

非线性 渗流力学

同登科 陈钦雷 廖新维 张同义 著

石油工业出版社

非线性渗流力学

同登科 陈钦雷 廖新维 张同义著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书介绍了考虑二次梯度项的单一介质、分形介质和双重介质的数学描述,分别论述了应用积分变换和 Fourier 级数方法进行的解析分析。探讨了变形地层单一介质、分形介质和双重介质的数学模型,应用正则摄动法及 Weber 变换、Hankel 变换和正交变换进行了瞬态分析。对考虑交叉项的广义双重介质模型进行了研究。最后介绍了分数维流动理论。

本书可供石油、采矿、岩土工程、环境工程等领域的科研、教学人员及研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性渗流力学/同登科等著.
北京:石油工业出版社,2003.9
ISBN 7-5021-4082-4

I. 非…

II. 同…

III. 非线性力学:渗流力学

IV. 0357.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 106836 号

石油工业出版社出版
(100011 北京安定门外安华里二区一号楼)

石油工业出版社印刷厂排版印刷

新华书店北京发行所发行

*

787×1092 毫米 16 开本 12.25 印张 313 千字 印 1—1500

2003 年 9 月北京第 1 版 2003 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5021-4082-4/TE·2918

定价:40.00 元

序 言

渗流力学是研究流体在多孔介质中的流动规律及其应用的一门学科，是石油、天然气、煤层气、地下水和各种地下化学流体资源能源等的勘探和开采工程，土壤改良和水工建筑等水利水力工程，地下水污染、地面沉降和海水入侵等的防治工程以及地震预报和生物医学工程等方面的一项重要理论基础和工程设计、预测预报及动态分析控制等的重要方法。长期以来，国内外学者对渗流力学理论和应用进行了卓有成效的研究和分析，解决了大量的生产实际问题，推动了生产力的发展。随着科学技术和生产的发展，许多领域出现了更为复杂的非线性渗流问题，诸如应力敏感地层的压力分布和具有分形结构的地层压力分布问题以及水文地质、油气藏工程与废液处理工程中的生产井和注入井附近渗流方程，因存在二次梯度项而导致的非线性问题。用传统的渗流力学方法求解这类偏微分方程时，从前多是假设压缩系数很小或者忽略二次梯度项，以便对非线性方程进行线性化处理，其结果可能会引起较大误差。因此，迫切需要加强发展非线性渗流理论，以便更有效地研究解决这些复杂的渗流问题。

同登科博士和他的老师陈钦雷教授及其同事廖新维副教授、张同义博士所撰写的这部专著，正是对这些问题的有益探索。

在本书中作者研究了考虑二次梯度项时单一介质、双重介质和分形介质中渗流问题的数学描述，分别论述了应用积分变换和 Fourier 级数方法进行的解析分析，给出了变形单重介质、变形双重介质和变形分形介质的渗流数学模型，应用正则摄动法和 Weber 变换、Hankel 变换以及正交变换法进行了瞬态压力分析。还对考虑了交叉项的广义双重介质模型进行了研究，给出了详细的数学推导。最后，介绍了分数维流动理论。

本书中，除第一章和最后一章部分内容曾公开发表外，其余九章的内容都是首次公开发表。这些新的成果拓展了渗流力学研究领域，丰富了非线性渗流的研究内容。作者所使用的多种数学方法和数学技巧为进一步开展复杂非线性渗流问题的研究开辟了有益的途径。

为了更紧密地结合生产应用并推动生产力的发展，祝愿渗流力学更加繁荣，有更多具有创新意义和实用价值的著作问世。

祝贺这本专著由石油工业出版社出版发行。



2003 年 5 月 1 日

作者的话

随着工农业生产的发展,非线性渗流力学越来越引起人们的关注和兴趣,特别是在油气开发和水文地质等相关学科的专业领域中,非线性渗流力学已成为分析研究和解决深层次生产实际问题的基础和手段。

大家知道,以往油藏试井分析所依据的渗流力学方程与物质平衡方程都是不一致的,在非线性偏微分方程中根据弱可压缩液体的假设忽略了二次梯度项,对于混气石油和低渗透储层这种假设是有疑问的。我们也已知道试井在较长时间忽略二次梯度项将产生误差。本专著首先对于单、双重介质,分形介质流动系统建立了与物质平衡方程一致的方法,保留了非线性偏微分方程中所有项,建立了多种流动模型,并用解析方法和数值方法进行了求解,为进行更精确的试井分析提供了新的数学模型。

