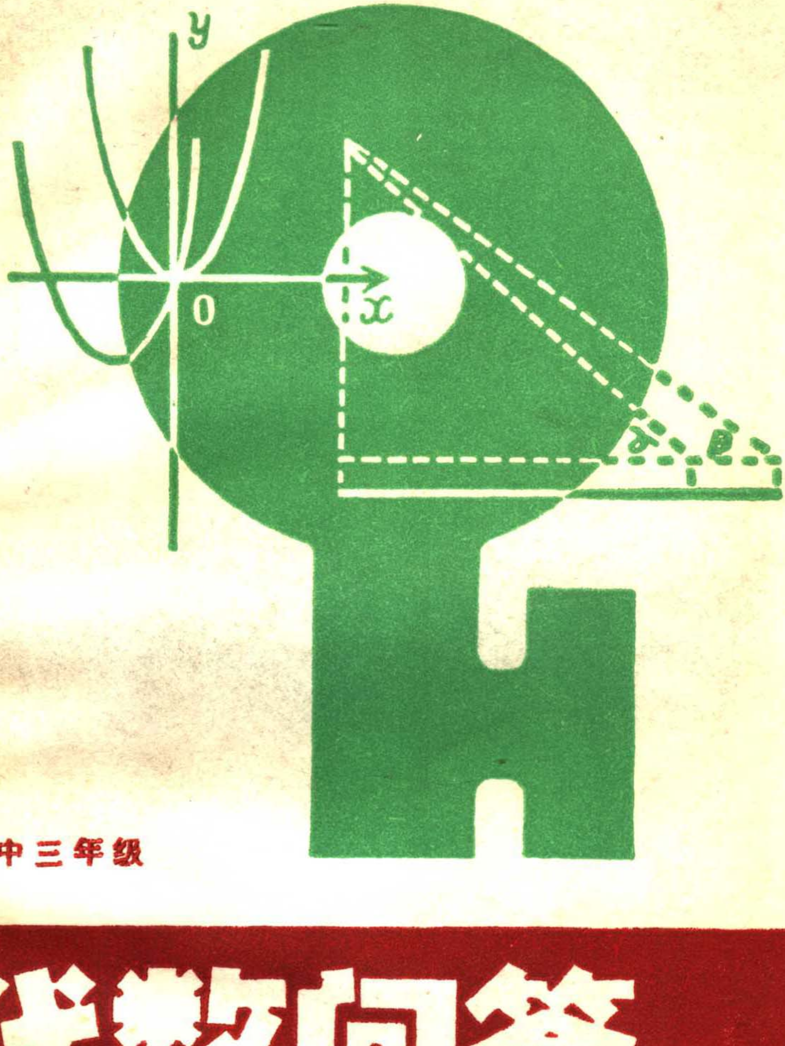


初中三年级

代数问答

DAI SHU WEN DA

江苏少年儿童出版社

初 中 三 年 级

代 数 问 答

王永建 主 编
潘娉姣 编 写

江苏少年儿童出版社

封面设计　孙为国

初中三年级
代数问答
王永建　主编　潘娉姣　编写

江苏少年儿童出版社出版
江苏省新华书店发行　泰州人民印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/32　印张 6.25　字数 112,000
1985 年 7 月第 1 版　1985 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—230,000 册

书号：R7352·083　　定价：0.75元

责任编辑　冯家俊

目　　录

第一章　直角坐标系

1. 为什么要学习平面直角坐标系？

答：在日常生活中，我们常常需要用一个有序实数对来表示平面内某个点的位置。例如，我们到电影院看电影，你票上的坐号是14排 9 号，当你走进影院后，便可以从第一排开始顺次数起，数到第14排，你便知道你的位置就在这一排。但还不行，因为14排上的坐位很多，你还得在这一排上再找 9 号这个坐位，找到了这个确定的位置，你就可以坐下看电影了。

