式，在经济学中也叫做**经济方程**. 例如，某地箱版纸在最近 14 年的销售规律

$$y=9e^{0.1x}$$

就是一种经济方程，其中 y 是销售量(单位：万吨)，x 是时序数. 通过这个方程就可以对箱版纸的销售情况有比较全面的了解，也便于对它作出定量分析.

图象法具有比较直观的特点. 财经工作中常常通过经济函数的解析式或直接根据观测所得的数据绘成图象. 下面的例子是某化工产品的产量(y)与原料投放量(x)之间的函数关系的图象(图 12-1). 通过这个图象，容易看出这种产品的产量与原料投放量之间的函数关系的概况.

二　函数的定义域

求函数的定义域的一般方法是求出使解析式有意义的所

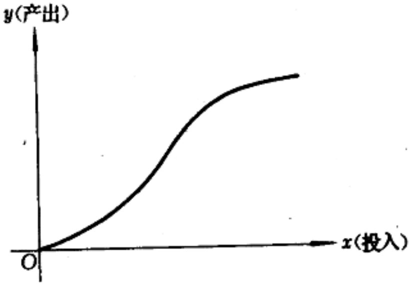

图 12-1

有自变量 x 的允许值的集合. 而在实际问题中，则还要结合问题的具体意义进行讨论.

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$;

(2) $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}$;

(3) $y=\ln(2-\ln x)$.

解 (1) 在 $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$ 中，因为要求分母

$$x^2+2x-3\neq 0,$$

即

$$x\neq -3 \text{ 且 } x\neq 1,$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$ 的定义域是

$$(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 1)\cup(1,\ +\infty).$$

(2) 在 $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}$ 中,因为要求被开方数 $\dfrac{x-5}{x+7}\geqslant 0$,

解此不等式，得

$$x<-7 \text{ 或 } x\geqslant 5,$$

所以函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}$ 的定义域是

$$(-\infty,\ -7)\cup[5,\ +\infty).$$

(3) 在 $y=\ln(2-\ln x)$中，作为对数$\ln(2-\ln x)$的真数，必须 $2-\ln x>0$；同时，作为对数 $\ln x$ 的真数必须 $x>0$，解不等式组

$$\begin{cases}2-\ln x>0,\\ x>0,\end{cases}$$

得 $$0<x<e^2,$$

所以函数 $y=\ln(2-\ln x)$的定义域是

$$(0,\ e^2).$$

例 2 某地箱板纸在 14 年中的销售量 y(单位：万吨)是时序数 x 的函数

$$y=9e^{0.1x},$$

试求它的定义域.

解 指数函数 $y=9e^{0.1x}$ 的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$，根据这个问题的具体意义，它的定义域应该缩小为

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 14\}.$$

函数的定义域是确定函数的一个重要因素，只有两个函数的解析式相同并且定义域相同时，两个函数才等同.

三 建立函数关系的例题

例 3 某工厂生产人造宝石，年产量为 x 公斤，其固定成本为 312 万元，每生产 1 公斤人造宝石，可变成本均匀地增加 50 元，试将总成本 $C_{总}$ 和平均单位(公斤)成本 $C_{均}$表示成产量 x 的函数.

解 由于总成本＝固定成本＋可变成本，平均成本＝总成本÷产量，所以

$$C_{总}=3120000+50x\ (元);$$

$$C_{均}=\frac{3120000+50x}{x}$$

$$=\frac{3120000}{x}+50\ (元).$$

例4 某药厂生产某种药品，年产量 x 万瓶，每瓶售价2元. 根据历史资料，该厂每年自销量稳定在50万瓶，如果委托代销，销售量可上升20%，但销售量达60万瓶时即呈饱和状态. 如果代销费为代销部分药价的40%，试将总收入 R(单位：万元)表示成年产量 x(单位：万瓶)的函数.

解 如果该厂产量不超过50万瓶时，生产的产品可以全部自销售出，这时

$$R=R(x)=2x\ (万元).$$

如果该厂产量超过50万瓶而不超过60万瓶时，通过委托代销，也能全部售出，但此时需支付代销费 $2\times40\%\times(x-50)$ 万元，这时

$$R=R(x)=2x-2\times40\%\times(x-50)$$
$$=1.2x+40\ (万元).$$

如果该厂产量超过60万瓶时，即使委托代销，也只能售出60万瓶，这时

$$R=R(x)=1.2\times60+40$$
$$=112\ (万元).$$

综上所述，得到总收入 R 与年产量 x 的函数解析式

$$R=R(x)=\begin{cases}2x, & (0\leqslant x\leqslant 50);\\ 1.2x+40, & (50<x\leqslant 60);\\ 112, & (x>60).\end{cases}$$

在财经工作中，有许多变量间的关系不能精确地用函数解析式表示，而是根据观测所得的数据（简称观测数据），用归纳或其他方法，得到近似描述它们间依从关系的公式．一般把这种公式叫做**经验公式**（有的地方叫做**数学模式**）．建立经验公式的方法很多，下面的例子所介绍的是一种比较简单的方法．