传统的渗流力学都是假设地层是均质的,而且地层渗透率是常数,它不随压力发生变化,这样的假设在许多情况下可获得很好的结果。但是多孔介质不可能总是刚性的和不变形的,而是在某些情况下,岩石和流体特性是依赖于压力或应力敏感的。这在一些碳酸盐岩的纯裂缝地层、致密性油藏中表现的尤为明显。在这些储层中,随着地下原油开采量的增加,常渗透率的假定已不再合适,原因是在致密油藏中,随着孔隙压力的减小,将会导致岩石有效应力的增加,因而孔隙尺寸将会减小以维持平衡,结果会导致渗流阻力的增加。本专著系统地研究了变形单重介质、双重介质和分形介质渗流理论。建立了变形介质渗流理论体系及相应的数学模型,并完成了模型的求解和分析,这对于中后期油气田开发和提高油田采收率具有重要的指导意义。

本专著同时还考虑了交叉储积系数和二次梯度项,分别研究了广义双重介质模型和非线性双重介质模型,并用解析方法和数值方法进行了求解,为裂缝油藏开采提供了新的模型和方法。

本专著的研究内容是在国家教育部“高等学校骨干教师资助计划”项目“油藏开发中的非线性流动问题的理论及其应用研究”的资助下进行的。

由于研究工作刚刚开始,加上作者水平有限,不足之处在所难免,请读者指正。

作者
2003年4月

目 录

第 1 章 考虑二次梯度项影响的单相微可压缩液体的微分方程·····	(1)
1.1 守恒原理、流动规律和流体压缩率 ·····	(1)
1.2 多孔介质单相流动的微分方程 ·····	(3)
第 2 章 考虑二次梯度项影响的径向流动系统的不稳定渗流理论·····	(7)
2.1 无限大地层圆柱面源井的压力分布解及动态特征 ·····	(8)
2.2 有界封闭圆形油藏的解析解及其动态分析 ·····	(12)
2.3 有界定压圆形油藏的解析解 ·····	(14)
2.4 无限大地层定压生产压力分布解及动态特征 ·····	(16)
2.5 有界封闭地层定压生产压力分布解 ·····	(18)
2.6 有界定压地层定压生产压力分布解 ·····	(20)
第 3 章 具有二次梯度项影响的球向流动的压力分布的精确解及其动态特征·····	(23)
3.1 数学模型及其无限大地层的解析解 ·····	(23)
3.2 有界封闭地层问题 ·····	(27)
3.3 有界定压地层问题 ·····	(30)
3.4 压力动态特征 ·····	(34)
第 4 章 考虑二次梯度项影响的单相液体在分形介质中的流动理论·····	(36)
4.1 无限大地层分形介质非线性流动模型 ·····	(36)
4.2 有界封闭地层 ·····	(46)
4.3 有界定压地层 ·····	(53)
第 5 章 非线性双重介质模型的精确解及动态特征·····	(58)
5.1 无限大地层非线性双重介质模型 ·····	(59)
5.2 有界封闭地层的非线性双重介质模型 ·····	(65)
5.3 有界定压地层 ·····	(69)
第 6 章 考虑二次梯度项影响的双重介质模型·····	(74)
6.1 双重介质中渗流的微分方程 ·····	(74)
6.2 双孔介质中的渗流 ·····	(75)
6.3 双渗透介质中的渗流 ·····	(93)
第 7 章 变形介质单相液体径向流动理论·····	(97)
7.1 变形介质无限大地层定产生产线源解 ·····	(97)
7.2 变形介质压力动态分析 ·····	(104)
第 8 章 变形分形介质中的单相液体流动理论·····	(108)
8.1 流动方程 ·····	(108)
8.2 变形分形介质线源解 ·····	(109)
8.3 变形分形介质无限大地层的流动问题 ·····	(114)
8.4 变形分形介质有界油藏渗流问题 ·····	(119)

8.5 变形分形介质井筒储集系数及表皮效应	(126)
第 9 章 变形双重介质中单相液体流动理论	(128)
9.1 变形双重介质双孔流动模型	(129)
9.2 应力敏感地层双重介质分形油藏流动理论	(133)
9.3 一类双重介质分形油藏正则摄动解及流动分析	(140)
第 10 章 考虑交叉储积系数影响的双重介质模型	(148)
10.1 数学模型	(148)
10.2 具有交叉系数的拟稳态双孔模型	(149)
10.3 具有交叉储积系数的双重介质模型	(154)
10.4 具有交叉储积系数的双渗模型	(162)
第 11 章 分数维流动模型	(171)
11.1 具有分形裂缝几何的裂缝介质中的流动	(171)
11.2 广义径向流动模型	(174)
11.3 双重介质广义径向流动模型	(180)
附录 1 主要符号说明	(188)
附录 2 单位换算表	(190)

