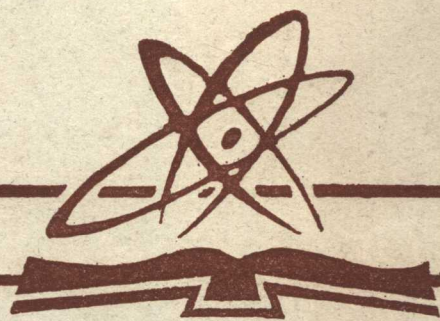


数字信号处理

南京工学院

陈永彬 主编

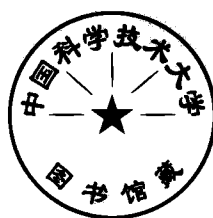
国防工业出版社



数 字 信 号 处 理

南 京 工 学 院

陈 永 彬 主 编



国 防 工 业 出 版 社

数字信号处理

南京工学院

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第074号
解放军第七二二六工厂印刷 内部发行

*

787×1092¹/₁₆ 印张25 588千字

1980年12月第一版 1980年12月第一次印刷 印数 1-5,000 册

统一书号: N15034 (四教42) 定价 2.60 元

内 容 简 介

本书是根据电子仪器与测量专业教材会议通过的《数字信号处理》编写大纲修改而编写的。

全书共分五章。第一章导论与数学基础，介绍离散信号与系统、 z 变换和离散傅里叶变换等内容；第二章数字滤波器，介绍 I. I. R. 和 F. I. R. 滤波器的设计、数字滤波器的计算机辅助设计和数字滤波器的实现；第三章数字谱分析，介绍确定性信号和随机性信号的谱分析；第四章二维数字信号处理；第五章数字信号处理仪器与测量方法，主要介绍国产 HA-1型 F. F. T. 信号分析系统。

本书前四章着重讨论数字信号处理的基础理论，因而不包括数字实现的许多细节和计算机的程序等。

本书主要用为电子仪器与测量专业选修教材，电子类其它专业也可选用，此外，本书也可作为从事该领域工作的技术人员的参考书。书中附有复习题和习题，可帮助读者自学。

前 言

本书是全国高等院校工科电子类电子仪器与测量技术专业统编教材之一。

本书主要介绍数字信号处理技术的理论基础问题,也介绍一些在电子仪器中的应用概况。

目前无线电技术类各专业的技术基础课程中都已有了离散信号与系统方面的基本论述。在这基础上,本书第一章适当地扩充了离散信号与系统以及 z 变换的内容,并增加了离散傅里叶变换这一重要的基础知识。

数字信号处理的主要研究对象是数字滤波器和数字谱分析两个部分。这在本书第二章和第三章中加以重点介绍。

第二章中先介绍 $I.I.R.$ 和 $F.I.R.$ 两种类型数字滤波器的设计问题。 $I.I.R.$ 滤波器的设计主要是从模拟滤波器变换而得到的。因而,首先介绍了几种变换方法和几种常用模拟滤波器的特性;然后再介绍具体设计;最后介绍从低通型变换为高通型等其它类型滤波器的问题。关于 $F.I.R.$ 滤波器的设计,先介绍这种数字滤波器的特点——线性相位特性问题;再介绍两种设计方法。其次,本章进而介绍了近年来发展起来的数字滤波器的计算机辅助设计问题。最后,本章简单介绍了数字滤波器的实现问题,其中主要是寄存器有限字长对数字滤波器性能的影响。在这一章中,若读者已有模拟滤波器的基础知识,则§2-1-2节可不必讲授;若受学时限制,则§2-3节亦可不必讲授;若只着重于数学模型的研讨,则§2-4节亦可作某些删减。

第三章中介绍了确定性信号和随机性信号的数字谱分析。在这一章中首先介绍广泛应用于数字信号处理中的快速傅里叶变换算法及其部分新发展,这是进行数字谱分析的基本工具。在讨论随机信号谱分析之前又复习了随机离散信号的统计特性;若读者已具备随机信号的有关知识,则§3-3节内容亦可作较大删减。