可见，只要有了一对有序实数，我们就可以在一个特定的平面上找到一个固定的点。

又如在航海中，我们常常要比较精确地知道船舶航行的位置。一艘船向北偏东60°航行40公里，再向北偏东45°航行24公里，问这时船在起点的东面多少公里？北面多少公里？

如果把船的起始位置作为坐标原点（如图 1 - 1），向东方向为X轴的正向，向北方向作为Y轴的正向，那么，我们就可以在这个直角坐标系中求出这条船这时所在位置的点的坐标，即求出这时这条船舶的位置是在起点的东面多少公里，北面多少公里了。

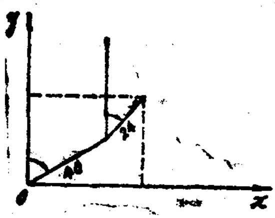


图1-1

一般地说，平面直角坐标系，建立了平面内的点与一对有序实数之间的一一对应关系。这就是说，对于坐标平面内

任意一点P，我们可以得到唯一的一对有序实数(x, y)来和它对应；反过来，对于任何一对有序实数(x, y)，在平面内就能确定一个唯一的点，使它的坐标为(x, y)。我们研究平面直角坐标系的意义就在于根据这样的对应关系，把平面内点的几何问题化为关于这些点的坐标的代数问题来进行研究。

我们知道，许多几何题的证明变化万千，没有固定的规律可循。例如，已知三角形的两条分角线相等，要证明它是等腰三角形，这道几何题看起来简单，但并不好证。从德国著名数学家史坦纳提出这个问题，到本世纪六十年代才有人找到比较简单的证明方法，竟用了一百年之久。因此，当今世界上许多数学家都在想：能不能找到一个固定的方法，不管什么几何题，都可用这种方法一步一步地做下去，直到最后或得到证明，或得到否定的结果？我国著名数学家吴文俊，在应用电子计算机证明几何定理方面取得了重大的进展。用这种方法，可以在计算机上证明许多相当复杂的定理。用电子计算机证明几何定理的主要思路是用坐标的方法，把几何问题转化成代数问题。由此可见学习直角坐标系具有十分重要的意义。

2.这一章包括哪些内容？

答：这一章主要有以下两个方面的内容。

(1)有关平面直角坐标系的概念。

要理解平面内直角坐标系的意义，弄清楚直角坐标系的一些名称和记法。

要理解平面内的点和有序实数对之间的一一对应关系。

(2)坐标平面内两点间的距离公式。

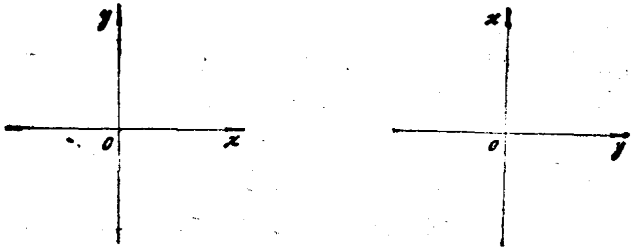
数轴上两点的距离公式；

平面内任意两点间的距离公式。

3.平面直角坐标系是谁首先提出的？

答：平面直角坐标系是由十七世纪法国著名数学家笛卡尔（R.Descartes1596—1650年）首先提出来的。它最早出现在笛卡尔1637年发表的《几何学》里.所以，平面直角坐标系又称为笛卡尔坐标，它的全称分别叫做笛卡尔平面右手直角坐标系（图1－2（a））笛卡尔平面左手直角坐标系（图1-2(b)），简称平面直角坐标系.一般说来，平面直角坐标系是指右手平面直角坐标系。

