高中数学学习中常见错误分析

张子贤　陈京文　邓国栋　编著

湖 南 教 育 出 版 社

高中数学学习中常见错误分析

张子贤　陈京文　邓国栋　编著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行　（长沙展览馆路3号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米　32开　印张：10.5　字数：213,000

1988年3月第1版　1988年8月第1次印刷

印数：1——18,300

ISBN 7—5355—0513—9/G·508

定　价：1.80元

前　　言

《初中数学学习中常见错误分析》一书由湖南教育出版社出版后，不少读者希望有一本《高中数学学习中常见错误分析》，以帮助学习高中数学。基于这个目的，我们继续编写了这本小册子，谨献给广大青少年及其他读者。

解题是学习数学的必要手段．通过解题，不但巩固了已学过的数学基础知识，而且更重要的是可以培养三大能力——逻辑思维能力、空间想象能力和运算能力，同时也培养坚强的毅力。因此，我们在反对“题海战术”的同时，仍然主张适当多做一些各种类型的习题。由于高中数学的深度和广度比初中数学有了较大的飞跃，表现在内容繁多、解法多变、技巧灵活等等方面，所以在解答高中数学题中，自然比初中数学更容易产生这样或那样的错误。而从各种不同类型的错误中，分析产生错误的根源，研究纠正错误的方法，必将受益匪浅。其受益程度决不亚于单纯从正面探索解题的各种奥秘所得到的收获。

在本书中，我们一共编选了233道例题，按照高中数学内容分为代数、平面三角、立体几何、平面解析几何、微积分初步五个部分编写，并仍沿用《初中数学学习中常见错误分析》一书的格式、层次，先写错误解答（包括全错、部分错或解答不完

答),再写正确解答,最后对于产生错误的原因作出详尽的分析。书中除个别例题的错误分析选自有关书刊外，其余绝大部分都是我们长期从事高中数学教学以来，通过学生的答问、练习和作业所积累起来的。如果说我们进行了加工的话，只是把那些五花八门、形形色色的各种错误集中化、典型化和隐蔽化，让它们巧妙地在本书的“错误解答”中尽可能地表现出来。其中不少错误解法，即便是学习得较好的青少年读者，不加以认真思考、分析，也并不是那么容易就能识别出来的。当然，既是“常见错误分析”，书中也有不少错误的题解，对于某些读者或许会一看便知，但初学者却可能难以识辨而在学习中又最容易出现。考究这些错误的根源，防止这些错误的发生，则正是编写本书的宗旨。因此，对各种常见的错误题解,予以兼收并蓄,以适应广大读者之需要。

本书按篇章顺序，代数部分由张子贤同志编写；三角、解析几何部分由陈京文同志编写；立体几何及微积分初步部分由邓国栋同志编写。

由于时间仓促，更兼编者水平有限，所列正确解答不一定是最简捷的，对错误的分析也可能不甚确切，敬盼读者指正。最后还要提及的是，在本书的编写过程中，吴应贤同志热情提供了他在长期数学教学实践中积累的某些资料,在此表示感谢。

编著者

目 录

代　数

高中数学课本中的代数知识，是在初中所学知识的基础上继续加深和扩展的。例如，对于数的概念，在初中建立实数概念后，高中对实数作进一步的研究，并把数的概念扩充到复数；对于指数和对数，初中课本中介绍了它们的概念和基本性质，高中相继介绍指数函数和对数函数的概念及其图象和性质。在高中的代数知识中，有些内容虽然与前面的知识联系较少，但它们是学习后段教材或高等数学的基础。例如，排列和组合是解决二项式定理和概率的基本工具；数列通项公式与求和公式是学习极限和微积分的重要依据；等等。我们在学习中，应注意循序渐进，弄清前后知识的联系和区别，深刻理解各个概念，牢固掌握定理、法则和公式。要防止在运用概念、定理、法则和公式解答有关问题时出现缺陷和错误。同时，要通过练习，掌握解题的基本技能和技巧，提高判断、推理和计算等方面的能力，解题时力求迅速、准确。

一　集　合

集合是近代数学中的一个基本概念。用集合形式表示方程、

不等式的解以及几何元素之间的位置关系，显得简洁、明确。学习集合知识时，要掌握它的两种表示法；明确子集、交集、并集、全集和补集等一系列重要概念及其运算法则；学会运用图示法表示集合之间的关系和解决有关问题。初学者对于空集$\varnothing$与集合$\{\varnothing\}$（这里$\varnothing$表示元素）、$\{0\}$常易混淆；当求一个给定集合的子集时，往往漏掉空集和这个集合本身；在使用集合符号时，由于概念模糊，也容易发生差错。

