高中数学专题训练

谢国生　杨　光编

广东教育出版社

高中数学专题训练

谢国生　杨光　编

广东教育出版社出版
广东省新华书店发行
惠阳印刷厂印刷
787×1092毫米32开本 18.375印张 插页2 360,000字
1986年6月第1版 1985年1月第1次印刷
印数1—32,450册
书号 7449·96　定价2.65元

前　言

怎样才能有效地提高高中数学学习的质量？这是当前高中学生在学习中急待解决的问题．总结多年来中学数学教与学的经验，我们认为，进行专题训练是一种行之有效的方法．它能够突出重点，攻破难点，减轻学生负担，帮助大家从题海中解脱出来，从而进一步提高学习质量．

本书根据教学大纲要求，紧扣现行中学数学课本内容．它具有如下几个特点：

（1）以专题训练带动全面，即把中学数学知识归纳为二十一个专题，通过逐一的训练，首先帮助读者巩固基础知识，掌握解题的基本方法和一般技巧．然后使读者能灵活地运用这些知识、方法与技巧去解综合题．

（2）以训练为主．本书编入大量训练思维、培养能力的例题与习题．通过有计划、有目的的训练，以达到温故知新的目的．

（3）为适应“标准化”命题考试的需要，本书专题向读者介绍了解答选择题的步骤与方法，书中还精选了相当数量的“标准化”题目，供读者练习．

（4）书末选编了七套综合训练题目，供读者自我测试．

本书的第一至第十一专题由杨光编写，第十二至第二十一专题由谢国生编写．

由于编者水平有限，书中错漏难免，敬请读者指正．

编　者

目　录

第一部分　代　数

第一专题　数与代数式

一、复习提要

1．了解数的概念的扩展，加深对实数概念及性质的理解，掌握数的运算律和运算法则，能准确地进行实数的运算.

2．熟悉复数的有关概念和性质，如：i的整数幂的周期性，复数相等的条件，模、幅角与共轭复数的概念，复数的几何表示方法.

3．掌握复数的代数式和三角式的互化，能熟练地进行复数的加、减、乘、除、乘方、开方运算．理解复数运算的几何意义，并能运用它解决有关实际问题.

4．掌握因式分解的主要方法：提取公因式法、公式法、十字相乘法、配方法、求根法、分组分解法、待定系数法等，能熟练地在不同数集内进行多项式的因式分解.

5．掌握单项式、多项式、分式、根式、指数式和对数式的有关概念、性质及其运算法则，并能熟练、准确地进行代数式的恒等变形.

二、复习举例

例 1．已知：实数 x、y、z 满足：

$$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0.$$

求：$(z+y)^x$ 的值.

解：原式化为：

$$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

则 $\frac{1}{2}|x-y|=0$，$\sqrt{2y+z}=0$，$z-\frac{1}{2}=0$，

$\therefore z=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{4}$，$x=-\frac{1}{4}$.

则 $(z+y)^x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$

说明：实数的绝对值、算术根、平方数均为非负实数，本题利用了实数的性质："若干个非负实数的和为零时，则每个非负实数均为零"来求得 x、y、z 的值.

例 2．若 $ad-bc=1$，则 $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq1$.

证明：（用反证法）

假设 $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=1$.

$\because ad-bc=1$，

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd=ad-bc.$

全式乘 2 并分组配方得：

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d-a)^2=0.$$

则　$a=-b$，$b=-c$，$c=-d$，$d=a$。

$\therefore ad-bc=-b\cdot d-b\cdot(-d)=0$。

这与已知相矛盾，$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1$.

例3．试证 $\lg\frac{6}{7}$是一个无理数.

证明：$\because$ $\lg\frac{6}{7}<0$，假设 $\lg\frac{6}{7}$是一个有理数，设

$\lg\frac{6}{7}=-\frac{p}{q}$（$p$、$q\in z^+$ 且 p、q 互质），

则$10^{-\frac{p}{q}}=\frac{6}{7}$，$\therefore 10^p=\left(\frac{7}{6}\right)^q$.

$\therefore 10^p\cdot(2\cdot3)^q=7^q$，即 $2^{p+q}\cdot3^q\cdot5^p=7^q$.

$\because$上式左边含有质因数2、3、5，而右边含有质因数7，不成立.