第 1 章 考虑二次梯度项影响的单相微 可压缩液体的微分方程

描述流体通过孔隙介质而流动的偏微分方程，都是从质量守恒原理、达西定律和状态方程出发推导出来的。通过对微分方程及其有关的解进行研究，就能更好地理解不稳定渗流理论。

1.1 守恒原理、流动规律和流体压缩率

1.1.1 控制体积

控制体积是对应用质量守恒原理（或其他守恒原理）所关心的区域。形式上，它可以定义为空间的一个区域，这个区域可以存储物质、能量或动量。物质，能量和动量可以跨过区域的边界流动，并且可以受到外力的作用。这个体积在空间中可以被移动或固定，因此控制体积可以赋予某种坐标系统。

1.1.2 质量守恒原理

我们定义在存储中质量变化的再生率是零，流出量用负号，流入量用正号表示。质量守恒原理应用到如图 1.1 所示的控制体积时，可以表示为：

$$\text{物质的再生率} = 0 \quad (1.1)$$

如图 1.1，如果 v 是控制曲面的法向相对速度，那么流过曲面的总的质量流量 G 是 ρv 。其中 ρ 是流体密度。

方程 (1.1) 的物理解释就是某个物理量是守恒的，它既不产生也不消失。流体在孔隙介质中流动，最重要的守恒量就是质量守恒，这种守恒（适用于任一区域）简单地说，即：流

体质量流入的总和，减去流体质量流出的总和，加上由源和汇导入的流体净质量的总和，等于该区域流体的增量。



图 1.1 质量守恒原理在控制体积上的应用

1.1.3 流过孔隙介质的达西定律

类似于其他流动规律，像傅里叶热传导定律和电流欧姆定律，流过多孔介质的达西定律指出：孔隙介质内任一点单位横截面上的体积流量与该点沿流动方向的势能梯度成正比。其数学表达式为：

$$u = - \frac{K\rho}{\mu} \nabla \Phi \quad (1.2)$$

式中 K 是介质渗透率， μ 是流体粘度， Φ 是流动势或单位体积的机械能。方程中的负号表示流体向势能减小的方向流动。考虑转换单位质量的液体在标准状态从静止到液体在孔隙介质中的流动状态所做的功可以导出势能的表达式。从一般势能考虑我们可以证明在高度为 z 的流动势是：

$$\Phi = \int_{p'}^p \bar{v} dp_1 + gz + \frac{\bar{u}^2}{2} \quad (1.3)$$

$\bar{v}$ 是特殊的流体体积, z 是基准面以上的点的高度, p 是点 z 的压力, p' 是基准面上的压力, $\bar{u}$ 是点 z 的平均微观速度。方程 (1.3) 右边第三项表示流体的动能。由于固体岩块大的表面区通常忽略 $\bar{u}$, 因此粘性力一般控制着流体的运动。

对于不可压缩流体, 有:

$$\Phi = \bar{v}(p - p') + gz \quad (1.4)$$

1.1.4 Navier - Stokes 方程和达西定律

我们注意到不可压缩液体的流动, Navier - Stokes 方程可写为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla\Phi + \mu\nabla^2 u \quad (1.5)$$

式中 u 是微观流速, t 是时间, μ 是动力粘度。流动势定义为:

$$\Phi = \frac{p}{\rho} + \Omega \quad (1.6)$$

这里 Ω 是外力或体积力势。 $\nabla\Phi$ 这一项与达西定律中的有所不同, 不是表示光滑的势梯度, 而是随着点变化的向量函数。

方程 (1.5) 中的惯性项恒为零, 即:

$$(u \cdot \nabla)u \equiv 0 \quad (1.7)$$

则方程 (1.5) 就简化为线性形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\Phi + \mu\nabla^2 u \quad (1.8)$$

关于多孔介质流动, 有趣的是条件线性流动, 一般地惯性项是非零的, 但与方程 (1.5) 右边的项相比较小的可以忽略不计。假设雷诺数足够小, 流动将是条件线性流动。条件线性稳态流动通常称为 Stokes 流动, 满足下面方程:

$$\mu\nabla^2 u = \nabla\Phi \quad (1.9)$$

虽然关于多孔介质结构的详细情况是未知的, 对方程 (1.9) 在与个别孔隙相比大得多的体积上进行恰当的平均, Navier - Stokes 方程导致了多孔介质的流动。假定惯性项忽略, 流动直接与势差成比例。从统计意义上, 介质在平均体积标度 (达西标度) 上是均质的, 就得到方程 (1.2)。

