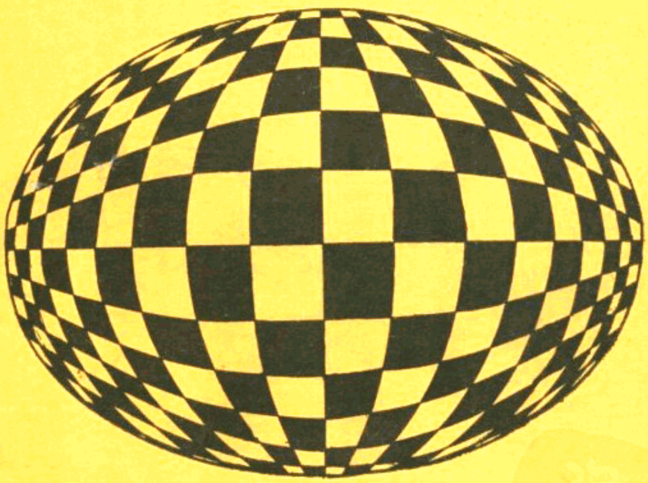
中等专业学校教材

控制测量学

（下 册）

邵 诚 主编



地质出版社

中等专业学校教材

控制测量学

（下册）

邵诚 钮绳武 蒋治鑫 编

地质出版社

内 容 提 要

本书较系统的叙述了控制测量内业计算的基础理论与基本方法，主要内容有：高斯投影、坐标换带计算，三角测量概算，条件平差，分组平差与典型图形平差，间接平差（包括含有未知量的条件平差和带有条件的间接平差），测边网与边角网平差，导线平差，高程控制网平差。

本书内容结合实际，可作为中等专业学校地形测量专业教材，可供同类专业教学及技术人员的参考。

* * *

本教材由刘昕主审，经地质矿产部中专测绘类教材编审委员会于84年9月主持召开的审稿会议审定，同意作为中等专业学校教材出版。

* * *

中等专业学校教材

控 制 测 量 学

（下 册）

邵 诚 钮绳武 蒋治鑫 编

责任编辑：孙文臣

*

地质出版社出版

（北 京 西 四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/16 印张：28. 字数：672,000

1985年11月北京第一版·1985年11月北京第一次印刷

印数：1—5,730 册 定价：5.15 元

统一书号：13038·教225

前　　言

本书根据地质矿产部中等专业学校地形测量专业四年制教学大纲编写，在原教材的基础上作了较多的修改与补充，本书是《控制测量》上册的续编，经部属中专校测绘教材编审委员会审定推荐出版。

本书较为系统的阐述了三、四等控制测量内业计算的基础理论与基本方法。第七、第八、第十三章由钮绳武同志编写；第十、第十一章由蒋治鑫同志编写；第九、第十二、第十四、第十五章由邵诚同志编写。并由邵诚同志任主编。全书由刘听同志主审，由孙文臣同志任责任编辑，由颜平、程宏勋、张峙英等同志制图。

本书加强了基本理论、基本知识和基本技能的内容，适当反映了当前生产中出现的新技术与新问题，文字叙述力求简明扼要，通俗易懂，内容的编排上考虑了教学中各课程的互相配合与衔接。部分内容仅作为学生自学的参考。

在编写过程中，我们参考了兄弟院校的教材和有关单位的文献、资料，在此谨表示感谢。

由于我们业务水平有限，加上时间仓促，一定存在缺点和错误，诚挚地希望使用本教材的同志提出宝贵意见。

编　者

一九八四年十二月

于南京地质学校控制测量教研组

目　录

第七章　参考椭球和高斯投影

第一节　控制测量内业工作概述

在《控制测量（上册）》中所介绍的内容是：为测定地面点的空间位置而建立水平、高程控制网的原理、使用的仪器、作业方法和要求等，这些内容通常称为控制测量外业。野外观测数据的归算、水平控制网的投影，以及水平、高程控制网的平差原理、方法等内容，通常称为控制测量内业，在本书一《控制测量（下册）》中阐述。

