高等学校教学用书

# 误差理论与测量平差

金学林　马金铃　王菊珍　编

煤炭工业出版社

高等学校教学用书

# 误差理论与测量平差

金学林　马金铃　王菊珍 编

煤炭工业出版社

## 内 容 提 要

本书系统地论述了测量数据分析与平差的基础理论和方法，着重讨论了条件平差和间接平差在实践中的应用。对本学科的加深部分，如统计运算、秩亏自由网平差、最小二乘滤波、推估和配置等，亦作了适当的介绍。

本书可作为高等学校矿山测量和工程测量专业的教学用书，亦可作为测量工程技术人员的参考书。

责任编辑：洪 镀

高等学校教学用书

误差理论与测量平差

金学林 马金铃 王菊珍 编

*

煤炭工业出版社 出版

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092mm $^1/_{16}$ 印张20 $^3/_4$

字数493千字 印数1—2,165

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

ISBN 7-5020-0448-3/TD·407

书号 3234 定价 4.10元

# 前　　言

为了满足煤炭系统高校矿山测量专业教学的需要，在分析以往所使用的教材基础上，结合多年教学实践，参照现行的教学大纲和教学计划，编写了这本《误差理论与测量平差》教材。

本书从矿山测量专业特点出发，侧重于介绍测量数据分析与平差的基本理论和方法。以矩阵代数为工具，用概率论和数理统计的原理，对观测误差、精度指标、误差传播律等作了详细的叙述。本书系统地讨论了最常用的条件平差和间接平差，最后归纳出平差的综合数学模型。考虑到高年级加深课程的需要，还介绍了近代平差的一些理论和方法，如统计运算、秩亏自由网平差、最小二乘滤波、推估和配置等。这些内容也基本上反映了本学科近几年来的新发展。每章后面还附有部分精选的习题，以便于练习。

本书取材广泛，内容丰富，深度适当，通俗易懂，便于学生和工程技术人员自学和参考。

在编写的过程中，我们参阅了武汉测绘科技大学、同济大学、解放军测绘学院的教材，引用了有关书刊的某些资料。武汉测绘科技大学鲁林成教授、西安矿业学院姚应生副教授、山西矿业学院徐曼倩副教授以及阜新矿业学院测量平差组的老师们，对本书的编写内容和方法提出了许多很好的意见。武汉测绘科技大学陶本藻教授对本书进行了审阅和修改。在这里，谨向上述单位和同志表示衷心感谢。

全书共分十章。第一、二、五、九章和附录(部分)由金学林编写，第七、八、十章由马金铃编写，第三、四、六章和附录(部分)由王菊珍编写。由金学林负责全书的统校工作。

由于时间仓促，水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1989.12.

# 目 录

**第一章 测量误差及其传播律** …… 1
§1-1 测量误差及其分类 …… 1
§1-2 偶然误差的概率特性 …… 2
§1-3 精度和衡量精度的指标 …… 4
§1-4 协方差传播律 …… 10
§1-5 权与定权的常用方法 …… 23
§1-6 权逆阵及其传播律 …… 28
§1-7 由双观测值之差求中误差 …… 34
§1-8 系统误差与偶然误差的联合传播 …… 38
§1-9 有效数字与舍入误差 …… 40
习 题 …… 43
**第二章 参数点估计与最小二乘原理** …… 46
§2-1 参数点估计与测量平差 …… 46
§2-2 参数点估计法 …… 47
§2-3 二维误差分布 …… 50
§2-4 最小二乘原理和最小二乘法 …… 51
§2-5 参数点估值质量的评价标准 …… 54
习 题 …… 58
**第三章 条件平差** …… 59
§3-1 条件平差原理 …… 59
§3-2 水准网条件方程式的列立 …… 63
§3-3 三角网条件方程式的种类和列立 …… 65
§3-4 独立测边网条件方程式 …… 69
§3-5 边角网条件方程式 …… 72
§3-6 法方程式的组成和高斯约化 …… 77
§3-7 高斯-杜力特简化格式和算例 …… 86
§3-8 线性方程组的迭代解法 …… 87
§3-9 条件平差精度评定 …… 96
§3-10 条件平差中估值的统计性质 …… 101
§3-11 条件平差示例 …… 105
习 题 …… 114
**第四章 两组平差** …… 118
§4-1 克吕格两组平差法 …… 118
§4-2 精度评定 …… 121
§4-3 用平均分配法则作两组平差及示例 …… 124
§4-4 直接由第二组条件原系数计算第二组法方程系数 …… 130
习 题 …… 132