1.1.5 状态方程和压缩率

考虑多孔介质中的等温流动, 对于常压缩率为 C 的液体, 状态方程为:

$$\rho = \rho_0 \exp[C(p - p_0)] \quad (1.10)$$

式中的下标 0 是参考基准条件。如果我们展开 $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + \dots$, 忽略高阶项, 那么方程 (1.10) 可以写为:

$$\rho \approx \rho_0[1 + C(p - p_0)] \quad (1.11)$$

方程 (1.10) 称为微可压缩液体的状态方程。

对于气体流动, 工程上的状态方程为:

$$pV = ZnRT \quad (1.12)$$

式中 Z 是压缩因子, V 是气体体积. n 是摩尔数, R 是真实气体常数. 气体的压缩率为:

$$C = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T \quad (1.13)$$

如果 $Z = 1$ (理想气体), 那么 $C = 1/p$, 对于压力和温度的某些条件 $(\partial Z / \partial p)_T \approx 0$, 在这个条件下 $C \approx 1/p$ 。

1.2 多孔介质单相流动的微分方程

在等温条件下当流体流过孔隙体时, 从守恒原理出发给出连续方程, 结合达西定律与状态方程可导出流过多孔介质压力分布的支配微分方程。

1.2.1 连续方程

考虑在孔隙度为 ϕ 的孔隙介质中单相流体的流动。在流动区内, 选择控制体积为平行六面体, 如图 1.2 (a) 所示, 沿 x, y 和 z 方向, 流进单元体的体积分量分别为 u_x, u_y 和 u_z 表示, 它们是单位横截面上的体积流量。在单元体上反映质量守恒原理的量为:

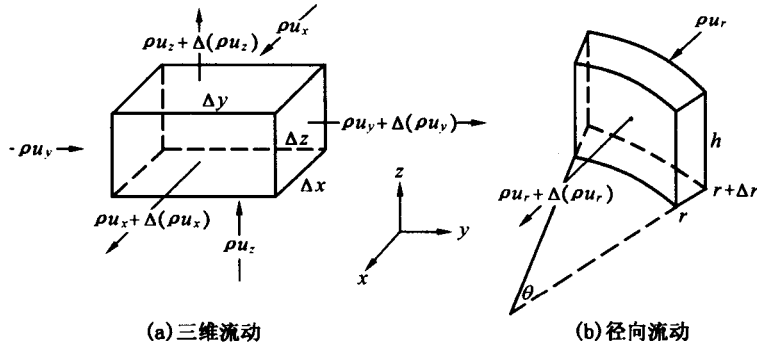


图 1.2 推导连续方程的体积单元

流出的流量 = $[\rho u_x + \Delta(\rho u_x)]\Delta y\Delta z + [\rho u_y + \Delta(\rho u_y)]\Delta x\Delta z + [\rho u_z + \Delta(\rho u_z)]\Delta y\Delta x$

流进的流量 = $(\rho u_x)\Delta y\Delta z + (\rho u_y)\Delta x\Delta z + (\rho u_z)\Delta y\Delta x$

单元体的净质量变化 = $\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$

由质量守恒原理得:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = 0 \quad (1.14)$$

此方程便是直角坐标系下, 流体在孔隙介质中流动的连续方程。

径向流动的连续方程亦可用类似的方法导出, 如果所取单元体为图 1.2 (b) 所示, 则质量平衡等式可写为:

$$-\{\theta(r + \Delta r)h(\rho u_r) - \theta rh[\rho u_r + \Delta(\rho u_r)]\} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho)\theta hr\Delta r$$

故:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) = 0 \quad (1.15)$$

方程 (1.15) 便是径向流动的连续方程。

1.2.2 单相液体的流动微分方程

利用连续方程，达西定律和状态方程可推得微分方程，忽略地心引力，达西定律为：

$$u = -\frac{K}{\mu} \nabla p \quad (1.16)$$

将方程 (1.16) 代入方程 (1.14) 得：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \quad (1.17)$$