由《控制测量(上册)》的阐述中可知，地球有三个表面，即自然表面、大地水准面和参考椭球面。大地水准面处处受重力的影响，是一个极不规则的表面，无法在这个面上进行各种观测数据的处理；因此就选择了与大地体十分接近的形体一参考椭球，其表面称为参考椭球面，以此面作为一切观测数据归算的基准。在地球自然表面上测得的长度、角度都应归算到参考椭球面上，而后才可以进行各种数据的处理，如天文大地网的平差计算、大地位置正、反算，子午线弧长计算等。

在参考椭球上进行各种计算乃是十分复杂的，所以除了天文大地网平差计算外，其它等级的国家水平控制网和局部地区的水平控制网都一律在平面上计算。因此就需要把归算到参考椭球面上的长度、角度等元素化算到某一平面上去。把水平控制网的长度、角度等元素化算到平面的工作，称为水平控制网的投影。它包括了点的地理坐标换算为平面直角坐标、长度的投影和角度的投影等。把椭球面上控制网元素投影到平面，某些元素不可避免地要发生投影变形，为了不致因为投影变形过大而影响了水平控制网的精度，就必须要选择适当的投影方法。我国当前采用的是高斯正形投影。椭球面上长度投影后为水平长度，角度投影为水平角，椭球上决定点的位置的地理坐标（经度L，纬度B）将换算为平面直角坐标x、y。

在一较小的范围（如在100平方公里）内布设独立的水平控制网，可以不考虑地球表面的弯曲，而把这部份球面当作平面，就是说可以不进行投影化算。一些工程测量规范中规定，在小范围内布设水平控制网时，只需要把观测得的长度归算到测区的平均高程面上，而把这局部的水准面当做水平面，水平控制网的各元素无需再进行投影化算。

观测数据的归算，水平控制网元素的投影和方向值的归心计算等称为水平控制网概算，这部分内容将在第七、八两章内讲述。

投影到平面上的水平控制网各元素，含有偶然性误差，并且在观测值中总是含有多余观测。由于误差和多余观测的存在，使得观测元素在水平控制网中的矛盾就暴露出来。因此合理地分配观测误差，消除矛盾，评定控制网各元素的精度并求得它们的最或然值，这些工作就称为测量平差。测量平差有三种方法即：直接平差、间接平差和条件平差。本书在第七、八两章以后的各章里，就是阐述用条件、间接的平差原理、方法去解决三角网、测边网、导线网、水准网和三角高程网的平差问题。

第二节 法截线曲率半径

无论是将在地表面测得的长度、方向（角度）化算到参考椭球面上，还是将参考椭球面上的长度、方向投影到平面上，都需要知道参考椭球的一些基本的线和面。

一、法截面和法截线

（一）法截面

在图7—1中，通过椭球面上任一点M作切平面KK，过M垂直于切平面KK的直线MN，就是M点的法线。由于椭球具有轴对称性，MN与椭球的短轴相交于N。过M点的法线MN所作的平面就称为M点的法截面（简称为法面）。过MN可以作无穷多个平面，其中一个含有椭球短轴的法截面就是子午面；与子午面垂直的一个法截面称为卯酉面。子午面和卯酉面统称为主法截面。

（二）法截线

法截面与椭球的截口曲线称为法截线。过椭球面上一点的法截线也有无数个，其中两个主法截面与椭球相截而得的子午圈、卯酉圈称为主法截线。

法截面和法截线是确定椭球上长度和角度的基本的线和面。在图7—2中，椭球上M、B两点间的长度，就是依据两点间法截线的长度来确定。$\widehat{MB}$的大地方位角A，就是过M