**第五章　间接平差** …… 135
§5-1　间接平差原理 …… 135
§5-2　未知数的选定 …… 138
§5-3　三角网坐标平差的误差方程 …… 140
§5-4　测边网坐标平差的误差方程 …… 148
§5-5　法方程式的组成和解算 …… 151
§5-6　点松弛法解误差方程 …… 158
§5-7　间接平差精度评定 …… 161
§5-8　间接平差结果的统计性质 …… 170
§5-9　间接平差算例——坐标平差 …… 173
习　题 …… 178
**第六章　误差椭圆** …… 183
§6-1　点位误差 …… 183
§6-2　误差曲线 …… 187
§6-3　误差椭圆 …… 188
§6-4　相对误差椭圆 …… 190
习　题 …… 192
**第七章　统计运算** …… 194
§7-1　概述 …… 194
§7-2　$u$检验法 …… 194
§7-3　$\chi^2$检验法 …… 197
§7-4　$t$检验法 …… 200
§7-5　$F$检验法 …… 203
§7-6　分布的假设检验 …… 205
§7-7　弃真和纳伪的概率 …… 207
§7-8　参数的区间估计 …… 209
§7-9　方差分析 …… 212
§7-10　回归分析 …… 218
习　题 …… 225
**第八章　相关平差及平差的综合模型** …… 227
§8-1　概述 …… 227
§8-2　附有未知数的相关条件平差及条件平差的综合模型 …… 228
§8-3　附有条件的相关间接平差及间接平差的综合模型 …… 237
§8-4　条件平差与间接平差的互相转化 …… 246
§8-5　条件分组相关平差 …… 248
§8-6　逐次相关间接平差 …… 256
习　题 …… 264
**第九章　最小二乘滤波、推估和配置** …… 268
§9-1　概述 …… 268
§9-2　最小二乘滤波与推估 …… 270
§9-3　协方差函数 …… 276
§9-4　最小二乘配置 …… 278

习　题 …… 285
**第十章　秩亏自由网平差** …… 287
§10-1　概述 …… 287
§10-2　广义逆矩阵 …… 287
§10-3　秩亏自由网平差的直接解法 …… 292
§10-4　秩亏自由网平差的伪观测法 …… 299
§10-5　秩亏自由网拟稳平差简介 …… 307
习　题 …… 311
**附录一　矩阵的补充知识** …… 313
**附录二　几种附表** …… 318
附表 1　标准正态分布表 …… 318
附表 2　$\chi^2$分布表 …… 319
附表 3　$t$分布表 …… 320
附表 4 (1)　$F$分布表 …… 321
附表 4 (2)　$F$分布表 …… 322
附表 5　相关系数临界值表 …… 323
**主要参考文献** …… 324

# 第一章　测量误差及其传播律

## §1-1　测量误差及其分类

在测量实践中，我们常常发现对同一个量进行重复观测，其结果总是存在一定差异。例如，对地面上同一段距离进行往返丈量，两次丈量值并不相同；测量三角网中的任何一个平面三角形，其三个内角的和一般不等于180°，等等。之所以产生上述情况，是因为任何测量都必然带有观测误差。

观测误差的产生有内在原因和外界条件的影响。内在原因，包括测量仪器精密度有限所产生的误差，例如，$J_2$型经纬仪测微器最小刻划为1″，在估读1″以下的尾数时就存在误差。还有仪器结构的不完善，观测者感觉器官的鉴别能力，技术水平等也会对仪器的安置、照准、读数等方面产生误差。外界条件的影响，主要指观测时所处的外界条件，例如温度、湿度、风力、大气折光等的不同或变化，导致观测结果产生误差。