数字信号处理的另一重要内容是二维数字信号处理问题,这在某些技术领域(如声学、语言、地震勘探、图象处理等)中都已得到应用。本书第四章着重介绍这些技术领域中所用的二维变换和滤波的内容,同时也简单介绍了同态滤波技术及其实例。

本书第五章专门介绍数字信号处理在电子仪器方面的应用。这方面的发展也是非常迅速的,限于篇幅只介绍了几种典型仪器;其中主要介绍国产的HA-1型信号分析系统。若读者并非从事电子仪器专业的,这一章内容可以删减。

根据上述内容,本书也可作为无线电技术类各专业的一门有关离散信号与系统的选修课程教材,安排在有关专业课程(如数字通信原理、雷达信号的数字处理、水声信号处理……)之前讲授较为合适。本书全部讲授约70小时。

本书第一、二、三、五章由陈永彬同志编写,其中§5-1节由中国科学院声学研究所宗杰琨、蒋银林同志编写,第四章由沈祝平同志编写,部分习题由张竹繁同志选编。全书由陈永彬同志主编。

西安交通大学无线电二系邹理和、蔡元龙、范丽娟等同志参加了审稿，由邹理和同志任主审。对初稿提出了不少宝贵意见。我们还邀请国内有关高等院校、工厂、研究所的同志们对本书内容进行过集体研讨。我们特约请李永和同志担任本书的编辑工作。在编写过程中，南京工学院管致中、何振亚、沈永朝、李潜生等同志也都提过宝贵意见。我们对上述单位及个人表示深切谢意。

限于编者水平，书中难免有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编 者

一九八〇年二月

目 录

第一章 导论和数学基础

§ 1-0 引 言	(1)
§ 1-1 离散信号与系统	(3)
1-1-1 序列——时域离散信号	(3)
1-1-2 线性移不变离散系统	(5)
1-1-3 时域表示——差分方程	(7)
1-1-4 频域表示——频率响应	(10)
1-1-5 取样和内插	(16)
§ 1-2 z 变换	(19)
1-2-1 z 正变换	(19)
1. z 变换的定义	(20)
2. 常用序列的 z 变换	(21)
3. z 变换的收敛区域与序列的关系	(22)
1-2-2 z 反变换	(27)
1. 围线积分与极点留数法	(28)
2. 幂级数展开法	(30)
3. 部分分式展开法	(31)
1-2-3 z 变换的性质	(31)
1. 线性特性	(31)
2. 移序特性	(32)
3. 收敛区域移动特性	(33)
4. z 变换的微分特性	(33)
5. 初值特性	(34)
6. 序列卷积特性	(34)
7. 序列乘积特性	(36)
1-2-4 z 域表示——系统函数	(37)
§ 1-3 离散傅里叶变换	(39)
1-3-1 离散周期序列和离散傅里叶级数	(41)
1. 离散傅里叶级数	(41)
2. D.F.S. 与 z 变换的关系	(44)
3. D.F.S. 的主要性质	(45)
1-3-2 有限长度序列和离散傅里叶变换	(48)
1. 离散傅里叶变换	(48)

2. D.F.T. 的主要性质	(49)
3. 用 D.F.T. 计算序列的线性卷积	(57)
复习思考题	(59)
习 题	(60)
参考文献	(63)

第二章 数字滤波器

§ 2-0 引 言	(64)
§ 2-1 无限冲激响应数字滤波器	(66)
2-1-1 从模拟滤波器设计数字滤波器的方法	(66)
1. 微商-差商变换法	(67)
2. 冲激响应不变变换法	(71)
3. 双线性变换法	(76)
4. 匹配 z 变换法	(81)
2-1-2 常用模拟滤波器的特性	(81)
1. 巴特沃兹滤波器	(82)
2. 切比雪夫滤波器	(84)
3. 椭圆滤波器	(89)
2-1-3 几种常用 I.I.R. 数字滤波器的设计	(90)
1. 巴特沃兹数字滤波器	(90)
2. 切比雪夫数字滤波器	(100)
2-1-4 低通至其它型类的变换	(104)
§ 2-2 有限冲激响应数字滤波器	(109)
2-2-1 窗口设计法	(112)
1. 矩形窗口	(117)
2. 其它形状窗口	(120)
3. 可调整窗口	(124)
2-2-2 频率取样设计法	(134)
§ 2-3 数字滤波器的计算机辅助设计	(134)
2-3-1 I.I.R. 数字滤波器的计算机辅助设计	(135)
1. 最小均方差设计法	(137)
2. 最小 p 方差设计法	(137)
3. 最小方差逆设计法	(139)
2-3-2 F.I.R. 数字滤波器的计算机辅助设计	(140)
1. 解非线性方程组法	(142)
2. 反复试验法	(144)
§ 2-4 数字滤波器的实现	(146)
2-4-1 滤波器的流图表示与结构形式	(146)