注：本书表示各数集的字母与现行高中数学课本中的规定相同。即

N—自然数集；　Z—整数集；　Q—有理数集；

R—实数集；　C—复数集；　R^+—正实数集；

R^-—负实数集；　I—全集。

【例1】 每个集合是否可以同时用列举法和描述法表示？举例说明。

错 误 解 答

每个集合可以同时用列举法和描述法表示。例如，集合A是大于0而小于10的偶数的集合，可以分别表示为：

$A=\{2, 4, 6, 8\}$

或　$A=\{$大于0而小于10的偶数$\}$。

正 确 解 答

一个集合不一定同时可用列举法和描述法表示。例如，“集合A是大于0而小于10的偶数”的集合是可以用这两种方法表

示，但“集合B是大于0而小于10的实数”的集合，便只能用描述法表示，即$B=\{$大于0而小于10的实数$\}$，无法用列举法表示出来。

分析：错误解答产生的原因，在于误认为：“凡是一个给定的集合，其中的元素都可以一一列出。”仅从可以同时用两种表示法表示的一个特定的集合为例，便贸然断定“每一个集合都可以用列举法和描述法表示”，显然是以偏概全，作出了错误的结论，所以，我们在考察问题时，要注意事物的全部情况。

【例2】 已知集合A中有3个元素，集合B中有5个元素，问它们的并集C中能有多少个元素？

错 误 解 答

由题设可知：集合C中共有8个元素。

正 确 解 答

由题设可知：集合C中的元素的个数不少于5且不多于8。

分析：错误解答违背了集合的一个基本规定：集合中的元素不允许相同。即相同的对象组成一个集合时，这些相同的对象只允许当作一个元素看待。

例如，组成六位数213233的数字的集合是$\{1, 2, 3\}$，而不是$\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$。由此可见，本例集合C中的元素应当是不少于5个且不多于8个，当且仅当集合A中的3个元素都不属于集合B时，它们的并集C中的元素才是8个。

【例3】 试用描述法写出$A\cup B$和$A\cap B$，其中

$A=\{$矩形$\}$；$B=\{$菱形$\}$.

错 误 解 答

$A\cup B=\{$矩形$\}\cup\{$菱形$\}=\{$矩形或菱形$\}$；

$A\cap B=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}=\{$既是矩形又是菱形$\}$.

正 确 解 答

$A\cup B=\{$矩形$\}\cup\{$菱形$\}=\{$矩形或不含直角的菱形$\}$，

或 $A\cup B=\{$矩形$\}\cup\{$菱形$\}=\{$菱形或两邻边不相等的矩形$\}$；

$A\cap B=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}=\{$正方形$\}$.

分析：用描述法表示一个集合时，要求语言明确，且所含元素不得重复．因为矩形中有菱形（两邻边相等的矩形，即正方形）；菱形中也有矩形（含有直角的菱形，亦即正方形），所以错误解答中用“矩形或菱形”来描述$A\cup B$，便出现了重复元素；用“既是矩形又是菱形”来描述$A\cap B$，语言既冗长又欠明确.

【例4】 在什么条件下，集合A是集合B的真子集？

错 误 解 答

当集合A是集合B的子集，且A中的元素比B中的元素至少少一个时，集合A便是集合B的真子集.

正 确 解 答

如果集合A是集合B的子集，并且集合B中至少有一个元素

不属于集合A，那么，集合A便是集合B的真子集。

分析：用元素的多少来判定一个集合是否另一个集合的真子集，这犯了原则性的错误。因为集合有有限集合与无限集合之分，当A、B都是有限集合时，错误解答还能适用，但当A、B都是无限集合时，A、B中的元素都有无穷多个，我们就不能用简单的"数数（shǔ shù）"的办法来比较两个集合中元素的多少了。由此可见，元素个数的多少，决不能成为判定一个集合是另一个集合的真子集的条件。

【例5】 设集合$A=\{a, b, c\}$，写出A的所有子集。

错 误 解 答

集合$A=\{a,b,c\}$所有子集是：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$。

正 确 解 答

集合$A=\{a,b,c\}$的所有子集是：

$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$。

分析：错误解答中，漏掉了集合A的子集的两种特殊情形，即空集$\varnothing$与这个集合本身。必须注意：空集是任何集合的子集，而且空集是任何一个非空集的真子集。同时，一个集合本身也是这个集合的子集。