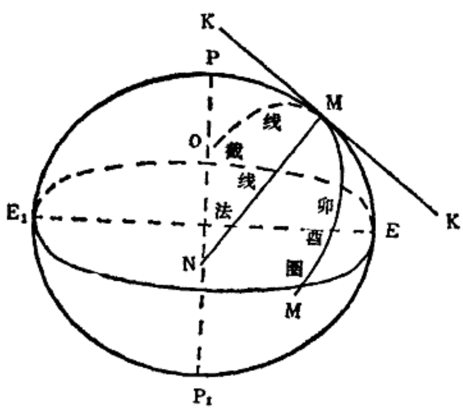


图 7—1 椭球面的法线

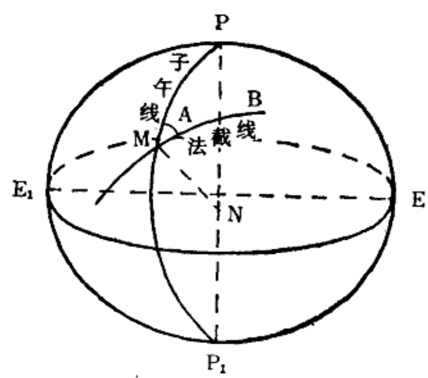


图 7—2 大地方位角

的子午面与$\widehat{MB}$方向的法截面所夹的二面角。

二、法截线曲率半径

椭球面上一点周围无穷多个法截线的曲率半径，都是不相同的，即使在同一法截线上，随着纬度的变化，不同地方的曲率半径也不相同。下面不作推证，仅列出法截线曲率半径的计算公式：

（一）主法截线曲率半径

1．子午圈曲率半径

$$M=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} \tag{7—1}$$

2． 卯酉圈曲率半径

$$N=\frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}} \tag{7—2}$$

上两式中，a 为椭球的长半轴，e 为第一偏心率，B 为某一点的纬度。从两个函数式中可以看出：M、N的值是随着纬度的增大而减少；在赤道时$B=0°$，M、N都具有最大值；在两极时$B=90°$，M、N都具有最小值并且$M=N$；在其它地方则总是$M<N$。

（二）任意方向法截线的曲率半径

$$R_A=\frac{M\cdot N}{N\cos^2 A+M\sin^2 A} \tag{7—3}$$

上式就是方位角为A的法截线曲率半径的计算公式。当$A=0$时，$R_A=M$；当$A=90°$时，$R_A=N$。在椭球面上一点D处的无穷多个法截线的曲率半径中，N是最大的曲率半径，M是最小的曲率半径，而R_A总是介于两者之间，其值的大小不仅与纬度 B 有关，并且也随着方位角A的不同而变化

（三）平均曲率半径

在较小范围的控制测量计算中，椭球上一较小的面积，可以看作是半径为R的球面，在此球面上任一点处，所有法截线的曲率半径都可以认为等于球的半径R；这样可以简化计算而又不致影响计算的精度；这个球的半径就称为平均曲率半径。它的定义是：椭球面上一点的无数法截线曲率半径算术平均值的极限值，就是它的平均曲率半径。经证明它等于两个主法截线曲率半径的几何中数即：

$$R=\sqrt{MN} \tag{7—4}$$

经计算证明：在两平行圈间间隔为200公里的地带内，可以用平均曲率半径为R的圆球代替其相应的椭球。

M、N、R的值，在控制测量计算中，是经常用到的，所以编有专用数表以供查取（见本书附录1）。

三、平行圈曲率半径

在图7—3中，r 是过A点的平行圈曲率半径，N为卯酉圈的曲率半径。由图可知，过A点的平行圈的曲率半径与A点的卯酉圈曲率半径间有以下的关系式：

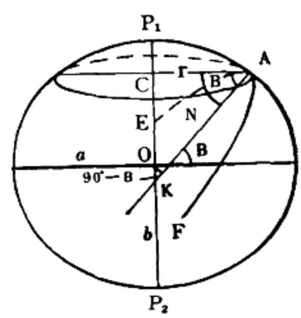


图 7—3 平行圈曲率半径P_2

$$r=N\cdot\cos B=\frac{a\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}} \tag{7—5}$$