1. I.I.R. 数字滤波器	(146)
2. F.I.R. 数字滤波器	(148)
2-4-2 数的表示及其运算对量化的影响	(151)
1. 数的表示及其运算	(151)
2. 数的量化误差	(154)
2-4-3 模拟信号取样中的量化噪声	(158)
1. 舍入法	(159)
2. 补码截尾法	(160)
3. 原码截尾法	(160)
2-4-4 实例	(162)
复习思考题	(166)
习 题	(167)
参考文献	(170)

第三章 数字谱分析

§ 3-0 引 言	(172)
§ 3-1 快速傅里叶变换	(173)
3-1-1 库利-图基算法	(173)
3-1-2 桑德-图基算法	(181)
3-1-3 任意基数的 F.F.T. 算法	(181)
3-1-4 快速傅里叶变换的实现	(185)
1. 基数 2 的 F.F.T. 的实现	(185)
2. 基数大于 2 的 F.F.T. 的实现	(187)
3. W.F.T.A. 法	(191)
§ 3-2 确定性信号序列的谱分析	(194)
3-2-1 滑动滤波器型谱分析器	(195)
3-2-2 F.F.T. 型谱分析器	(200)
3-2-3 Chirp 滤波型谱分析器	(202)
3-2-4 CZT 谱分析器	(203)
3-2-5 分段快速卷积法	(209)
1. 重叠相加法	(209)
2. 重叠储存法	(211)
§ 3-3 离散随机信号	(214)
3-3-1 随机信号及其分类	(214)
3-3-2 平均	(216)
3-3-3 概率函数	(217)
3-3-4 相关函数和协方差	(219)
3-3-5 功率谱密度	(221)

3-3-6 线性系统对随机信号的响应	(224)
§ 3-4 随机信号序列的谱分析	(228)
3-4-1 快速相关法	(231)
3-4-2 周期图法	(241)
复习思考题	(247)
习 题	(249)
参考文献	(251)

第四章 二维数字信号处理

§ 4-0 引 言	(253)
§ 4-1 二维离散信号和系统	(253)
4-1-1 二维离散信号	(253)
4-1-2 二维离散系统	(254)
4-1-3 二维差分方程	(257)
4-1-4 频域分析	(258)
4-1-5 二维信号的取样	(260)
§ 4-2 二维 z 变换	(261)
4-2-1 二维 z 变换的定义	(261)
4-2-2 二维 z 变换的性质	(263)
§ 4-3 二维离散傅里叶变换	(264)
4-3-1 二维离散傅里叶变换的定义	(265)
4-3-2 二维离散傅里叶变换的性质	(267)
§ 4-4 二维数字滤波器	(268)
4-4-1 二维无限冲激响应滤波器	(268)
4-4-2 二维有限冲激响应滤波器	(278)
§ 4-5 同态信号处理	(290)
4-5-1 广义迭加原理	(290)
4-5-2 乘法同态系统	(292)
4-5-3 卷积同态系统	(294)
4-5-4 复倒谱的性质	(298)
§ 4-6 应用举例	(302)
4-6-1 数字图像处理	(302)
4-6-2 话音信号处理	(308)
复习思考题	(312)
习 题	(313)
参考文献	(316)