$\therefore \lg\frac{6}{7}$不可能是有理数，故一定是无理数.

例4．计算：

$$\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{1984}+\frac{(4-8i)^2-(-4+8i)^2}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

解：原式$=\frac{(-2\sqrt{3}+i)(1-2\sqrt{3}i)}{(1+2\sqrt{3}i)(1-2\sqrt{3}i)}+\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right]^{992}$

$$+\frac{(4-8i)^2-(4-8i)^2}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{13i}{13}+\left(\frac{2}{2i}\right)^{992}+0$$

$$=i+\left(\frac{1}{i}\right)^{992}=i+(-i)^{992}=i+1$$

说明：本题应用了 i 的整数幂的周期性。

例 5．计算：$\dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^{15}-(1+\sqrt{3}\,i)^{6}}{(1+i)^{12}}$

解：

$$\text{原式}=\frac{\left[-2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{15}-\left[-2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{6}}{[(1+i)^{2}]^{6}}$$

$$=\frac{(-2)^{15}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3}\right]^{5}-(-2)^{6}\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3}\right]^{2}}{(2i)^{6}}$$

$$=\frac{(-2)^{15}\cdot 1^{5}-(-2)^{6}\cdot 1^{2}}{2^{6}(-1)}=\frac{(-2)^{6}[(-2)^{9}-1]}{2^{6}(-1)}$$

$$=\frac{-512-1}{-1}=513.$$

说明：注意利用 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是 1 的立方根及 $(1\pm i)^{2}=\pm 2i$ 的性质来化简。

例 6． x 为哪些实数时，

$[1+\cos(-x)-i\sin(-x)]^{1984}$ 是实数？

解：原式$=(1+\cos x+i\sin x)^{1984}$

$$=\left(2\cos^{2}\frac{x}{2}+2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^{1984}$$

$$=2^{1984}\cos^{1984}\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)^{1984}$$

$$=2^{1984}\cos^{1984}\frac{x}{2}\left(\cos\frac{1984}{2}x+i\sin\frac{1984}{2}x\right).$$

要使原式的值为实数，当且仅当 $\cos\frac{x}{2}=0$ 或 $\sin\frac{1984}{2}x=0$，即 $x=(2k+1)\pi$ 或 $x=\frac{m\pi}{992}$（k、$m\in z$）.

例 7．设实系数三次方程 $x^3+px+1=0$ 的三个根在复平面上构成等边三角形，求 p 的值，并解此方程.

解：因为实系数三次方程至少有一个实根，但从该条件来看，不可能都是实根，否则在复平面上不能构成等边三角形.

设方程的三根为：α，$a+bi$，$a-bi$（α、a、b 为实数）．则：

$$(x-\alpha)[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$$

$$=x^3+px+1,$$

$$\therefore \begin{cases} a+bi+a-bi+\alpha=0 \\ (a+bi)(a-bi)\cdot\alpha=-1, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha=-2a \\ \alpha(a^2+b^2)=-1. \end{cases} \quad 即 \begin{cases} \alpha=-2a & (1) \\ a(a^2+b^2)=\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$\because$ 三根在复平面上构成等边三角形，

$$\therefore |-2a-(a+bi)|=|-2a-(a-bi)|$$

$$=|(a+bi)-(a-bi)|.$$

$$\therefore |-3a-bi|=|-3a+bi|=|2bi|.$$

$$\therefore 9a^2+b^2=4b^2，即 b^2=3a^2 \qquad (3)$$

把 (3)代入(2)得：$4a^3=\frac{1}{2}$，$\therefore a=\frac{1}{2}$，$b=\pm\sqrt{3}\,a$

$= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$方程的三根为：-1，$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

$\because -1$是方程 $x^3+px+1=0$的根，$\therefore p=0$.

例8. 已知：复数z满足$\left| z+\frac{1}{z} \right| = 1$，且$z$的幅角为Q.

求证：(1) $k\pi + \frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in z)$

(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant |z| \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

证明：(1) 设 $z=\gamma(\cos\theta + i\sin\theta)$.