第三节 相对法截线和大地线

参考椭球面上，两点间的距离是用大地线的长度来表示的。本节着重说明大地线的概念。

一、相对法截线

在图7—4中，设在椭球面上取不在同一子午圈和平行圈上的点A和B；过A、B两点的法线分别与短轴pp_1相交于N_1和N_2。通过AN_1含有B的法面AN_1B与过BN_2含有A的法面BN_2A不可能重合而只能相交。其交线就是A、B间所连的直线。两个法面所截得的法截线$\widehat{AaB}$和$\widehat{BbA}$也不重合而形成一狭小的二面角。这两条法截线称为相对法截线。A点法面截得的法截线AaB称为A点的正法截线，BbA为反法截线；反之，BbA是B点的正法截线，AaB为反法截线，如图7—5所示。

正反法截线的位置，由A、B两点的位置而定。如A点在B点以南（北半球而言），则A点的正法截线AaB就在反法截线BbA的南面。正反法截线的位置，可用图7—6说明。

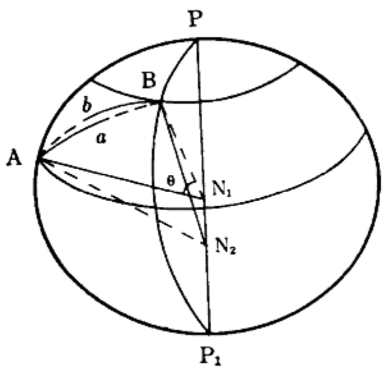


图 7—4　法面

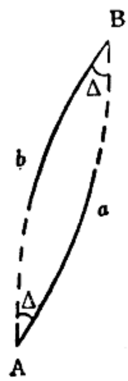


图 7—5　相对法截线

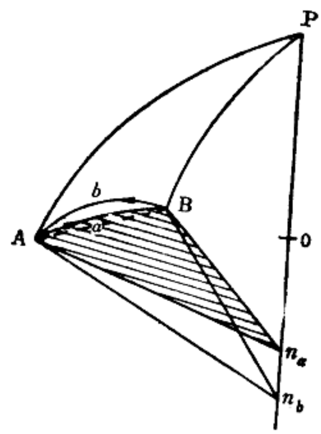


图 7—6　正反截线的位置

当A、B两点在同一子午圈或同一平行圈上时，则相对法截线重合。通常相对法截线不重合，两者所夹的小角Δ有下列数值：

当　　$S=15$公里时，$\Delta=0''.001$

$S=20$公里时，$\Delta=0''.002$

$S=30$公里时，$\Delta=0''.007$

$S=50$公里时，$\Delta=0''.01$

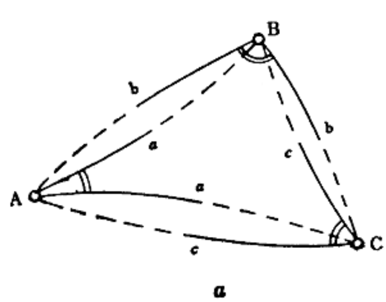


图 7—7—a　相对法截线所构成的三角形

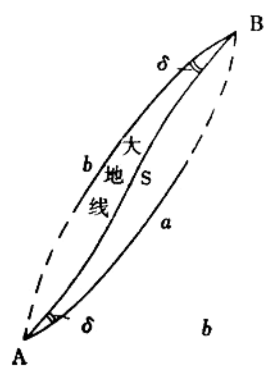


图 7—7—b　相对法截线和大地线

当$S=50$公里，$B_m=45°$，$A=45°$时，两法截线分开的最大距离为0.0008米。

从上面Δ的数值看，当距离不超过 30 公里时，可以不考虑Δ所引起的问题，而认为相对法截线是重合的；但是当两点距离较长时，则相对法截线不重合就会带来如下的问题，如图 7—7—a中，在A、B、C三个点上，由两条正法截线表示的角度，并不能构成一完整的三角形，这就造成几何图形的破裂。因此需要在相对法截线间寻求一条合适的曲线，以代替相对法截线。经理论证明，这一合适的曲线就是介于相对法截线之间的大地线。