利用压缩率的定义，并假设压缩率为常数，同时假定粘度为常数，由于 $\partial p / \partial x = 1/(\rho C) \partial \rho / \partial x$ ，方程 (1.17) 可写为：

$$\begin{aligned} & \left(K_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + C \left[K_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + K_z \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial K_z}{\partial z} \right) = \phi \mu C \frac{\partial p}{\partial t} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.18)$$

如果渗透率为常数且各向同性，同时孔隙度为常数，则上式可简化为：

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + C \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\phi \mu C}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.19)$$

对于径向流动，设粘度、压缩率为常数，可得：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{K_r} \frac{\partial K_r}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + C \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \frac{\phi \mu C}{K_r} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu}{K_r} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

如假设渗透率、孔隙度为常数，那么上式可变为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + C \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \frac{\phi \mu C}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.20)$$

生产井和注入井附近的压力分布对水文地质学、油藏工程和废液处理工程都是非常重要的。由于二次梯度项的存在，描述多孔介质微可压缩液体流动的压力分布的偏微分方程 (1.20) 是非线性的。这个非线性方程通过忽略非线性项可线性化，进而导致扩散方程。对于扩散方程的不同边值问题都能够求解，特别是在压力不稳定分析（油藏工程）和地下水力学。然而小的压力梯度的假设在某些操作期间（混气石油和低渗透储层）预测压力可能引起很大的误差。如水力压裂、大的压降流动、段塞测试、钻杆测试和大的压力脉冲测试，因此非线性扩散方程在不同情况下的解经线性化的影响的研究是重要的。

对于液体压缩系数小且为常数，岩石的孔隙度和渗透率随压力而变化，而粘度为常数，渗透率各向同性，忽略重力影响。则由方程 (1.18) 可得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + C \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial K}{\partial z} \right) = \frac{\phi \mu C}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu}{K} \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.21)$$

这个方程还可根据下式再作一些简化：

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{对 } y \text{ 和 } z \text{ 都与此类似})$$

及：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}$$

如果将方程 (1.21) 重新组合，可得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(C + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p} \right) \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{K} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial K}{\partial z} \right) = \frac{\phi \mu}{K} (C + C_f) \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.22)$$

式中 $C_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}$ ，孔隙度和渗透率随压力而变化。

如果为径向流动，则方程 (1.22) 变为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \left(C + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \frac{\phi \mu}{K} (C + C_f) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.23)$$

密度和粘度作为压力的函数，孔隙度和渗透率为常数。

我们引进一种新的变量 $m(p)$ ，定义为：

$$m(p) = \int_0^p \frac{\rho}{\mu} dp' \quad (1.24)$$

函数 $m(p)$ 是众所周知的石油工业中的拟压力函数，在热传导中首先是由 Kirchhoff 引入的，通常称为 Kirchhoff 变换。这个术语还被用到地下水力学文献中且称做岩块流动势。拟压力函数本质上是与它的流动梯度成比例的一种势，从方程 (1.24) 知有下面的关系式：

$$\frac{\partial m(p)}{\partial t} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial m(p)}{\partial x} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial m(p)}{\partial y} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{和} \quad \frac{\partial m(p)}{\partial z} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

因此方程 (1.17) 变为：

$$\frac{\partial^2 m(p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m(p)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m(p)}{\partial z^2} = \frac{\phi C \mu}{K} \frac{\partial m(p)}{\partial t} \quad (1.25)$$

当 C 和 μ 是压力的函数时，方程 (1.25) 是一个非线性方程。注意到甚至 μ 是常数，上式仍然能够使用。最有趣的是当使用拟压力函数时，二次梯度项自动被考虑。

1.2.3 单相气体流动

这里我们研究拟压力的特殊情况，利用工程上的密度状态方程：

$$\rho = \frac{pM}{ZRT}$$

结合质量守恒原理和达西定律，得：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\mu Z} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\mu Z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\mu Z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\phi}{K} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Z} \right) \quad (1.26)$$

对于径向流动，方程 (1.26) 可简化为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{p}{\mu Z} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi}{K} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Z} \right) \quad (1.27)$$

定义拟压力为：

$$m(p) = 2 \int_0^p \frac{p'}{\mu Z} dp' \quad (1.28)$$

由方程 (1.28) 我们可以证明将获得方程 (1.25)，此时气体的等温压缩率为：

$$C_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p}$$

对于径向流动，方程 (1.25) 可写为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial m}{\partial r} \right) = \frac{\phi C_g \mu}{K} \frac{\partial m}{\partial t} \quad (1.29)$$