平面右手直角坐标系，即X轴绕原点以逆时针方向旋转90°，便与Y轴重合。平面左手直角坐标系，即X轴绕原点以顺时针方向旋转90°，便与Y轴重合。



（a）平面右手直角坐标系

（b）平面左手直角坐标系

图1—2

4.笛卡尔是怎样发明解析几何的？

答：笛卡尔，1593年3月31日生于法国，父亲是个律师。8岁时，在昂茹拉弗莱希一个耶稣教会学校读书，16岁离开

家乡去巴黎，20岁毕业于普瓦界大学，后来当了律师。

当时，人们有个观念，认为从军或研究宗教是最有出息的事。因此，1617年笛卡尔投入了奥拉日的Maurice王子的军队，驻扎在荷兰的布莱达（Brede)。

有一天，他在街上散步，看见招贴牌里贴着一张广告，许多人围着看。出于好奇，笛卡尔也走近一看，原来是一张征求数学解答的广告。因为笛卡尔不懂荷兰文，于是请了一位过路的荷兰人帮助翻译，这个人是当时荷兰大学的校长Isace Beeckman.经过翻译，笛卡尔了解到，这原来是个几何问题，公开悬赏征求证明的方法。当时，笛卡尔只用了数小时就得到了解答。虽然笛卡尔自幼爱好数学，但并未自觉对数学有特殊的才能。自从解决了这一难题后，他便产生了致力于研究数学的想法。

笛卡尔是个军人，他利用空隙时间认真从事数学研究。他认为数与形之间当具有一种有机的联系，便朝思暮想，寻求联系二者的途径。公元1619年11月，部队驻扎在Neuberg，他连续三天夜里做梦都在研究这个问题，传说，笛卡尔解析几何的思想就是受到这三个梦的启发。

1621年，笛卡尔离开部队，游历各地五年，专门从事数学研究。1628年，住在荷兰，专攻数学哲理20年，解析几何也就在这时发明了。

笛卡尔的解析几何学，见于他所著《Discours》第三编，共分三卷，一、二两卷为解析几何，第三卷为当时所引代数学的解析。

5.怎样正确识别各象限点的坐标的符号？

答：由于X轴和Y轴把坐标平面分成了四个部分，即第

一象限、第二象限、第三象限和第四象限(如图1-3)．而且X轴、Y轴是两条规定了方向的数轴，这样就决定了在各个象限内点的坐标的符号是各不相同的。

设点P的坐标是(X，Y)，

若P点在第一象限内，

则　$X>0$，$Y>0$；

若P点在第二象限内，

则　$X<0$，$Y>0$；

若P点在第三象限内，

则　$X<0$，$Y<0$；

若P点在第四象限内，

则　$X>0$，$Y<0$。

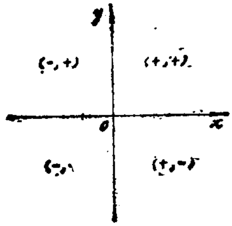


图1—3

也可以这样来看，因为X轴的向右方向为正，所以位于坐标平面右半部分的第一、四象限内点的横坐标取正值，位于坐标平面左半部分的第二、三象限内点的横坐标取负值。

同样地，因为Y轴的向上方向为正，所以位于坐标平面上半部分的第一、二象限内点的纵坐标取正值，位于坐标平面下半部分的第三、四象限内点的纵坐标取负值。

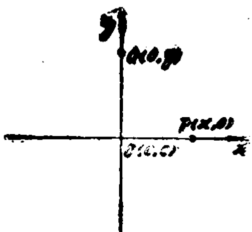


图1—4

6.怎样表示某些特殊点的坐标?