二、大　地　线

平面上两点间最短的线是直线，在球面上两点间最短的线是大圆弧，在椭球面上两点间最短的线是大地线。假设椭球面没有任何磨擦力，在椭球面上两点间紧拉一条细线，则此细线的位置就和大地线一致。

大地线是一条曲线，其长度可以用下式计算：

$$S=\frac{\sigma''}{\rho''}N_1 \qquad (7—6)$$

式中：σ''是椭球面上两点间大地线弧长S所对应的中心角；

N_1是大地线端点上卯酉圈曲率半径。

大地线的形状如图7—7—b所示，是介于相对法截线之间的一"S"形曲线。两端与正法截线的交角为δ，其大小约为正、反法截线交角△的三分之一。大地线与法截线的长度之差甚微，实际上可以不必考虑两者之差。

由控制测量上册中已知：大地经纬度决定了地面点在椭球面上的绝对位置；大地方位角则决定了椭球面上两点间大地线的方向；大地线和由它们所构成的球面角是组成椭球面上大地控制网的基本元素。已知A点的大地经纬度L_A·B_A和A到B的大地方位角A_{ab}以及AB大地线的长度S_{ab}，就可以计算出B点的大地经纬度L_B、B_B。这种计算称为大地位置正算；反之，若已知A、B两点的大地经纬度，解算出A、B两点间的大地方位角和大地线的长度，这就称为大地位置反算。

关于大地位置正、反算的知识，本书不作介绍。

第四节　观测值的归算

水平控制网的长度、角度元素，是在地球的自然表面测得的，但地球的自然表面高低起伏十分复杂，所以必须把观测得的长度、角度归算到一规整的数学表面一参考椭球面上去，在参考椭球面上才能作统一的数据处理。下面主要阐述观测方向值和长度值归算的概念。

一、天文方位角归算为大地方位角

天文经纬度和天文方位角是用天体定位的方法直接测得，大地经纬度和大地方位角则只能由大地原点和起始方位角经大地网的各元素推算而得。显然，天文方位角与大地方位角是有差异的，但是只要知道了一点上的相对垂线偏差，就可以把天文方位角化算为大地方位角。所以在大地测量法式中规定，在布设一、二等三角网(或导线网)时，每隔一定的距

离要测定天文经纬度和天文方位角，其目的就是为了计算相对垂线偏差，以满足方向、长度归算的需要和把天文方位角化算为大地方位角。

相对垂线偏差的计算公式为：

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\varphi-B\\ \eta&=(\lambda-L)\cos\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{—}7)$$

式中：ξ——垂线偏差在子午圈上的分量

η——垂线偏差在卯酉圈上的分量

天文方位角α和大地方位角A的关系式为：

$$A=\alpha-(\lambda-L)\sin\varphi\qquad(7\text{—}8)$$

或

$$A=\alpha-\eta\cdot\mathrm{tg}\,\varphi\qquad(7\text{—}9)$$

（7—8）和（7—9）式就是通常所说的拉伯拉斯方程式。由实测的天文方位角，通过上两式算得的大地方位角，就称为拉伯拉斯方位角。一、二等三角网（锁）的起始方位角就是这样得到的。