Al - Hussainy 等人还证明了真实气体微分方程可写为：

$$\nabla^2 p^2 - \frac{\partial(\ln \mu Z)}{\partial p^2} \left[\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p^2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p^2}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\phi C_g \mu}{K} \frac{\partial p^2}{\partial t} \quad (1.30)$$

在引进拟压力之前，大多数气体流动解都是按照 p^2 表示的，注意到 μZ 是常数时， $m(p) = ap^2/2$ ，其中 $a = 1/(\mu Z)$ ，这就是方程 (1.28) 右边乘以 2 的原因。

对于径向流动，方程 (1.27) 可表示为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) - \frac{\partial(\ln \mu Z)}{\partial p^2} \left(\frac{\partial p^2}{\partial r} \right)^2 = \frac{\phi C_g \mu}{K} \frac{\partial p^2}{\partial t} \quad (1.31)$$

对于理想气体， μ 不依赖于压力， $Z = 1$ ， $C_g = \frac{1}{p}$ ，此时有：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) = \frac{\phi C_g \mu}{K} \frac{\partial p^2}{\partial t} \quad (1.32)$$

参 考 文 献

- [1] Mattheus C., Russel D.. Pressure Buildup and Flow Tests in Wells. Monograph, Series Vol. 1. Society of Petroleum Engineers, New York, Dallas., 1967
- [2] Raghavan R.. Well Test Analysis. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1993

第 2 章 考虑二次梯度项影响的径向 流动系统的不稳定渗流理论

推导第 1 章的方程 (1.20) 用到的假设如下：(1) 产层厚度全部打开，流体径向流入井内（或从井眼将流体注入地层）；(2) 孔隙介质均一，各向同性；(3) 孔隙度和渗透率是常数（与压力无关）；(4) 流体的压缩系数是常值，流体粘度是常数。方程 (1.20) 重写如下：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + C \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \frac{\phi \mu C}{K} \frac{\partial p}{\partial t}$$

上述方程的三种基本边界条件是：(1) 无限油藏——假设井是位于径向延伸无限大的孔隙介质中；(2) 有界封闭圆形油藏——井位于圆形油藏中心，外边界无流体通过；(3) 外边界定压——井位于圆形油藏中心，外边界为常压。

这三种情况的几何形态和边界条件，如图 2.1 所示。为了表示井壁处（ $r = r_w$ ）定产条件，根据达西定律：

$$q = \frac{2\pi Kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w}$$

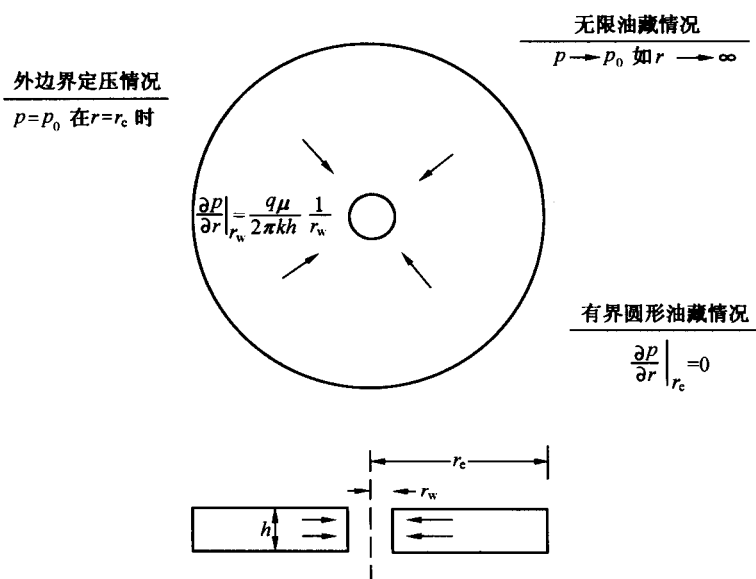


图 2.1 定产情况下径向流动几何形态和边界条件简图

如果要求井为定产量生产，可对井的压力梯度施加条件：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w} = \frac{q\mu}{2\pi Khr_w} \quad (2.1)$$

对于外边界 $r = r_e$ 处无流体通过则流速为零，即有：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_e} = 0 \quad (2.2)$$

在所有情况下，都要求 $t = 0$ 时，地层各处的压力一致为 p_0 ，即初始条件为：

$$p|_{t=0} = p_0 \quad (2.3)$$

2.1 无限大地层圆柱面源井的压力分布解及动态特征

2.1.1 解析解

无限大地层中心一口井定产量生产时，定解问题可写为：

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} - \sigma \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)^2 = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \\ p_D|_{t_D=0} = 0 \\ \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1 \\ \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D = 0 \end{cases}$$