仪器、观测者、外界条件等是引起测量误差的主要来源。人们习惯地把这三方面的因素称为观测条件。不管观测条件如何，在测量中产生误差是不可避免的。测量工作者的责任是采取不同的措施，尽可能地消除或减少误差对观测结果的影响，提高观测成果的精度。为此我们需要对误差出现的规律进行研究，首先要搞清各种误差的性质，以便对不同性质误差的观测结果采用不同的方法加以处理。

下面我们研究测量中出现的各种误差。

经典的概念常常把误差分为三种类型：偶然误差、系统误差和粗差。

**一、偶然误差**

在一定条件下作一系列的观测，如果观测误差从表面上看其数值和符号不存在任何确定的规律性，但就大量误差总体而言，具有统计性的规律，这种误差称为偶然误差。

例如，我们用经纬仪测量角度，测角误差是由许多的偶然因素引起的，这些偶然因素在不断变化，体现在单个的微小测角误差上，其数值或大或小，其符号或正或负，且无法事先预知，呈现随机性。它服从或近似服从正态分布，且误差的平均值随观测次数的增加而趋于零。由此可见，偶然误差也就是均值为零的随机误差，也称为不规则的误差。

**二、系统误差**

在一定的观测条件下进行一系列观测，如果观测的误差在数值和符号上或者保持为某一常数，或者按照一定的规律变化，这种带有系统性和方向性的误差称为系统误差。

系统误差又分为：

常系统误差　假设使用没有调整好零位的测量仪器进行重复观测，其结果总是略高或略低于真值，这种误差称为零位误差，是常系统误差的一种。常系统误差常常表现出固定性——符号、数值保持不变。也有人把这种误差称为常数误差。

可变系统误差　这种系统误差是随一定规律变化的，它表现出累积性——在测量过程中不断增加或者减少，还表现出周期性——数值和符号有规律地变化。

单向误差　这种误差的大小变化不定，但符号总是相同的。

上述误差是不可避免的，即使观测者十分认真且富有经验，测量仪器作了最好的校正，而且外界条件又最有利，这些误差仍然会发生。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时产生的，当观测中有显著的系统误差，偶然误差居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质。反之，呈现出偶然的性质。

系统误差对观测成果质量的影响比较大，因为它往往具有累积性。所以在实际工作中尽可能采用各种办法消除或者减弱其对观测成果的影响，以至于达到实际上可以忽略不计的程度。例如，在进行测量之前对测量仪器进行认真的检验和校正；在测量过程中，采用合适的测量方法等。

**三、粗差**

错误或者粗差属可避免的误差，例如，瞄错目标，读错数等。从统计学的观点看，粗差是观测结果，但不属于所研究的分布中相同的样本，它们当然不能和其它观测结果一起使用。例如，在正态分布中粗差不可能发生。因此，优化测量程序时要能够查出粗差，并加以排除。平差计算中不考虑粗差。

为了提高观测成果的质量，发现和消除错误，通常要进行多余观测。比如，一个平面三角形，只要观测两个角就可以确定其形状，但是往往对第三个角度也进行观测。这第三个角度的观测值就是多余观测值。由于观测值存在着不可避免的偶然误差，使三角形三内角之和不等于180°，这就是说，三个观测值之间产生了矛盾。寻找解决矛盾的方法就是测量平差的任务。总的说，测量平差有两个任务，一是从一系列带有偶然误差的观测值中求出未知量的最或然值，二是评定测量成果的精度。

## §1-2　偶然误差的概率特性

测量平差所处理的是一系列带有偶然误差的观测值，它们不包括系统误差，因此有必要对偶然误差的性质作进一步研究。

我们把第 $i$ 次单一观测中发生的偶然误差称为单一误差或个体误差，把它定义为观测值$L_i$与相应的理论值$\widetilde{L}$之差：

$$\text{误差} = \text{理论值} - \text{观测值}$$

单一误差有两种形式：

（1）真误差　$\Delta_i = \widetilde{L} - L_i$

（2）改正数　$v_i = \hat{L} - L_i$

式中　$\widetilde{L}$——$L_i$的真值；

$\hat{L}$——$L_i$的最或然值（或平差值）。

若以被观测量的数学期望

$$E(L) = [E(L_1),\ E(L_2),\ \cdots,\ E(L_n)]'$$

表示其真值，则

$$E(L) = \widetilde{L}$$

$$\Delta = E(L) - L$$

前面已经指出，就单个偶然误差而言，其大小或符号没有规律性，但就其总体而言，却有一定的统计规律性，并且指出偶然误差是服从正态分布的随机变量。下面用一个实例

来说明。

在相同条件下，独立地观测了358个三角形的全部内角，由于观测值带有偶然误差，故三内角之和不等于其真值，用公式

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i$$
$$(i = 1, 2, \cdots, 358)$$