第五章 数字处理仪器与测量方法

§ 5-0 引 言	(317)
§ 5-1 F.F.T. 信号分析系统	(317)
5-1-1 仪器的性能指标	(318)
5-1-2 仪器的工作原理	(320)
1. 奇型离散傅里叶变换	(320)
2. 相关函数	(323)
3. 卷积	(325)
4. 功率谱	(328)
5. 其它	(328)
5-1-3 仪器的硬件结构	(329)
1. 总体结构	(330)
2. 运算器	(330)
3. 变址器	(333)
4. 控制器	(335)
5. 存储器 and 接口	(338)
5-1-4 F.F.T. 信号分析仪的发展动向	(339)
§ 5-2 直接计算法数字式频率综合器	(340)
5-2-1 工作原理	(341)
5-2-2 实际考虑与实例	(347)
§ 5-3 伪随机序列发生器	(352)
5-3-1 m 序列的产生方法	(353)
5-3-2 m 序列的随机特性	(357)
5-3-3 m 序列在有关领域中的应用	(362)
§ 5-4 频率稳定度的频域自动测量	(364)
5-4-1 工作原理	(365)
5-4-2 测量系统	(372)
5-4-3 测量方法的改进	(374)
复习思考题	(378)
参考文献	(378)
名词索引	(381)

第一章 导论和数学基础

§ 1-0 引言

数字信号处理是研究用数字或符号的序列来表示信号以及对这些序列信号进行处理的一门学科。

信号可定义为传递信息的函数。例如，通讯信号、雷达信号、声纳信号、地震信号、语言信号、图象信号……等。各种信号在数学上可以表示为一个或几个独立变量的函数。例如，通讯信号可表为时间的函数；图象信号可表为二维空间的函数等。但是，习惯上常把信号表为独立变量——时间的函数。

信号的独立变量，既可以是连续的，也可以是离散的，即可分为连续信号和离散信号两种。定义变量时间是连续变化的信号称为**连续信号**；而仅在变量时间的离散值上才有定义的信号则称为**离散时间信号**。

除了按照变量的连续或离散来定义信号之外，信号的幅度本身也既可以是连续的，也可以是离散的。如果一个信号，其幅度是连续的，同时变量时间也是连续的，则称为**模拟信号**。反之，如果一个信号的幅度是离散的，同时变量时间也是离散的，则称为**数字信号**。数字信号处理就是对幅度和变量时间都是离散的数字信号进行变换、加工和处理的技术。

在科学技术的许多领域里，为了提取信号中的信息，都必需进行信号处理。举几个例子来加以说明。

为了从两个或多个以某种方式合并在一起的信号中分离出某个有用信号，必需进行信号处理。这常在通讯、雷达、声纳等信号的接收时遇到。这时，天线或换能器基阵上接收到的信号中，除了有用信号之外，常夹杂着各种噪声。为了得到有用信息，就必需进行滤波处理。最简单的滤波器是设计成可通过（或阻止）某正弦波的频率滤波器，在目标检测中，则应设计成所谓最佳滤波器，这又可分为匹配滤波器、最大检测概率滤波器……等种类，以达到各种不同最佳准则的要求。最佳滤波器还可以设计成自适应型，以便适应可能由于传输媒质改变而引起的信号或噪声特性的变化。

如果想要在两个合并的信号中增强其中某一信号分量，而减弱另一信号分量，也必需进行信号处理。例如，图象信号是由照度信号和反射度信号的乘积所组成的。在图象恢复、增强等图象信号处理时，就要求首先将这两种信号分离，然后分别给以不同的加权处理，最后再合成为新的图象信号。这种**乘积信号**的分离和合成可以用求对数和反对数的变换处理来得到。又例如，地震波信号、语言信号以及各种声学混响信号等，则属于是两种信号的卷积所组成的信号。这种**卷积信号**的分离与合成，可以运用卷积定理先求其傅里叶变换使之转变为频域乘积信号，再按照对数变换转变为相加的信号。分别进行处理之后，再进行反对数变换和反傅里叶变换恢复为卷积信号。在信号处理技术中，乘积信号或卷积信号的这种处理都属于**同态滤波处理**。

当然,信号处理的应用决不限于此,例如,估算信号的一个或几个参数、压缩信号的频带……等。但是,从上述例子就足以看出信号处理的重要性了。

按照信号的分类,理所当然地也可以将信号处理分为模拟信号处理和数字信号处理两大类。处理信号的设施常称为系统,因此,如果系统的输入、输出都是模拟信号时,则称为**模拟系统**;反之,如果系统的输入、输出都是数字信号时,则称为**数字系统**。