$\because \left| z+\frac{1}{z} \right| = 1$，即$\left| \gamma(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{\gamma(\cos\theta + i\sin\theta)} \right| = 1$，

即$\left| \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)\cos\theta + i\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\sin\theta \right| = 1$，

$\therefore \sqrt{\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)^2\cos^2\theta + \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^2\sin^2\theta} = 1$，

$\therefore \left(\gamma^2+2+\frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\theta + \left(\gamma^2-2+\frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\theta = 1$，

即 $\gamma^2 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{\gamma^2} = 1$，　　$\because \gamma \neq 0$，

$\therefore \gamma^4 + (2\cos 2\theta - 1)\gamma^2 + 1 = 0$.

$\because \gamma \in R$，$\therefore$ 判别式$\triangle = (2\cos 2\theta - 1)^2 - 4 \geqslant 0$，

即 $(2\cos 2\theta-1+2)(2\cos 2\theta-1-2)\geqslant 0$.

又$\because 2\cos 2\theta-3\leqslant 0$，$\therefore 2\cos 2\theta+1\leqslant 0$。

$\therefore \cos 2\theta\leqslant -\frac{1}{2}$，　即$2k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant 2\theta\leqslant 2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in z)$.

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant \theta\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in z)$.

(2) 设 $z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$. $\because \left|z+\frac{1}{z}\right|=1$,

由(1) 已证得：$\gamma^2+2\cos 2\theta+\frac{1}{\gamma^2}=1$,

即 $\gamma^2+\frac{1}{\gamma^2}=1-2\cos 2\theta$.

$\because -1\leqslant\cos 2\theta\leqslant 1$，　$-3\leqslant 1-2\cos 2\theta\leqslant 3$,

$\therefore 0<\gamma^2+\frac{1}{\gamma^2}\leqslant 3$，即 $\gamma^4-3\gamma^2+1\leqslant 0$.

解得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant\gamma^2\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

即 $\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\leqslant\gamma^2\leqslant\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$，转为解不等式组：

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} \\ \gamma\geqslant\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}\text{或}\gamma\leqslant-\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} \end{cases}$$

解得$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

或$-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\leqslant\gamma\leqslant-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\because\gamma>0$，舍去）

故有$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

例 9．在复平面内，有 P(4＋3 i）和 Q(－3－4 i）两点，将此平面沿虚轴折成直二面角时，求 OP 与 OQ 间的夹角.

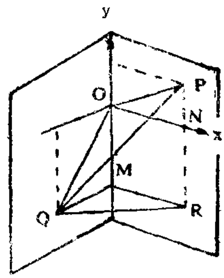

图 1-1

分析：如图1—1，要求OP与OQ间的夹角α，可归结为解三角形POQ，而|OP|，|OQ|可求，所以问题的关键是如何求 PQ．又由于二平面折成直二面角，自然想到需作出平面角∠QMR，而在直角三角形 MQR中，利用勾股定理可求出QR，则PQ就不难求出来了.

解：过Q点作QM⊥y轴于M，过M点作 MR∥x轴，与PN延长线交于R，则∠QMR＝90°．在R_t△QMR中，根据勾股定理，求得QR＝5又OM⊥平面MQR，而PR∥OM，∴PR⊥平面MQR，∴PR⊥QR．在R_t△PRQ中，PR＝7，QR＝5，则由勾股定理得：

$$PQ^2=PR^2+QR^2=7^2+5^2=74.$$

故在△OPQ中，由余弦定理，得

$$\cos\alpha=\frac{OP^2+OQ^2-PQ^2}{2\cdot OP\cdot OQ}=\frac{5^2+5^2-7^4}{2\cdot5\cdot5}=-\frac{12}{25},$$

$$\therefore\quad\alpha=\pi-\arccos\frac{12}{25}.$$

例10. 如图 1—2，在复平面上的三个点O、A、B分别表示复数O，$\omega-Z$，$\omega+Z$，其中$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$．求复数Z和以O为直角顶点的等腰直角三角形AOB的面积.