注：已知一个集合中有n个元素，则这个集合的子集有2^n个（即公式$\sum_{i=0}^{n} C_n^i=2^n$，将在学习二项式定理时得到证明，本例可

用此公式检验子集的个数)。

【例6】 写出方程组$\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=3\end{cases}$的解集并化简。

错 误 解 答

$$\{2x+3y=1\}\cap\{3x-2y=3\}=\left\{\frac{11}{13},\ -\frac{3}{13}\right\}.$$

正 确 解 答

$$\{(x,y)\,|\,2x+3y=1\}\cap\{(x,y)\,|\,3x-2y=3\}$$

$$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}2x+3y=1\\3x-2y=3\end{matrix}\right\}=\left\{\left(\frac{11}{13},\ -\frac{3}{13}\right)\right\}.$$

分析：用列举法表示集合时，不考虑元素之间的顺序，这是集合的一个基本属性，即元素无顺序性。错误解答没有在集合中写出“$(x,y)|$”，化简后的集合中，对x、y的值也没有添上小括号，它不能明确地表示这个方程组的解。更值得注意的是：$(x_0,\ y_0)$在平面上表示一个点，而在集合中则系该集合的一个元素，所以，$\{(x_0,y_0)\}$与(x_0,y_0)的意义迥然不同。

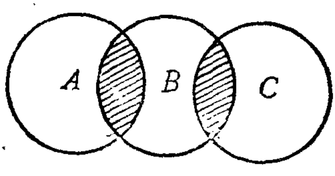


图 1

【例7】 图1中，A、B、C表示三个集合，用A、B、C之间的关系表示阴影部分。

错 误 解 答

图1中阴影部分是：$A\cap B\cup B\cap C$。

正 确 解 答

图1中阴影部分是：$(A\cap B)\cup(B\cap C)$。

分析：错误解答中出现的差错在于：对$A\cap B$和$B\cap C$没有分别写出括号，便在"交"与"并"的先后次序上产生了错误。由图1，可以直观地看出：$A\cap B\cup B=B$，于是，$A\cap B\cup B\cap C=B\cap C$，仅表示图形中右边的阴影部分。

【例8】 三角形按角的大小来分类是：锐角三角形、直角三角形和钝角三角形。试画图表示它们之间的关系。

错 误 解 答

设集合D表示三角形的全体，A、B、C分别表示锐角三角形、直角三角形和钝角三角形的全体，它们之间的关系如图2。

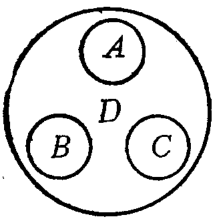


图 2

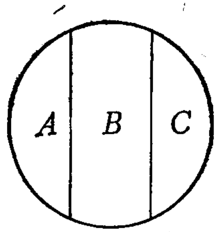


图 3

正 确 解 答

设集合A、B、C分别表示锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的全体，它们之间的关系如图3。

分析：图2大圆中的三个小圆A、B、C所表示的锐角三角形、直角三角形和钝角三角形，它们不交，这是正确的一面，但它们已构成三角形的全体，除了这三个圆所表示的三角形外，再没有任何三角形存在。可见，包含A、B、C的大圆D是多余的。或者说，D应为空集，但图2中D非空，显然是错误的。

【例9】 写出方程$x^2(x-1)^3(x-2)^4=0$的解集。

错 误 解 答

方程$x^2(x-1)^3(x-2)^4=0$的解集是：$\{0, 1, 2\}$。

正 确 解 答

方程 $x^2(x-1)^3(x-2)^4=0$的解集是：$\{0_{(2)}, 1_{(3)}, 2_{(4)}\}$。

分析：因复数集内的一元n次方程有n个根且只有n个根，故方程$x^2(x-1)^3(x-2)^4=0$共有九个根：0，0，1，1，1，2，2，2，2，即两重根0、三重根1和四重根2。又因集合具有元素互异性，故在解集内按课本规定，用元素的下标(k)表示k重根。错误解答的解集内对元素0、1、2没有写出相应的下标，原方程具有重根的情形便没有表达出来，以致原方程减少了六个根。