虽然,作为数学的一个领域,数字信号处理的基本数学原理在一个世纪以前早已出现,但是,到本世纪六十年代之前,信号处理却一直沿用模拟处理而未采用数字处理的方法。仅仅在近十多年的时间里,数字信号处理技术及其应用才以惊人的速度发展起来。这既是由于模拟处理当时还存在某些问题,不能适应现代科学技术的发展,也是由于近代数字电子计算机的发展才促进了信号的数字处理的缘故。

毫无疑问,模拟信号处理有其重要的优点,这主要是处理总是实时的。例如,两个模拟信号的相加……等的运算,几乎是即时完成的。然而,信号处理不仅需要运算部件,还需要存储部件。我们知道,所有信号处理的滤波器都必然地要改变输入信号的波形,这就要有能起记忆作用的存储部件。存储部件的数目多少决定了滤波器阶的高低。模拟滤波器的记忆作用是由电感或电容的储能作用来实现的,尤其在低频情况,这些存储部件是昂贵和庞大的。反之,在数字系统中,存储数字信号是很方便的,而且存储容量可以很大,存取又非常灵活(不受信号到达的先后顺序的限制)。

模拟信号处理器的缺点不止于此,更重要的是当时它的性能往往难以达到先进的指标要求,甚至有些信号的处理无法用模拟方法进行。下面再举两个例子加以说明。

我们知道,信号处理技术中除了加法之外,最常遇到乘法运算,例如,求卷积或相关函数等情况。模拟乘法器能否实现,取决于它的动态范围。如果两个信号幅度相乘值的范围超过乘法器的线性动态范围(例如达到限幅范围),就要发生错误,这个问题常使模拟乘法器的实现遇到困难。当然,人们为了避免这个缺点,可以事先将这两个信号加以衰减,然后再相乘。但是,这样做又可能引入新的误差。例如,信号过小无法相乘、衰减器引入噪声、衰减器的非线性误差和附加的相位移误差等。

我们知道,信号的频谱可以用频谱分析仪来测量,可分析的傅里叶频率范围取决于仪器的性能。模拟频谱分析仪在低频端就遇到困难,一般只能做到10赫左右。此外,其中滤波器的带宽也很难做到足够窄,这也会引起误差。但是,数字滤波器则可以不受这些限制,只要存储器的容量足够大,理论上可以做到能分析任意低的傅里叶频率(目前已做到 10^{-3} 赫以下),并且滤波器的带宽可以任意窄。这些指标是有意义的,例如,在现代原子频标的研究中,所需要分析的相位起伏功率谱,就处在这个范围内。

因此,数字信号处理有其独特的用途和重要性,也就是说,数字信号处理的优点是信号的存储及其取用是方便和灵活的,而且有时它能够实现模拟信号处理所不能实现的高技术指标。当然,为此也要付出相当的代价。数字信号处理的缺点是处理过程需要时间、硬件设备庞大和价格高昂等。数字信号处理近年来的发展趋势就是努力克服这些缺点。可以指出,由于下面两个方面的进展而使数字信号处理技术正日趋完善:一方面是处理方法在理论上的成就;另一方面是数字硬件设备的成就。

1965年库利(Cooley J.W.)和图基(J.W. Tukey)发表了一篇论文^[1],论述一种

离散傅里叶变换的有效数字算法。后来这个方法被称为“快速傅里叶变换 (F.F.T.)”算法。如果不用快速傅里叶变换算法来计算离散傅里叶变换 (D.F.T.)，则对具有 N 个取样的算术运算次数将正比于 N^2 ；而若应用 F.F.T. 算法，则算术运算次数被减为仅正比于 $N \log_2 N$ 。所以，改善因子为 $\frac{N^2}{N \log_2 N} = \frac{N}{\log_2 N}$ 。在取样数很大时，其改善是很可观的，既节省了计算机所费的大量时间，又节省了大量数字硬件。从而在某些场合下，有实现实时处理的可能。后来，这种思想又被引用到其它变换的运算当中去例如快速沃尔什 (Walsh) 变换 (F.W.T.) 中等。