算出358个三角形内角和的真误差。取误差区间的间隔d$\Delta$为 0.2″，将这一组误差按其正负号与数值大小排列；统计误差出现在各区间内的个数$\nu_i$，以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率$\frac{\nu_i}{n}$（此处$n=385$），列于表1-1中。从表1-1中可以看出，偶然误差的分布呈现出这样的规律：绝对值小的误差比绝对值大的误差多；绝对值相等的正误差个数与负误差个数相近；误差的绝对值有一定限值，在这里绝对值最大的误差不超过1.6″。

表 1-1

| 误差区间 | $\Delta$ 为正值 | | $\Delta$ 为负值 | | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|
| d$\Delta$(″) | 个数 $\nu_i$ | 频率 $\frac{\nu_i}{n}$ | 个数 $\nu_i$ | 频率 $\frac{\nu_i}{n}$ | |
| 0.0～0.2 | 46 | 0.128 | 45 | 0.126 | d$\Delta$=0.20″；等于区间左端值的误差算入该区间内 |
| 0.2～0.4 | 41 | 0.115 | 40 | 0.112 | |
| 0.4～0.6 | 33 | 0.092 | 33 | 0.092 | |
| 0.6～0.8 | 21 | 0.059 | 23 | 0.064 | |
| 0.8～1.0 | 16 | 0.045 | 17 | 0.047 | |
| 1.0～1.2 | 13 | 0.036 | 13 | 0.036 | |
| 1.2～1.4 | 5 | 0.014 | 6 | 0.017 | |
| 1.4～1.6 | 2 | 0.006 | 4 | 0.011 | |
| 1.6 以上 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 和 | 177 | 0.495 | 181 | 0.505 | |

偶然误差分布情况还可以用图形来表达。图1-1就是按表1-1的数据绘制而成。绘制这种图时，以横坐标表示误差$\Delta$的大小，纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值，即$y = \frac{\nu/n}{d\Delta}$。这种图称为频率直方图。

当误差个数$n \to \infty$，误差区间间隔d$\Delta$无限缩小时，各频率就趋于一个完全确定的数值，这就是误差出现在各区间的概率。这样，图1-1中各长方形顶边连接的折线就变成一条如图1-2所示的光滑曲线。这种曲线称为误差分布曲线。由此可见，偶然误差的频率分布，随着$n$的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常称偶然误差的频率分布为经验分布。人们都以正态分布作为描述误差分布的数学模型，这不仅方便，而且基本上符合实际情况。

通过大量的实践，人们总结出偶然误差的几个概率特性：

（1）在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说超出一定限值的误差出现的概率为零；

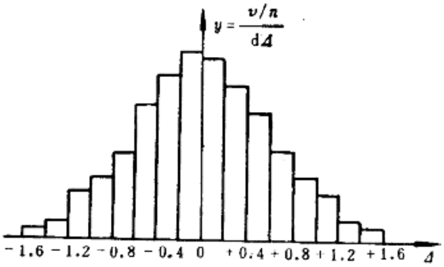


图 1-1

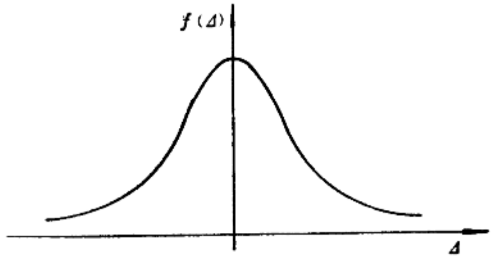


图 1-2

（2）绝对值较小的误差出现的概率较大；

（3）绝对值相等的正负误差出现的概率相同；

（4）偶然误差的数学期望为零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=E(\Delta)=E[L-E(L)]=0$$