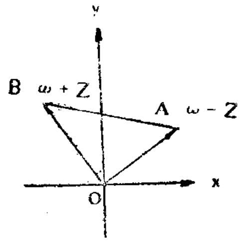

图 1-2

解： ∵OA⊥OB，根据复数乘除法的几何意义，

$$\therefore\quad \omega+Z=(\omega-Z)(\cos 90^\circ \pm i\sin 90^\circ)=(\omega-Z)\cdot(\pm i)$$

$$\therefore\quad Z=\frac{-(1\mp i)}{1\pm i}\omega=\frac{-(1\mp i)^2}{2}\omega=\pm\omega i$$

$$=\pm\left(-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

即 $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$．

$$\therefore\quad \triangle OAB\text{的面积}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}|\omega+Z|\cdot|\omega-Z|.$$

$$\because\quad |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|\text{，即}|\omega-Z|=|\omega+Z|.$$

故只须取 $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，

$$\therefore\quad \omega+Z=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i.$$

$$\therefore\quad |\omega+Z|=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}{4}}=\sqrt{2}.$$

$\therefore$ $\triangle OAB$面积$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$ （平方单位）。

说明：要注意运用复数乘除法的几何意义来解决几何问题.

例11. 分别在有理数、实数、复数范围内分解因式：$x^5y-x^3y+2x^2y-xy$.

解：$x^5y-x^3y+2x^2y-xy$

$=xy(x^4-x^2+2x-1)=xy[x^4-(x-1)^2]$

$$\begin{cases}=xy(x^2+x-1)(x^2-x+1)\text{（在有理数范围）}\\ =xy\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)(x^2-x+1)\\ \qquad\text{（在实数范围）}\\ =xy\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\end{cases}$$

$\cdot\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$（在复数范围）

说明：将多项式因式分解，首先要看在什么数域内进行. 若题日没有声明时，一般是在有理数范围内进行分解.

例12. 分解因式：$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$.

解法一：原式$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$

$$x=\frac{4(y+1)\pm\sqrt{16(y+1)^2+4\times4\times(3y^2-10y+3)}}{2\times4}$$

$$=\frac{4y+4\pm8(y-1)}{8}$$

$x_1=\frac{3y-1}{2}$, $\quad x_2=\frac{3-y}{2}$.

$$\therefore 原式=4\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left(x-\frac{3-y}{2}\right)$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

解法二： 原式$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$

$$=4x^2-4(y+1)x-(3y-1)(y-3) \qquad \begin{array}{ccc} 2x & & -3y+1 \\ & \times & \\ 2x & & y-3 \end{array}$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

解法三： $\because \quad 4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$

$$=(2x-3y)(2x+y)-4x+10y-3$$

设原式$\equiv(2x-3y+l)(2x+y+m)$

$$\equiv 4x^2-4xy-3y^2+2(l+m)x$$

$+(l-3m)y+lm.$ 利用“多项式的恒等定理”，对比相应项系数，得：

$$\begin{cases} 2(l+m)=-4 \\ l-3m=10 \\ lm=-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} l=1 \\ m=-3 \end{cases}.$$

$$\therefore \quad 4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

说明： 解法一是用求根法分解；解法二是用十字相乘法分解；解法三是用待定系数法分解.

例13. 求证：$f(x)=x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}$. 能被$x^4+x^3+x^2+x$整除.

证明： $x^4+x^3+x^2+x=x(x^3+x^2+x+1)$

$$=x[x^2(x+1)+(x+1)]=x(x+1)(x^2+1)$$

$= x(x+1)(x+i)(x-i)$.

而 $f(0)=0$， $f(-1)=(-1)^{4444}+(-1)^{3333}+(-1)^{2222}$

$+(-1)^{1111}=1-1+1-1=0$，

$f(-i)=(-i)^{4\times1111}+(-i)^{4\times833+1}+(-i)^{4\times555+2}$

$+(-i)^{4\times277+3}=1-i-1+i=0$，

$f(i)=i^{4\times1111}+i^{4\times833+1}+i^{4\times555+2}+i^{4\times277+3}$

$=1+i-1-i=0$，

根据因式定理，则：$f(x)$可以同时被x、$x+1$、$x+i$、$x-i$整除，即是$f(x)$能被$x^4+x^3+x^2+x$整除.

例14. 求$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 的算术平方根.

解：原式$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)+1$

$=(x^2+5x+5)^2$.

(1) 当$x^2+5x+5\geqslant 0$，即 $x\geqslant\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$或

$x\leqslant\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$时，$\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$

$=x^2+5x+5$；

(2) 当 $x^2+5x+5\leqslant 0$，即$\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$

时，$\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$

$=-(x^2+5x+5)$.