另一方面的进展是数字硬件的集成技术。大规模集成电路，尤其微处理器的出现，使降低成本、缩小体积重量等方面都有了突破。目前，微处理器已经在短短的几年时间里经历了三代的产品，其存储容量愈来愈大，运算速度愈来愈快，不久将来，将会看到微处理器在数字信号处理技术中得到实际而有效的应用。此外，值得提出的是新的器件，例如：电荷转移器件 (Charge Transfer Devices)^[2]，声表面波器件，开关电容滤波器等近年来发展迅速，可能给信号的数字处理的实现别开新生面。

数字信号处理的用途是非常广泛的^[3]，它在无线电通讯、音频、语言、图象、雷达、声纳、地球物理学等方面都得到应用。但是，如果按照其处理的技术来分类的话，数字信号处理大致可以分为三类：数字滤波器、数字谱分析器、数字二维信号处理。此外，对于从事电子仪器专业的工作者，还关心数字处理仪器与测量方法。所以，本书就按此来分章讨论。这样的安排可能是妥当的，它使读者在较短的篇幅里，得到数字信号处理的基本理论知识，而避免了繁复的按用途线索的叙述。然而，数字信号处理在各科学技术领域里应用的内容是非常生动和丰富的，读者若有兴趣，可进一步参阅有关著作和文献。理论在发展，技术也在发展，实际用途及其所提出的要求也在发展，让我们共同关心与研究它们，以适应祖国实现四个现代化的步伐。

§ 1-1 离散信号与系统

本节的目的是复习并讨论某些与离散信号和离散系统有关的基本知识。

1-1-1 序列——时域离散信号

前已指出，习惯上我们总是把信号视为变量时间的函数，亦即视为**时域信号**。还曾指出，数字信号是幅度为离散的、变量时间也是离散值才有定义的信号。实际上，幅度离散的问题在数字信号处理中属于信号的“量化”问题，这个问题将在第二章 §2-4 节中讨论。所以，现在只讨论更普遍一些的时域离散信号。

时域离散信号是一种**序列**，以 $\{x(n)\}$ 表示，其定义如下：

$$x = \{x(n)\}, \quad -\infty < n < +\infty \quad (1-1-1)$$

式中， n 为整型变量， $x(n)$ 表示序列中第 n 个取样值，而符号 $\{ \}$ 表示全部取样值的集合。

序列也常用图形表示，如图 1-1-1 所示。应该特别注意的是： $x(n)$ 仅对整数的 n 值才有定义；对于非整数的 n 值，不能认为 $x(n)$ 的值是零，而仅仅是在 n 为非整数时 $x(n)$ 没有定义。

还要说明一点, 虽然 $x(n)$ 是序列 $\{x(n)\}$ 的普遍项表示式, 而序列的精确表示式应为

$$\{x(-\infty), \dots, x(-1), x(0), x(1), \dots, x(\infty)\}$$

但是, 为了避免符号表示上不必要的繁琐, 今后本书就用普遍项 $x(n)$ 来表示序列 $\{x(n)\}$, 写作序列 $x(n)$ 。作为一个约定, 在这里预先作了上述说明之后, 这样做并不会引起混淆而又简便。

某些有规则的序列是数字信号处理中常用的序列, 现举例如下。

1. 单位取样序列

单位取样序列以符号 $\delta(n)$ 表示, 定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (1-1-2)$$

其图形如图 1-1-2a 所示。在数字系统中这个序列的作用类似于模拟系统中的单位冲激函数—— δ 函数。

2. 单位阶跃序列

单位阶跃序列以符号 $u(n)$ 表示, 定义为下:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1-1-3)$$

其图形如图 1-1-2b 所示。

由上述两种序列的定义, 可以明显看出它们之间的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-1-4)$$