答：(1)如果点P在X轴上(图1-4)，则点P的坐标为(X，0)；如果点Q在Y轴上，则点Q的坐标为(0，Y)，原点的坐标为(0，0)。

(2)如果直线l // Y轴(1-5)，直线l与Y轴交点的坐标

为$(a,\ 0)$，P为直线l上的任意一点，那么，点P的坐标表示为：$P(a,\ Y)$；

如果直线$m \parallel X$轴(图1-6)，直线m和Y轴交点的坐标为

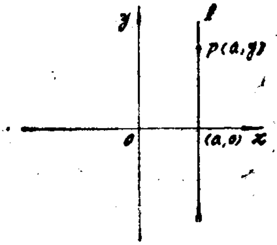


图1—5

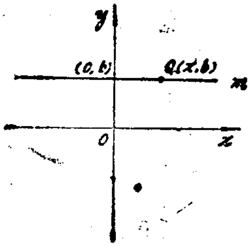


图1—6

$(0,\ b)$，Q为直线m上的任意一点，那么，点Q的坐标表示为$Q(X,\ b)$。

7.关于原点、坐标轴对称的点有些什么特征呢？

答：如图1-7，ABCD是边长为2个长度单位的正方形，如果以正方形对角线交点为坐标原点，建立如图的坐标系，那么A、B、C、D各点的坐标分别为$A(1,1)$、$B(-1,1)$、$C(-1,-1)$、$D(1,-1)$。因为正方形既是轴对称图形又是中心对称图形，X轴、Y轴、AC和BD都是它的对称轴，原点O为它的对称中心。显然，A点和B点，C点和D点关于Y轴对称；A点和D点，B点和C点关于X轴对称；A点和C点，B点和D点关于原点O对称。

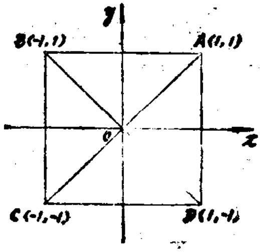


图1—7

从图1－7中可以看出，关于X轴对称的点的坐标的特征是：点的横坐标相同，纵坐标互为相反数；关于Y轴对称的点的坐标的特征是：点的纵坐标相同，横坐标互为相反数；关于原点对称的点的坐标的特征是：点的横坐标和纵坐标都互为相反数。

一般地，如果点P的坐标为(X, Y)，那么关于Y轴对称的点P'的坐标为$(-X, Y)$；关于X轴对称的点P''的坐标为$(X, -Y)$；关于原点O对称的点P'''的坐标为$(-X, -Y)$。

8. 有向线段的长度和有向线段的数量各表示什么意义？

答：在平面几何里，我们已经学过了什么叫做线段，还知道如何用刻度尺来度量线段的长度。现在，我们进一步来研究什么是有向线段。有向线段就是规定了方向的线段。如图1－8，$\overline{AB}$就是从点A到点B的一条有向线段，$\overline{BA}$是从点B到点A的一条有向线段。$\overline{AB}$和$\overline{BA}$是两条方向完全相反的有向线段。