二、观测方向值的归算

把在地球自然表面测得的方向归算到参考椭球面上，需加三项改正数即：垂线偏差改正、标高差改正和截面差改正，通常称为“三差改正”。

（一）垂线偏差改正

在地面进行方向观测时，仪器的垂直轴是与测站上铅垂线方向一致，因此测得的水平角是以铅垂线为棱由两铅垂面构成的二面角。而在椭球面上的角度，是以过测站的法线为棱由两法面构成的二面角。同一测站点上，铅垂线和法线是不一致的，因此由铅垂面和由法面构成的二面角也不会相等而有少许的差异，这种差异与经纬仪因竖轴不垂直而引起的测角误差相似。

归纳以上所述后得出：把以铅垂线为依据的观测方向化为以法线为依据的方向所加的改正数，称为垂线偏差改正，以δ_1表示。计算公式为

$$\delta_1=-(\xi_i\cdot\sin A_{in}-\eta_i\cos A_{in})\mathrm{ctg}z_{in}\qquad(7\text{—}10)$$

式中：i——测站点点号；

n——照准点点号；

ξ_i——测站点上垂线偏差在子午圈上的分量；

η_i——测站点上垂线偏差在卯酉圈上的分量；

A_{in}——测站点i至照准点n的大地方位角；

Z_{in}——测站点i至照准点n的天顶距。

（二）标高差改正

讨论本项改正时，认为已经过垂线偏差的改正。

在图7—8中，C是测站点，B是照准点，B位于椭球面以上的地表面。B点的大地高连同觇标高为H_B；过B的法线Bn_b交椭球面于B_1，B_1就是B化算到椭球面上的位置。CB归算到椭球上的方向为CB_1。CB_1的大地方位角为A。但是在实际观测时，过测站C照准B的法面与椭球面相截的曲线为CB_2，这是实测的方向；CB_1与CB_2相差的小角度δ_2就称为标高差改正。δ_2的计算公式为：

$$\delta_2 = H_B(1)_B \frac{e^2}{2} \sin 2A_{CB} \cos^2 B_B$$

式中：H_B——B点的大地高与觇标高之和；

$(1)_B = \frac{\rho'}{M}$——为B处的第一基本大地值，以B_B为引数，在大地位置计算用表中查取；

B_B——B点的大地纬度（概值）；

A_{CB}——测站C到照准点B的大地方位角；

e——参考椭球的第一偏心率。

由公式可以看出，标高差的大小主要受照准点高程的影响，若CB同在 椭球 上，则标高差改正为零。

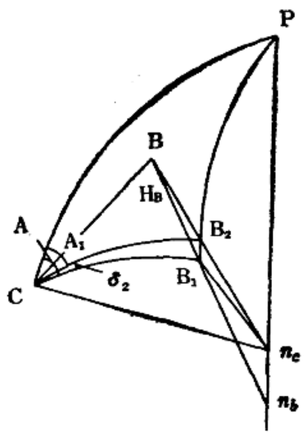


图 7—8　标高差改正

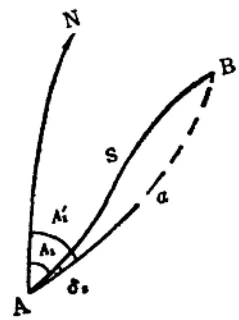


图 7—9　截面差改正

在实用上，往往在上式中设

$$H_B(1)_B \frac{e^2}{2} \cos^2 B_3 = K_1$$

则

$$\delta_2 = K_1 \cdot \sin 2A_{CB} \tag{7—11}$$

K_1值可以照准点的高程H_B（单位为米）和照准点的纬度B_B为引数，从专用表中查取。

（三）截面差改正

将正法截线方向改化为大地线方向的改正，称为截面差改正，用δ_3表示。

由第七章第三节的阐述可知，椭球面上三角形是大地线所构成，而实测的方向值（已经过垂线偏差和标高差改正）是正法截线方向，如图7—9中的AaB方向，它与大地线ASB方向相差一小角度δ_3即为截面差改正，计算公式如下：