3. 正弦序列

正弦序列的表示式为

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi) \quad (1-1-5)$$

式中, n 是整数, ω_0 是正弦序列的数字角频率, ϕ 是初始相角。正弦序列的图形如图 1-1-2c 所示。

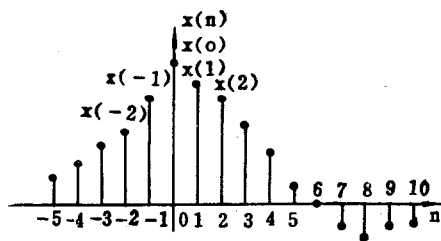


图 1-1-1 序列的图形表示

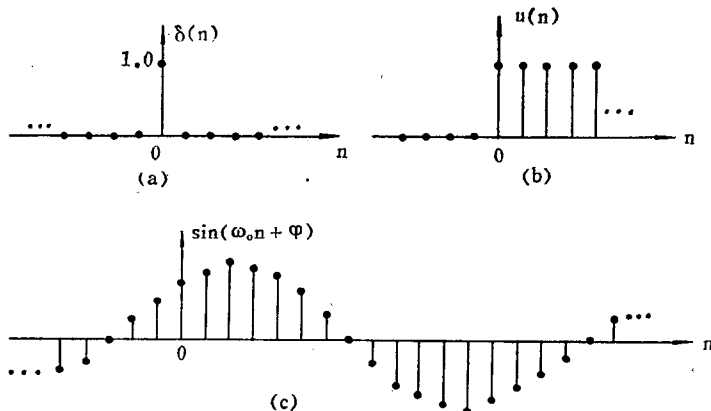


图 1-1-2 几种常用序列

(a) 单位取样序列 (b) 单位阶跃序列 (c) 正弦序列

还有一些常用序列（如指数序列等），这里就不一一赘述了。

顺便在这里介绍一下周期性序列和序列的移序两个概念。凡是对所有整数 n 值，皆有 $x(n) = x(n + N)$ 的序列，称为**周期性序列**，其周期为 N 。对于正弦序列，由式 (1-1-5) 可见，只有当 $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 为实整数时，该正弦序列才是周期为 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 的周期序列。如果 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是整数，但却是一个有理数，则正弦序列仍是周期性的，然而其周期将不是 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ，而大于 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 。如果 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 既非整数，又非有理数，则该正弦序列不是周期序列。

如果序列 $y(n)$ 与序列 $x(n)$ 之间满足 $y(n) = x(n - k)$ 的关系（ k 为整数），则序列 y 称为序列 x 的**移序**。 k 为正值时为向右移序； k 为负值时为向左移序。

我们运用单位取样序列的定义和序列移序的概念，还可以得到一个有用的公式。先看一个例子：设有一序列 $x(n)$ ，其图形如图 1-1-3 所示。由上述两点，它的普遍项可以写成

$$x(n) = a_{-3}\delta(n+3) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2)$$

式中， a_{-3} ， a_1 ， a_2 分别表示 $n = -3, 1, 2$ 时序列信号的值。

因此，更一般地，任意序列皆可表示为

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1-1-6)$$

式中， $x(k)$ 是序列在序号为 k 处的值， $\delta(n-k)$ 是移序 k 之后的单位取样序列。

这个公式表明，**任意序列皆可表示为加权、移序的单位取样序列之和**。这种用 $\delta(n)$ 的移序序列 $\delta(n-k)$ 和用该序号 k 处信号值 $x(k)$ 进行加权的方法表示任意序列 $x(n)$ 普遍项的性质，在分析序列对离散系统的响应时是非常有用的。

1-1-2 线性移不变离散系统

由前所述，输入和输出都是离散信号的系统可称为离散系统。在离散系统中，常用的是**线性离散系统**。**线性**的含义是指：如果系统的输入为 $x_1(n)$ 时，输出为 $y_1(n)$ ，输入为 $x_2(n)$ 时，输出为 $y_2(n)$ ；则当系统的输入为 $[ax_1(n) + bx_2(n)]$ 时，其输出将为 $[ay_1(n) + by_2(n)]$ 。这里 a 和 b 是任意常数。

在线性离散系统中，更常用的是**具有移不变特性的线性离散系统**。**移不变**的含义是指：如果系统输入为 $x(n)$ 时，输出为 $y(n)$ ；则当系统的输入为 $x(n-k)$ 时，其输出将为 $y(n-k)$ 。这里 k 也是整数。