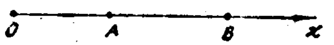


图1—8

有向线段的长度是一个非负实数，可记作$|AB|$，显然$|AB|=|BA|$。

如果设A、B两点在X轴上的坐标分别为X_1，X_2，那么$|AB|=|X_2-X_1|$，$|AB|$也可以叫做A、B两点间的距离。

有向线段的数量是一个实数，它是由有向线段的长度和连同表示它方向的正负号来表示的。因此$AB=-BA$，$AB+BA=0$，即AB与BA互为相反数。

如果用A、B两点的坐标X_1、X_2来表示有向线段AB的长，则$AB=X_2-X_1$，如果有向线段的数量为0，则长度也

为 0，即有向线段的起点和终点重合。

9.怎样恰当地选好坐标系？

答：恰当地选取坐标系，这件事很重要．它可以使有些问题的证明简便，计算简化．一般来说，应尽可能地利用图形的特点来恰当地选取坐标系。

例如，对于任意三角形，可以有下面几种建立坐标系的方法，如图1-9

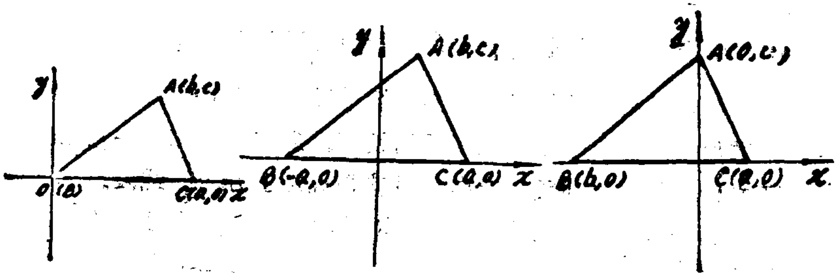


图1—9

对于平行四边形，常用如下的方法建立直角坐标系，如图1-10。

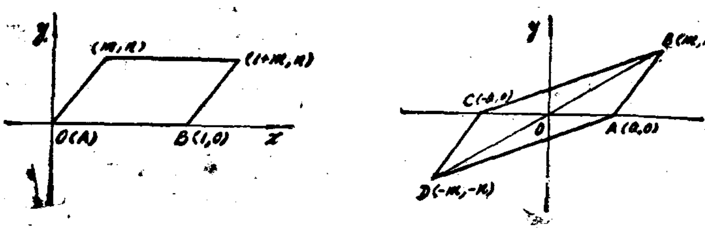


图1—10

一般来说，根据图形的特点，使尽可能多的点的坐标是 0 或 1，我们常用的方法是：选择图形中的一个顶点为原点，

这样就能够使这一点的坐标为（0，0）；选择图形中的一条边所在直线为X轴（或Y轴），这样就能使这条直线上的图形上点的坐标为（a，0）或（0，a）；选择图形中一条线段的中点为原点，这条线段所在直线为X轴，过线段中点而垂直于这条线段的直线为Y轴，这样利用图形的对称性，这条线段两端的点的坐标为（a，0），（$-a$，0），若取$a=1$（不失一般性，当然也可以取$a=2$，3，……），则可使计算简化。

这里必须注意的是平面内同一个点，如果选择的坐标系不同，那么它在不同坐标系中对应的坐标也不同。例如上述ΔABC的顶点B，在三个不同坐标系中的坐标显然是不同的；反之，同一有序实数对（a，0），在不同坐标系中对应的点也不同。

10．从教材P．10练习第3题能想到些什么呢？

答：这道题是："如果点P_1（8，4）与P_2（5，k）间的距离是5，求K的值，并画图。"

这道题不难，用两点间距离公式算得k值：$k_1=0$，$k_2=8$。

如图1-11，连结直线AA_1，不难看出直线AA_1（记作l）和y轴平行，且和y轴的距离为5，那么求k值的问题实际上可以归结为在直线l上找一点A，使得点P_1（8，4）到A点的距离为5。我们只要用几何作图就可以求得，即以点P（8，4）为圆心，以5为半径画弧和直线l相交于两点，根据勾股定理，不难得到这道题的结论。