考虑井筒储集时，内边界条件为：

$$C_D \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \Big|_{r_D=1} - \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = 1$$

定产生产时无量纲量定义为： $p_D = \frac{2\pi K h (p_0 - p)}{\mu q}$ $\sigma = \begin{cases} +1 & \text{生产时} \\ -1 & \text{注入时} \end{cases}$, $r_D = \frac{r}{r_w}$, $t_D = \frac{K t}{C_t \phi \mu r_w^2}$, $\alpha = \frac{q \mu C}{2\pi K h}$, $C_D = C_s / 2\pi \phi C_t h r_w^2$ ，其中 C_s 为井筒储积系数

模型 I 中的微分方程是非线性方程，无法直接求解，作如下变换：

$$p_D = -\frac{1}{\sigma \alpha} \ln x \quad (2.4)$$

模型 I 可变为：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial x}{\partial r_D} = \frac{\partial x}{\partial t_D} \\ x|_{t_D=0} = 1 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial r_D} - \sigma \alpha x \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \\ \lim_{r_D \rightarrow \infty} x = 1 \end{cases}$$

对定解问题，关于 t_D 作 Laplace 变换：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{x}}{\partial r_D} = s \bar{x} \\ \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial r_D} - \sigma \alpha \bar{x} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \\ \lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{x} = 1/s \end{cases}$$

由此可得拉氏空间的解为：

$$\bar{x}(r_D, s) = \frac{1}{s} - \frac{\sigma \alpha K_0(\sqrt{s} r_D)}{s[\sigma \alpha K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})]} \quad (2.5)$$

其中 $K_0(x), K_1(x)$ 分别为零阶、一阶第二类限制的 Bessel 函数。

考虑井筒储集的拉氏空间的解为：

$$\bar{x}(r_D, s) = \frac{1}{s} - \frac{\sigma \alpha K_0(\sqrt{s} r_D)}{s[(C_D s + \sigma \alpha) K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})]}$$

则对方程 (2.5) 作拉氏反演，有：

$$x(r_D, t_D) = 1 - \sigma \alpha L^{-1} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{s} r_D)}{s[\sigma \alpha K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})]} \right\} \quad (2.6)$$

设 $F(s) = \frac{K_0(\sqrt{s} r_D)}{\sigma \alpha K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})}$ ，其原函数为：

$$f(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_0(\sqrt{s} r_D) e^{st_D} ds}{s[\sigma \alpha K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})]}$$

选择如图 2.2 所示围道积分，利用 $K_0(z), K_1(z)$ 的渐近式和约当引理及其推论，有

$$f(t_D) = - \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_I + \int_{II} \right\} \text{的实部}$$

在割缝上部取 $s = u^2 e^{i\pi}$ ：

$$-\int_{II} = -2 \int_0^\infty \frac{K_0(r_D u i) e^{-u^2 t_D} du}{[\sigma \alpha K_0(ui) + ui K_1(ui)] i}$$

在割缝下部取 $s = u^2 e^{-i\pi}$ ，有：

$$-\int_I = -2 \int_0^\infty \frac{K_0(-r_D u i) e^{-u^2 t_D} du}{[\sigma \alpha K_0(-ui) + ui K_1(-ui)] i}$$

利用恒等式：

$$K_0(\pm iz) = \mp \frac{\pi i}{2} [J_0(z) \mp i Y_0(z)]$$

$$K_1(\pm iz) = -\frac{\pi}{2} [J_1(z) \mp i Y_1(z)]$$

其中 $J_m(x), Y_n(x)$ 分别为 m 阶第一类 Bessel 函数和 n 阶第二类 Bessel 函数。

得：

$$f(t_D) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2 t_D} u [\sigma \alpha \phi_{0,0}(r_D, 1, u) + u \phi_{0,1}(r_D, 1, u)] du}{[\sigma \alpha J_0(u) + u J_1(u)]^2 + [\sigma \alpha Y_0(u) + u Y_1(u)]^2} \quad (2.7)$$

式中 $\phi_{m,n}(x, y, z) = Y_m(\alpha x) J_n(\alpha y) - J_m(\alpha x) Y_n(\alpha y)$ 。