前已指出，任意序列都可表示为加权的、移序的单位取样序列之和，如式 (1-1-6) 所示。这意味着系统对序列的响应可以通过它对单位取样序列的响应来表征。

设一线性系统对输入 $\delta(n)$ 的响应为 $h(n)$ ，而线性移不变系统对输入 $\delta(n-k)$ 的响应为

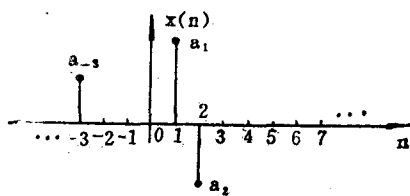


图 1-1-3 用加权的移序的单位取样序列之和来表示任意序列

$h(n-k)$; 则线性移不变系统对输入 $x(n)$ 的响应, 由式 (1-1-6) 将写为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1-1-7)$$

这里, $h(n)$ 称为系统的单位取样响应。

如果进行变量替换, 上式也可写成

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (1-1-8)$$

通常把式 (1-1-7) 或式 (1-1-8) 称为卷积和。或者说, 若序列 $y(n)$ 与序列 $h(n)$ 和序列 $x(n)$ 之间有上两式的关系, 则称 $y(n)$ 是 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积。两序列的卷积也是一个序列, 而且与其求卷积的次序无关, 常用下列符号表示:

$$y(n) = h(n) * x(n) = x(n) * h(n) \quad (1-1-9)$$

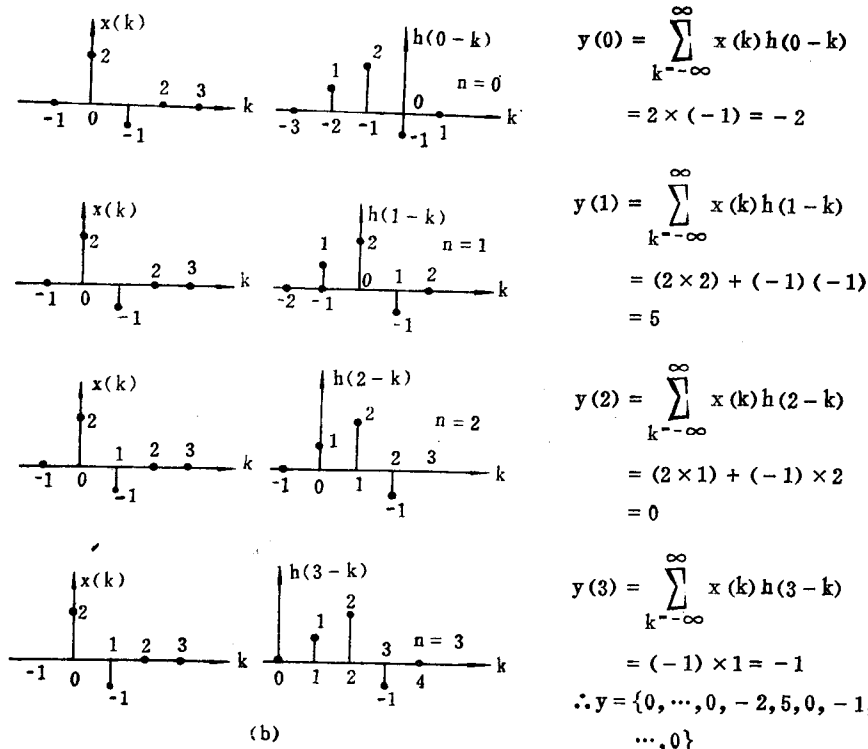
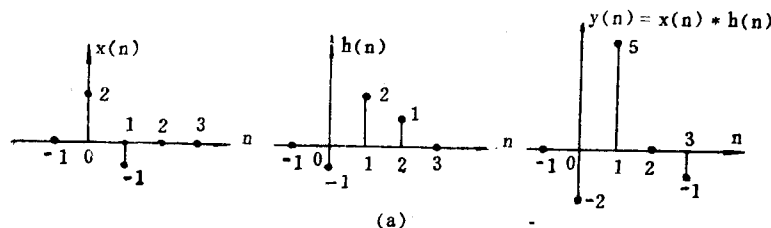


图 1-1-4 两序列的卷积运算方法举例

(a) 卷积的结果 (b) 求卷积的过程