$$\delta_3 = -\frac{e}{12\rho''} S^2 (2)_a^2 \cos^2 B_a \sin 2A_1$$

式中：$(2)_a = \frac{\rho''}{N_m}$——为$A$、$B$两点间中纬度处的第二大地值；

S——A、B两点间的距离；

B_a——A点的大地纬度（概值）；

A_1——A到B点的大地方位角。

在实用上，在上式中设

$$K_2=\frac{e^2S^2}{12\rho''}(2)^2_a\cos^2B_a$$

则

$$\delta_3=-K_2\sin2A_1 \tag{7—12}$$

K_2值可查表。

三差改正数都是些较小的数值，是否所有等级的方向观测值都需要改正，则要根据具体情况而定。

现简单地讨论三差改正的情况。

（四）三差改正数的大小

1．垂线偏差改正　设$A=0°$，$\mathrm{ctg}z=0$

当$\xi=\eta=5''$时，$\delta_1=0''.05$

当$\xi=\eta=10''$时，$\delta_1=0''.1$

由以上所列数值可知，当在垂线偏差较大的地区作业时，即使进行三等三角测量或布设精度较高的工程控制网时，垂线偏差对角度观测的影响也不可忽视，而应加垂线偏差改正。

2．标高差改正　设$A=45°$，$B=45°$

当$H=200\text{m}$时，$\delta_2=0''.01$

$H=1000\text{m}$时，$\delta_2=0.05$

$H=2000\text{m}$时，$\delta_3=0''.1$

3．截面差改正　设$A=45$，$B=45°$

当$S=30\text{km}$时，$\delta_3=0''.001$

$S=60\text{km}$时，$\delta_3=0''.05$

由以上在一定的条件下算得的三差改正值的大小来看：δ_1、δ_2数值较大，δ_3数值较小。所以通常规定在一等角度观测中，应加三差改正；二等角度观测中，应加垂线偏差改正和标高差改正；当H大于2000米，垂线偏差分量大于$10''$时，即使在三、四等角度观测中，也应加垂线偏差改正和标高差改正。

三、实测长度归算到椭球面

实测长度的归算原理，控制测量上册中已作阐述，这里仅列出计算公式。

（一）基线尺量距的归算

用铟瓦尺丈量得的基线长度，加倾斜改正后已化算到基线场的平均水准面上，再将此水平长度化算到参考椭球面上的改正数按下式计算：

$$\left.\begin{aligned}\Delta S&=-\frac{H_m+\Delta h}{R_A+H_m+\Delta h}S_0\\ S&=S_0+\Delta S\end{aligned}\right\} \tag{7—13}$$

式中：S——椭球面上的长度；

S_0——在高度为H_m的水准面上实测的长度；

H_m——基线对于似大地水准面的平均高程；

Δh——高程异常；

R_A——基线方向的法截线曲率半径。

（二）电磁波测距的归算

把电磁波测距仪测得的斜距归算到椭球面上，其严密的计算公式为：

$$S=\frac{R_A d_0}{R_A+H_m}+\frac{d_0^3}{24R_A^2}+\frac{3d_0^2}{4R_A^2}H_m e'^2\sin2B_a\cos A_{ab} \quad (7—14)$$

式中：$d_0=\sqrt{d^2-\Delta H^2}$（$d$ 为实测的斜距）；

$H_m=\frac{1}{2}(H_a+H_b)$（H_a、H_b为A、B 点的大地高）；

$\Delta H=(H_b-H_a)$；

A_{ab}——基线的大地方位角；

B_a——测站A的大地纬度；

R_A——测线方向法截线曲率半径。

第五节　用勒戎德定理解球面三角形

为了简化外业的验算工作，“三角测量规范”中规定，外业成果的验算可以在椭球面上进行。可是在球面上解算三角形是不方便的，而应用勒戎德定理，就可以用解平面三角形的方法来解算球面三角形。