由方程 (2.6) 和 (2.7) 得：

$$x(r_D, t_D) = 1 - \frac{2\sigma \alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) [\sigma \alpha \phi_{0,0}(r_D, 1, u) + u \phi_{0,1}(r_D, 1, u)] du}{u \{ [\sigma \alpha J_0(u) + u J_1(u)]^2 + [\sigma \alpha Y_0(u) + u Y_1(u)]^2 \}} \quad (2.8)$$

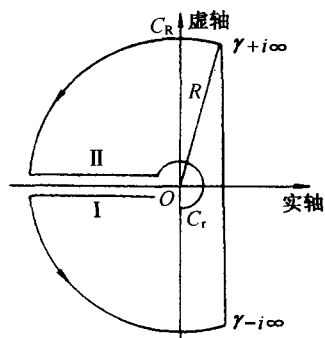


图 2.2 积分围道

模型 I 的解为:

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\sigma\alpha} \ln \left\{ 1 - \frac{2\sigma\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) [\sigma\alpha\varphi_{0,0}(r_D, 1, u) + u\varphi_{0,1}(r_D, 1, u)] du}{u [(\sigma\alpha J_0(u) + uJ_1(u))^2 + (\sigma\alpha Y_0(u) + uY_1(u))^2]} \right\} \quad (2.9)$$

井壁上的压降 ($r_D = 1$):

$$p_{wD}(t_D) = -\frac{1}{\sigma\alpha} \ln \left\{ 1 - \frac{4\sigma\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t_D}) du}{u [(\sigma\alpha J_0(u) + uJ_1(u))^2 + (\sigma\alpha Y_0(u) + uY_1(u))^2]} \right\} \quad (2.10)$$

2.1.2 渐近解

当 $s \rightarrow \infty$ 时, 此时的贝塞尔函数可近似为:

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad (2.11)$$

利用方程 (2.11) 可将方程 (2.5) 近似为:

$$\bar{x}(r_D, s) = \frac{1}{s} - \frac{\sigma\alpha e^{-(r_D-1)\sqrt{s}}}{\sqrt{r_D}(\sigma\alpha + \sqrt{s})s} \quad (2.12)$$

对方程 (2.12) 进行拉氏反演得:

$$x(r_D, t_D) = 1 - \frac{1}{\sqrt{r_D}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} \right) - e^{(\sigma\alpha)^2 t_D + \sigma\alpha(r_D-1)} \operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} + \sigma\alpha\sqrt{t_D} \right) \right] \quad (2.13)$$

那么短时渐近解为:

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\sigma\alpha} \ln \left[1 - \frac{1}{\sqrt{r_D}} \operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} \right) + \frac{1}{\sqrt{r_D}} e^{(\sigma\alpha)^2 t_D + \sigma\alpha(r_D-1)} \operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} + \sigma\alpha\sqrt{t_D} \right) \right] \quad (2.14)$$

其中 $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ 为余误差函数。

长时渐近解:

当 $t_D \rightarrow \infty$ 时, $s \rightarrow 0$, 此时有:

$$K_0(s) = -(\ln \frac{s}{2} + \gamma), K_1(s) = \frac{1}{s} \quad (2.15)$$

将方程 (2.15) 代入方程 (2.5) 得:

$$\bar{x}(r_D, s) = \frac{1}{s} \left[1 + \sigma\alpha \left(\ln \frac{\sqrt{s} r_D}{2} + \gamma \right) \left(1 + \sigma\alpha \left(\ln \frac{\sqrt{s}}{2} + \gamma \right) \right) + o((\sigma\alpha)^2) \right] \quad (2.16)$$

对 (2.16) 作拉氏反演得:

$$x(r_D, t_D) = 1 - \frac{\sigma\alpha}{2} \ln \frac{4t_D}{Cr_D^2} + \frac{(\sigma\alpha)^2}{4} \left(\ln \frac{4t_D}{C} \right)^2 - \frac{(\sigma\alpha)^2 \pi^2}{24} - \frac{(\sigma\alpha)^2}{2} \ln r_D \ln \frac{4t_D}{C}$$

其中 $C = e^\gamma, \gamma = 0.5772$, 是欧拉常数。

则长时渐近解为:

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\sigma\alpha} \ln \left[1 - \frac{\sigma\alpha}{2} \ln \frac{4t_D}{Cr_D^2} + \frac{(\sigma\alpha)^2}{4} \left(\ln \frac{4t_D}{C} \right)^2 - \frac{(\sigma\alpha)^2}{2} \ln r_D \ln \frac{4t_D}{C} - \frac{(\sigma\alpha)^2 \pi^2}{24} \right] \quad (2.17)$$