在图 1-1 中，以纵坐标 $y=\frac{v/n}{d\Delta}$ 为高的长方条面积就是误差出现在该区间内的频率。若以理论分布代替经验分布，则各个小长方条面积 $\frac{v}{n}$ 就是误差出现于小区间 $d\Delta$ 上的概率 $P(\Delta)$，即

$$P(\Delta)=\frac{v/n}{d\Delta}\cdot d\Delta=f(\Delta)d\Delta \tag{1-1}$$

称 $f(\Delta)$ 为误差分布的概率密度函数，服从正态分布，故

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-2}$$

式中 $\sigma$ 为标准差，在测量工作中亦称中误差。这里，要注意，测量误差是连续型随机变量，而连续型随机变量出现于个别点上的概率等于零。因此，所谓的误差出现的概率是指误差出现于某一区间的概率。

## §1-3 精度和衡量精度的指标

### 一、观测值的可靠性

前面我们讲过，偶然误差和系统误差对观测结果所起的作用是不同的。下面举一简单例子加以说明。

如图1-3所示，用光电测距仪测量 $AB$ 这段距离。设 $AB$ 的真实距离为 $\tilde{L}_T$，一组观测值为 $L_r$，$r=1,2,\cdots,n$。通常取算术平均值

$$\hat{L}=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}L_r$$

作为距离 $\tilde{L}_T$ 的估值。现在考虑两种情况：

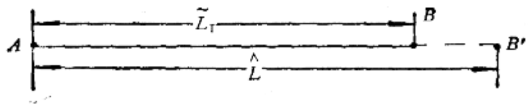


图 1-3

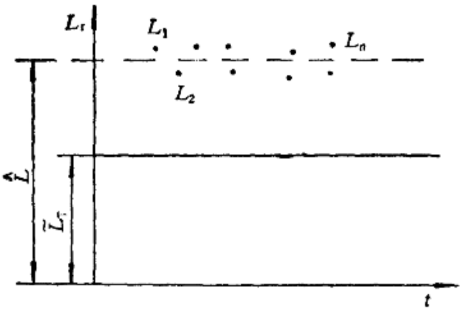

图 1-4

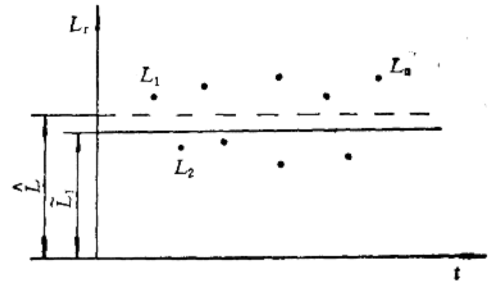

图 1-5

1. 如果测距误差中偶然误差很小，但包含有相当大的系统误差（甚至粗差），这时观测数据$L_r$表现得重复性很强，围绕着$\widehat{L}$很密集，但离真值$\widetilde{L}_T$却较远（见图1-4）。

2. 如果测距误差中偶然误差成分很大，但不包含系统误差（粗差亦剔除了），这时观测数据$L_r$表现得重复性很差，围绕着$\widehat{L}$很分散，但这样确定出来的算术平均值$\widehat{L}$却比第一种情况更接近真值（见图1-5）。

为了说明观测值的可靠性，我们引入精度（精密度）、准确度和不确定度的概念。

精度　就是对同一量的重复观测值之间的密集或吻合的程度，即表示各观测结果与其中数的接近程度。如果重复观测值密集在一起，就说它们的精度高，如果它们之间分散得很开，则精度就低。一般地说，精度高反映了在进行测量时测量人员高度细心，仪器精密以及方法得当。

准确度　就是观测值对真值的吻合或接近的程度。也可以说，准确度反映一个位置统计与其所估的参数值的接近程度。准确度不仅包括随机误差的影响，而且还包括由于未改进的系统误差引起的偏离。由于测量平差的主要研究对象是偶然误差，而且是在剔除了粗差和消除或尽量减弱了系统误差的基础上进行的，所以平差时可以不考虑准确度。

不确定度　就是预期一个观测误差将落在其中的区间。一定的概率水平一般是对应着一个不确定度。例如，95%的不确定度就是观测误差将以95%的可能性（即概率为0.95）落在其中的数值范围。若一个观测值的不确定度为已知，则可将其附在观测值之后。