例 5 全国有十二家工厂生产某种无机颜料，近十年的总产量如下表所列（单位：千吨）：

时序数(x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
总产量(y)	41	45	48	51	56	58	60	63	69	70

试建立产量和时序数之间的经验公式．

解 假设以时序数为 x，产量为 y（单位：千吨），根据

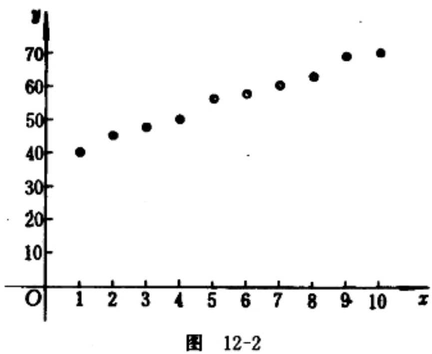

图 12-2

上表所给出的数据在直角坐标系中作出图形(图 12-2). 这图形是一群散点,它们的位置近似地在一条直线上, 也就是说,产量 y 可以大致看成是时序数 x 的一次函数, 设这个函数的解析式是

$$y=kx+b.$$

为了能比较准确地找出系数 k 和 b 的值, 我们按照时序数的奇偶分成两组, 分别代入 $y=kx+b$ 得:

$$\begin{aligned} &41=k+b, && 45=2k+b, \\ &48=3k+b, && 51=4k+b, \\ &56=5k+b, && 58=6k+b, \\ &60=7k+b, && 63=8k+b, \\ &69=9k+b, && 70=10k+b, \end{aligned}$$

把左、右两列分别相加, 得到两个关于 k 和 b 的二元一次方程, 将它们联立得

$$\begin{cases} 274=25k+5b, \\ 287=30k+5b, \end{cases}$$

解此方程组, 得

$$k=2.6, \quad b=41.8.$$

这样, 就近似地得到总产量和时序数之间的关系式是

$$y=2.6x+41.8.$$

这就是一个经验公式. 这种建立经验公式的方法叫做平均值法.

四 函数的四个主要性质

(1) 函数的奇偶性

定义 给定函数 $y=f(x)$, 在函数的定义域中, 如果

$$f(-x)=f(x),$$

则 $y=f(x)$叫做**偶函数**；

如果 $$f(-x)=-f(x),$$

则 $y=f(x)$ 叫做**奇函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$内，由于

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数. 函数 $\varphi(x)=x^3$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内，由于 $\varphi(-x)=(-x)^3=-x^3=-\varphi(x)$，所以函数 $\varphi(x)=x^3$ 是奇函数.

对于偶函数，因为在 x 和 $-x$ 处对应的函数值是相等的，所以图形关于 y 轴对称. 见图 12-3.

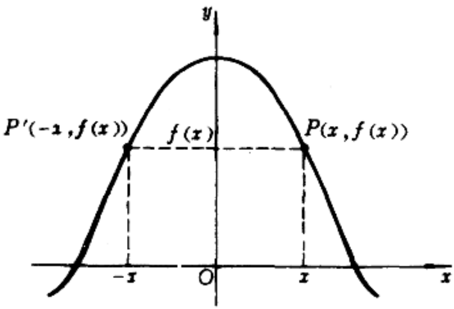

图 12-3

对于奇函数，因为在 x 和 $-x$ 处对应的函数值绝对值相等，符号相反，所以图形关于原点对称. 见图 12-4.

不满足偶函数和奇函数定义的函数，它们既不是偶函数也不是奇函数，把这种函数叫做非奇非偶函数. 函数

$$y=x^2+x+1, \quad y=e^x$$

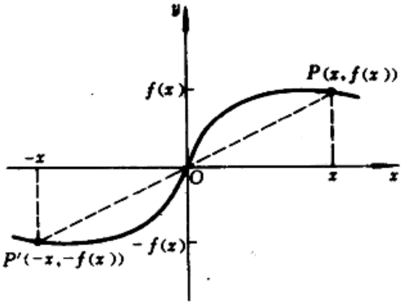

图 12-4

等都是非奇非偶函数，它们的图象关于 y 轴和原点都不对称。

(2) 函数的增减性

定义 给定函数 $y=f(x)$，(a, b)是函数定义域内的某一区间，对于区间(a, b)内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

如果 $f(x_1)<f(x_2)$，则说 $f(x)$在区间(a, b)内是单调递增的；

如果 $f(x_1)>f(x_2)$，则说 $f(x)$在区间(a, b)内是单调递减的。

单调递增的函数，它的图象自左至右渐渐上升（见图 12-5）；单调递减的函数，它的图象自左至右渐渐下降（见图 12-6）。

例 6 求证 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty, 0)$内是单调递减的，在区间$(0, +\infty)$内是单调递增的。

证 在$(-\infty, 0)$内任取两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，这时