【例10】 设$I=N$，$A=\{x|x=2k, k\in N\}$，求$\bar{A}$。

错 误 解 答

$\because$ $I=N$，$A=\{x|x=2k, k\in N\}$，

$\therefore$ $\bar{A}=\{x|x=2k+1, k\in N\}$。

正 确 解 答

$\because$ $I=N$, $A=\{x|x=2k, k\in N\}$,

$\therefore$ $\bar{A}=\{x|x=2k-1, k\in N\}$。

分析：错误解答把自然数分为偶数$2k$和奇数$2k+1$（$k\in N$）两类，显然，$2k+1(k\in N)$中不包括奇数1，即遗漏了自然数的起始数1，违反了逻辑上“分类应当相称”的规则。只有把$2k+1$变为$2k-1(k\in N)$才是正确的。

【例11】 下列等式成立吗？

(1) $Z^+\cup Z^-=Z$； (2) $Q^+\cap Q^-\cap R=\{0\}$。

错 误 解 答

(1)、(2) 都成立。

正 确 解 答

(1)、(2)都不成立。

分析：答错的原因是：

(1) 忽视了数0是整数集Z中的一个元素。因为，在集合$Z^+\cup Z^-$的元素中缺少0，所以$Z^+\cup Z^-=Z$不能成立；

(2) 因为，$Q^+\cap Q^-=\varnothing$，而 $\varnothing\cap R=\varnothing$，$\varnothing\neq\{0\}$，所以$Q^+\cap Q^-\cap R=\{0\}$不能成立。由于对空集$\varnothing$与集合$\{0\}$的涵义没有弄清，因而产生差错。必须明确：空集$\varnothing$中没有任何元素，而集合$\{0\}$有一个元素0，两者是完全不相同的。

【例12】 设 $I=\{x|x^2-2x-8\leqslant 0\}$， $A=\{x|x^2-2x-3<$

0}，求$\bar{A}$。

错 误 解 答

∵ $A=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$,

∴ $\bar{A}=\{x|x<-1\}\cup\{x|x>3\}$.

正 确 解 答

∵ $I=\{x|x^2-2x-8\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$,

$A=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$,

∴ $\bar{A}=\{x|-2\leqslant x\leqslant -1\}\cup\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$

$=\{x|-2\leqslant x\leqslant -1$或$3\leqslant x\leqslant 4\}$.

分析：错误解答中出现的错误，主要是没有弄清全集与补集的关系，撇开了给定的全集I，而误认为是实数集，以致求得的补集$\bar{A}$中变数x的值超出了全集I中变数x的值的范围。必须明确：I、A、$\bar{A}$之间的关系是：

$A\subseteq I$；$A\cup\bar{A}=I$.

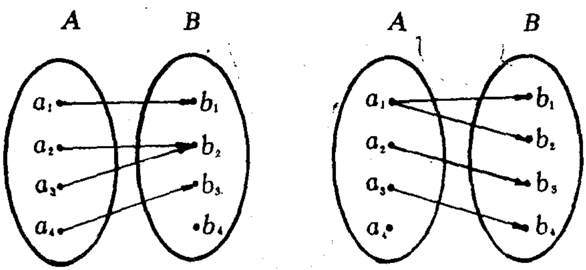
其次是，假定$I=R$，$A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，求得的补集$\bar{A}=\{x|x<-1\}\cup\{x|x>3\}$，也丢失了$x=-1$和$x=3$。

二 函 数

在初中学习函数知识的基础上，高中数学课本中提出了"映射"、"一一映射"等新的概念，指明函数是一种特殊的映射，从而加深了对函数概念的理解。我们必须弄清有关函数的许多

基本概念和掌握有关函数的基本性质。初学时，往往容易在“对应”与“映射”、“函数”与“反函数”等概念上发生混淆。在求一个函数的反函数（如果它存在的话）时，常常容易把定义域和值域弄错，以致画出的图象出现多余或遗漏的情况。

【例13】 图4中的(1)、(2)都表示从集合A到集合B的对应。它们是从A到B的映射吗？



(1) 图 4 (2)

错 误 解 答

图4中的(1)不是从A到B的映射；(2) 是从A到B的映射。

正 确 解 答

图4中的(1) 是从A到B的映射；(2) 不是从A到B的映射。

分析：对于(1) 的错误解答，可能认为“B中的一个元素b_2不是对应A中唯一的元素”或“B中有一个元素b_4在A中没有对应于它的元素”，便断定(1) 不是从A到B的映射。事实上，上述两种情形都没有违反映射的定义。图4中的(1)，完全满足映射的条件：对于集A中的每一个元素在集B中有唯一的元素对应（它允许集A中的几个元素对应着B中的同一个元素），所以，