在三角测量中，因为三角形的边长与椭球的半径相比是很小的，所以在进行外业验算时可以把椭球面上的三角形看成为球面三角形。球的半径就采用这部分椭球的平均曲率半径即R＝$\sqrt{MN}$。构成球面三角形各边的都是大圆弧。以下讨论问题将按以上的论点为前提。

一、球面角超

球面三角形三内角之和超出180°的部分称为球面角超，以ε表示它。计算公式推导如下：

在图7—10中，设球面三角形的面积为Δ'，全球的面积为E，球的半径为R；则全直角三角形的面积为$E/8$，内角和为270°，故它的球面角超为$\pi/2$。因为球面三角形面积与它的球面角超成正比，故有：

$$\varepsilon:\frac{\pi}{2}=\Delta':\frac{E}{8}$$

$$\varepsilon=\frac{4\pi}{E}\Delta'$$

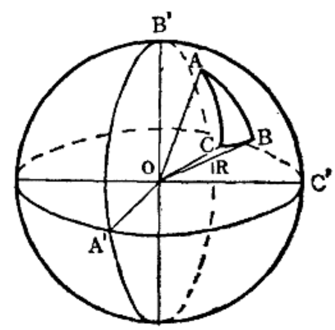


图 7—10　球面三角形

以$E=4\pi R^2$代入上式则有：

$$\varepsilon=\frac{\Delta'}{R^2}$$

由于球面三角形的面积和边长与整个地球的面积和半径相比是很小的，所以Δ'可以按平面三角形的面积计算公式来计算即：

$$\Delta' = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A$$

代入前式则有：

$$\varepsilon = \frac{1}{2R^2} b \cdot c \sin A$$

化为角秒单位则有：

$$\varepsilon'' = \frac{\rho''}{2R^2} b \cdot c \sin A$$

令 $f = \frac{\rho''}{2R^2}$（f 可用纬度为引数，查专用表求得）

则有：

$$\varepsilon'' = f \cdot a \cdot b \cdot \sin A \tag{7—15}$$

在外业进行三角形闭合差验算时，应将椭球面上三角形三内角之和减去180°再减去球面角超，其结果才是平面三角形的闭合差。

二、用勒戎德定理解球面小三角形

勒戎德定理的内容是：当球面三角形的三边与另一平面三角形的三边对应相等时，球面三角形的各内角分别减去$\varepsilon''/3$就是平面三角形中相对应的平面角。在图7—11中，表示了球面三角形ABC与平面三角形$A_1B_1C_1$各对应角的关系为：

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A - \frac{1}{3}\varepsilon'' \\ B_1 &= B - \frac{1}{3}\varepsilon'' \\ C_1 &= C - \frac{1}{3}\varepsilon'' \end{aligned}\right\} \tag{7—16}$$

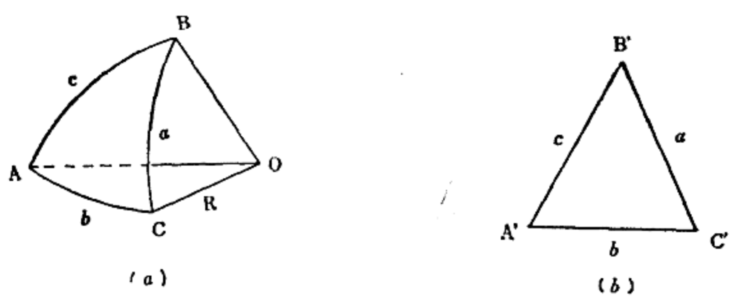


图 7—11　勒戎德定理

两个三角形的对应边长的关系为

$$\left.\begin{aligned} AB &= c = A_1B_1 \\ BC &= a = B_1C_1 \\ CA &= b = C_1A_1 \end{aligned}\right\} \tag{7—17}$$

显然，球面三角形应用勒戎德定理将三个内角化为平面角后，就可以用平面三角学