## 二、衡量精度和准确度的指标

### 1. 一维误差分布与精度指数

由概率论的知识知道，服从正态分布的一维随机变量$x$的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-3}$$

式中$\mu$和$\sigma$为分布密度的两个参数，分别表示随机变量$x$的数学期望和标准差。对于偶然误

差来说，一维误差分布的密度函数为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1-4}$$

一维误差分布的图形如图1-6所示，它有如下性质：

（1）$f(\Delta)$为偶函数，曲线对称于纵轴；

（2）$f(\Delta)$随着误差的绝对值$|\Delta|$的增大而减小，当$\Delta\to\infty$，$f(\Delta)\to 0$；

（3）当$\Delta=0$，则

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

为函数的最大值；

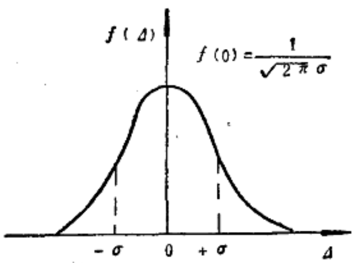


图 1-6

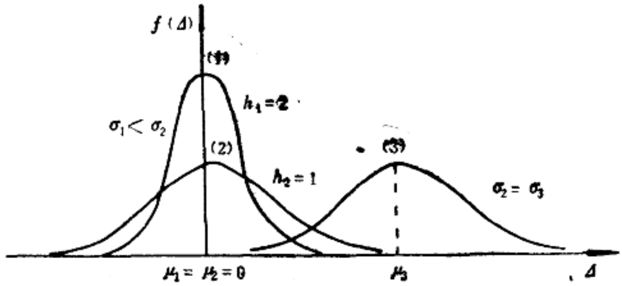


图 1-7

（4）误差曲线的拐点的横坐标为中误差，即

$$\Delta=\pm\sigma$$

这可由对$f(\Delta)$求二阶导数得出。

一维正态分布密度函数公式（1-3）中的两个参数$\sigma$和$\mu$，决定了曲线的形状和位置，如图1-7所示。曲线(1)、(2)的$\mu$相同且等于零（测量误差即属于此种情况），但$\sigma_1<\sigma_2$；而曲线(2)、(3)的$\mu$不同，但$\sigma_2=\sigma_3$。由此可见，当$\mu$相同时，如只变动$\sigma$，则曲线位置不变，但其形状要发生变化。也就是说，数学期望$\mu$表示随机变量的集中位置，而标准差（中误差）$\sigma$则表示随机变量围绕集中位置的离散度。由于各分布曲线下面所围成的面积均等于1，所以$\sigma$越小，曲线形状越陡峭，表示随机变量对数学期望$\mu$的离散程度小，从测量来讲，表示观测精度高；$\sigma$越大，曲线形状越平缓，也就是随机变量对$\mu$的离散程度大，就测量来讲，表示观测精度低。

根据高斯误差曲线方程式，我们可以得到密度函数$f(\Delta)$的解析表达式

$$f(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2} \tag{1-5}$$

一定的误差分布，就有一个确定的$h$值与之对应，如图1-7所示：曲线(1)$h_1=2$，曲线陡峭；曲线(2)$h_2=1$，曲线就平缓。所以$h$的大小亦反映了观测精度的高低，故称$h$为精度指数。

2．衡量精度的指标

衡量精度高低，可用绘制误差分布曲线的方法来进行。但这种方法比较麻烦，而且人们还需要对精度有一个数字概念。为此，下面介绍几种衡量精度的指标。

1）方差和中误差

式（1-4）中$\sigma^2$是误差分布的方差，而$\sigma$就是中误差。方差是真误差的平方($\Delta^2$)的数学期望，即$\Delta^2$的理论平均值

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n}\\ \sigma &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

由概率论公式知

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$$

将式（1-5）代入，经过变换可求得

$$\sigma^2 = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2\frac{h}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{e}^{-h^2\Delta^2}\ \mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2h^2}$$