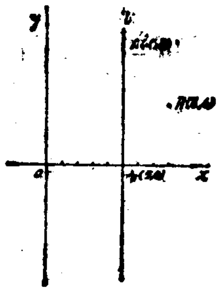


图1—11

11. 教材P.24复习题一第21题可有哪几种解法？

答：解法一：建立如图1-12的直角坐标系，取A点的坐标为$(0, 3b)$，B点的坐标为$(3a, 0)$。

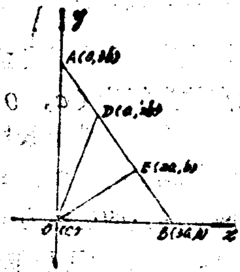


图1—12

那么D点的坐标为$(a, 2b)$；E点的坐标为$(2a, b)$。

$CD^2=a^2+4b^2$， ①

$CE^2=4a^2+b^2$， ②

$DE^2=a^2+b^2$， ③

$AB^2=9a^2+9b^2=9(a^2+b^2)$。

①＋②＋③ 得：

$CD^2+CE^2+DE^2=6(a^2+b^2)$。

$\therefore CD^2+CE^2+DE^2=\dfrac{2}{3}AB^2$。

解法二：也可以用教材P.11例4的结论来证。

$CD^2+BC^2=2(CE^2+DE^2)$。 ①

$CE^2+AC^2=2(CD^2+DE^2)$。 ②

$AC^2+BC^2=AB^2=(3DE)^2=9DE^2$， ③

①＋②得：

$CD^2+CE^2+DE^2=6DE^2$。 ④

由③和④可得：

$CD^2+CE^2+DE^2=\dfrac{2}{3}AB^2$。

检　查　题

（45分钟）

1.（15分）设点$A(a, 2)$是点$B(5, -2)$关于原点的对称点，求a的值。

2.（15分）已知点$M(-1, 0)$和$N(m, -2)$间的距离是$2\sqrt{2}$，求m的值。

3.（15分）求y轴上和点$A(-2, 5)$，$B(3, 0)$等距离的点P的坐标。

4.（15分）等腰ΔABC的底边$BC=6$，$AB=AC=5$，求以BC所在直线为X轴时，分别以BC中点为原点，以C为原点建立直角坐标系，写出A、B、C的坐标。

5.（20分）已知点P与点$A(3, 6)$的距离和到两坐标轴的距离相等，求P点的坐标。

6.（20分）已知ΔABC的顶点$A(-4, 2)$、$B(3, 1)$、$C(2, 4)$，求ΔABC的周长，并判断$\triangle ABC$是什么三角形？

练　习　题

1.已知点P在X轴上，它与点$A(1, -3)$的距离等于5，求点P的坐标，并画出图形。

2.设$P(a, 1-a)$，当

（1）P在Y轴上，

（2）P在X轴上，

（3）P在满足$Y=X$的条件的图形上，分别求出P的坐标。

3. 和两坐标轴都相切的圆的圆心坐标有什么特点？

4. 求点（4，3）关于X轴、Y轴、原点对称的点的坐标，再求它关于直线$X=2$，$Y=-3$的对称点坐标。

5. 已知A到B（2，3）的距离等于5，试根据下列条件求A的坐标：

（1）A的纵坐标和横坐标相等；

（2）AB与X轴平行。

6. 和两已知点M（2，－5）、N（－3，6）等距离的点的坐标应满足什么条件？

7. 在坐标轴所成角的平分线上，求与M（－2，0）的距离等于10的点的坐标。

8. 已知$\triangle ABC$的三个顶点坐标是A（－3，－1），B（1，－5），C（0，2），求和A、B、C三点等距离的点的坐标。

9. 求证：平行四边形各边的平方和等于对角线的平方和。

第二章　解三角形

1.三角学是怎样产生的？

答：三角学的最初知识是随着天文学而发展起来的．古代农业生产的发展，需要编著正确的历书，航海需要根据天体的位置正确地确定船只在大海中的方位，在长期的实践中，人们发现太阳和星星是指引正确方向最好的路标．为了能正确地运用太阳和星星指引航行的方向，人们就得学会进行天文观测，研究星体的相关位置。由于这些原因，原始的三角知识就很自然地开始萌芽了．

我国对三角知识的研究是很早的．公元前3000年左右，最古老的数学书籍《周髀算经》一书，曾记载过求从地面上一点到太阳的距离的方法．有人在周城（周成王所建的都城洛邑，即今河南洛阳）立 8 尺的竿，在某一天正午，测得竿影的长是 6 尺，又在北方相距2000里的地方，立同样高的竿，测得影长是 6 尺 2 寸，求测者到太阳的距离．

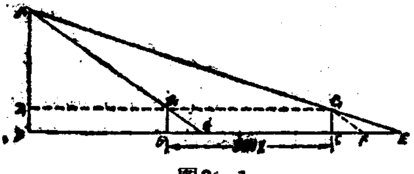


图2—1

如图2-1，应用相似三角形的原理可得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{B_1C_1}{AB_1}&=\frac{FE}{C_1F}\\ \frac{AB_1}{D_1B_1}&=\frac{C_1F}{CF}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \frac{B_1C_1}{D_1B_1}=\frac{FE}{CF}$$

即 $\dfrac{2000}{D_1B_1}=\dfrac{62-60}{60}$．