所以

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}} \tag{1-7}$$

从上式可以看出，精度指数愈大，中误差（标准差）愈小，表示观测精度愈高，反之，精度愈低。所以中误差可以作为衡量精度的一种指标。这一点在一维误差分布的图形中也可明显看出。

式（1-6）中中误差$\sigma$是$\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$的极限值。因为在实际工作中，观测个数$n$总是有限的，有限个真误差$\Delta$只能求出中误差的估值。因此，在本书中，将用$m$表示中误差$\sigma$的估值，即

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-8}$$

在不需要特别强调“估值”的意义时，常把“中误差估值”简称为“中误差”。

2）平均误差

在一定观测条件下，一组独立的偶然误差绝对值的数学期望称为平均误差。其表达公式为

$$\left.\begin{aligned}\theta &= E(|\Delta|) = \lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n}\\ \text{或}\quad \theta &= E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty}|\Delta| f(\Delta)\mathrm{d}\Delta\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

因为上式的被积函数是偶函数，故可写成

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty}|\Delta|\frac{h}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{e}^{-h^2\Delta^2}\ \mathrm{d}\Delta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\Delta\,\mathrm{e}^{-h^2\Delta^2}\ \mathrm{d}\Delta$$

经变换可得

$$\theta=\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \tag{1-10}$$

顾及式（1-7），则有

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\\ \sigma&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta\end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

其估值为

$$\vartheta=\pm\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1-12}$$

它与中误差估值的关系

$$\left.\begin{aligned}\vartheta&\approx\frac{4}{5}m\\ m&\approx\frac{5}{4}\vartheta\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

由此可见，平均误差也可作为衡量精度的指标。但在实际工作中，在 $n$ 较少的情况下，平均误差不易反映大误差的存在。就这一点来说，中误差使用起来较平均误差优越。

3）或然误差

或然误差 $\rho$ 是这样定义的：在相同的观测条件下，大于或然误差与小于或然误差的观测误差（绝对值）出现的概率各占一半。也就是说，误差出现在（$-\rho$，$+\rho$）之间的概率等于1/2（见图1-8），即

$$P(-\rho<\Delta<+\rho)=\int_{-\rho}^{+\rho}f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\frac{1}{2} \tag{1-14}$$

借助正态分布表求或然误差。$\Delta$ 服从 $N$（0，$\sigma^2$），需要进行标准化，令

$$t=\frac{\Delta-0}{\sigma}=\frac{\Delta}{\sigma}$$

则 $t$ 服从 $N$（0，1），当 $\Delta=+\rho$ 时，$t=\frac{\rho}{\sigma}$

当 $\Delta=-\rho$ 时，$t=-\frac{\rho}{\sigma}$

故

$$P(-\rho<\Delta<+\rho)=P\left(-\frac{\rho}{\sigma}<t<+\frac{\rho}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\rho}{\sigma}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)-1=\frac{1}{2}$$

$$\Phi\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)=0.75$$

查正态分布表，有 $\frac{\rho}{\sigma}=0.6745$，则

$$\left.\begin{array}{l}\rho = 0.6745\sigma \\ \sigma = 1.4826\rho\end{array}\right\} \tag{1-15}$$

我们可以把参数$\rho$（或然误差）称为50%的不确定度。

在实用上是这样求取或然误差的估值$\hat{\rho}$的：将相同条件下得到的一组误差，按绝对值的大小排列，当$n$为奇数时，取位于中间的一个误差值作为$\hat{\rho}$，当$n$为偶数时，则取中间的两个误差值的平均值为$\hat{\rho}$。在实用上，通常都是先求出中误差的估值，然后按式（1-15）求出或然误差$\hat{\rho}$，即$\hat{\rho} \approx 0.6745m$。

正如前面所述，中误差$m$比平均误差更能灵敏地反映大误差的影响，同时在计算或然误差时往往先算出$m$然后再计算$\hat{\rho}$，所以世界各国在实用上都采用中误差作为衡量精度的指标。

4）极限误差

中误差不是代表个别误差的大小，而是代表误差分布的离散程度。在相同的观测条件下所进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，因此把这一组中的每一个观测值，都视为同精度观测值。但是，这一组观测结果的真误差彼此并不相等，有的甚至相差很大，见表1-1。通过概率积分表我们可以查得，绝对值大于1倍中误差的偶然误差出现的可能性为31.7%；大于2倍中误差的偶然误差出现的可能性为4.5%；大于3倍中误差的偶然误差出现的可能性为0.3%（如图1-9所示），即

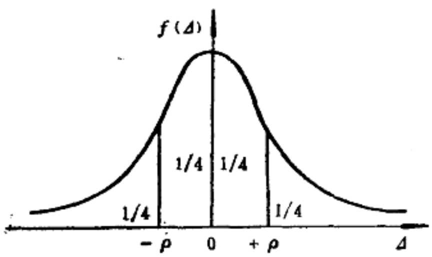


图 1-8

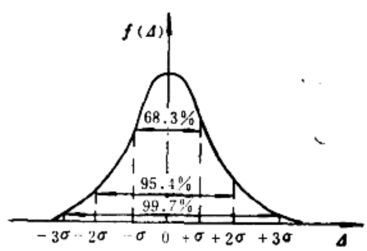


图 1-9

$$P(-\sigma < \Delta < +\sigma) \approx 68.3\%$$
$$P(-2\sigma < \Delta < +2\sigma) \approx 95.5\%$$
$$P(-3\sigma < \Delta < +3\sigma) \approx 99.7\%$$

由此可见，大于3倍中误差的偶然误差出现的可能性非常小，是概率接近于零的小概率事件。因此，通常规定三倍中误差作为偶然误差的极限值$\Delta_{限}$，并称为极限误差，即

$$\Delta_{限} = 3\sigma$$

若要求严格，也可以取2倍中误差为极限误差。实用上则以中误差估值$m$代替$\sigma$，即以$3m$或$2m$作为极限误差。

极限误差在矿山测量规范的制订和精度估算等工作中常常用到。

5）相对误差

前面谈的4种衡量精度的指标都是绝对误差，有些观测结果需要用相对误差来衡量其精度。比如距离测量中，常常采用相对中误差来衡量精度。所谓相对中误差是中误差与平

差值之比，在测量中常常把分子化为1，即用$\frac{1}{N}$表示。

关于经纬仪导线测量，规范中规定，其相对闭合差不能超过$\frac{1}{2000}$，这指的是相对极限误差；而在实测中所产生的相对闭合差，则是指相对真误差。

3．衡量准确度的指标

由前所知，影响准确度的因素不仅有观测值的随机误差分量，而且还有未经改正的系统误差引起的偏离。

我们用均方误差作衡量准确度的指标，其定义为如下的期望

$$M^2=E[(X-\widetilde{X})^2]$$

式中$\widetilde{X}$是“真”值。

若偏差定义为

$$\beta=\mu_x-\widetilde{X}$$

则运用期望的性质，可得

$$M^2=\sigma^2+\beta^2 \tag{1-16}$$

$\sigma$增大表明精度降低，同样，$M$增大也表明准确度降低了。

由式(1-16)可以明显看出：精度高并不一定意味着准确度高，例如，如果$\sigma$小而$\beta$大，则表明该观测值的精度高但准确度低。

如果$\beta=0$（即观测值无偏差），则均方误差就等于方差，且任一精度指标也就是准确度的指标。因此，如果将精度指标也用作准确度指标，则重要的是须将系统误差的影响降低到可忽略不计的程度。

## §1-4　协方差传播律

### 一、协方差与相关

如果在同一概率模型中包含了两个随机变量$X$和$Y$，则它们的联合分布函数是

$$F(x,\ y)=P[X\leqslant x,\ Y\leqslant y]$$

上式可以认为是：$X$小于或等于某一确定的值$x$，同时$Y$小于或等于$y$这一事件发生的概率。

单个随机变量的边际分布函数可以由联合分布函数得到，即

$$F(x)=P[X\leqslant x,\ Y\leqslant\infty]=F(x,\ \infty)$$

和

$$F(y)=P[X\leqslant\infty,\ Y\leqslant y]=F(\infty,\ y)$$

若$X$和$Y$是连续型随机变量，则它们的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,\ y)$$

它们的联合分布函数可用下式表示

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,\ v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1-17}$$

式中$f(u,\ v)$是联合密度函数。

还可以证明：$X$和$Y$的边际密度函数分别是