

普通高等教育基础课规划教材

# 微积分 上册

张润琦 陈一宏 主编



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育基础课规划教材

# 微 积 分

上 册

主编 张润琦 陈一宏  
编写 程杞元 李翠哲 苏伟宏  
主审 李心灿

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据教育部颁布的高等学校工科本科生“高等数学课程教学基本要求”，参考研究生入学考试“数学考试大纲”编写而成的，上册包含一元函数微积分和常微分方程等内容，下册包含多元函数微积分和级数等内容。

本书尽量从实际问题引入数学概念，注意培养学生用微积分的思想和方法观察、解决问题的能力。例题、习题题型丰富，有些是研究生入学考试试题，其中不少题目紧密结合实际应用，有利于培养学生的应用意识以及分析解决问题的综合能力。

本书是工科本科生的教科书，也可以作为研究生入学考试复习用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上册/张润琦, 陈一宏主编. —北京: 机械工业出版社, 2005. 8  
普通高等教育基础课规划教材

ISBN 7-111-17259-0

I. 微… II. ①张… ②陈… III. 微积分—高等学校—教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 095998 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑: 郑丹 版式设计: 冉晓华 责任校对: 刘志文

封面设计: 赵璟 责任印制: 石冉

保定市印刷厂印刷

2005年8月第1版第1次印刷

1000mm×1400mm B5 12印张 455千字

定价: 36.00元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话(010) 68326294

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

本书是根据教育部颁布的高等学校工科本科生“高等数学课程教学基本要求”，参考研究生入学考试“数学考试大纲”编写而成的。上册包含函数的极限和连续，一元函数微积分，常微分方程等内容。下册包含向量代数和空间解析几何，多元函数微积分以及级数等内容。

为了能够让学生在较少的学时内理解和掌握微积分的重要概念、思想和方法，编写时注意到了下述几个方面：

1. 对主要概念尽量先从各类实际问题入手进行数学分析，逐步抽象出严格的数学概念。

2. 在理解微积分基本概念和理论的基础上，注意培养学生应用微积分的思想和方法解决实际问题的能力。在本书的微分、积分和微分方程各部分内容中，都有较多的实例和习题。通过对这些问题的分析、求解，不断提高学生运用数学知识建立实际问题的数学模型的能力。

3. 努力提高学生的综合解题能力。每章最后一节为综合例题。这些例题和习题为精选的典型问题，有些是研究生入学考试试题，有些问题的素材取自国外的参考书。教师可根据具体情况在习题课上选用。

本书是教学改革研究项目“大学数学课程的改革和建设”的成果之一，是在长期的教学实践过程中，不断总结广大教师的教学经验，修改原有教材逐步形成的。

本书的编写得到数学教育家李心灿教授的指导和帮助，他还认真审阅了全稿，提出了诸多宝贵建议，在此表示衷心感谢。机械工业出版社对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢。

本书上册第1章和第5章由李翠哲执笔，第2章和第3章由程杞元执笔，第4章由苏伟宏执笔，下册第6章和第7章由毛京中执笔，第8章、第9章和第10章由张润琦执笔。全书由张润琦和陈一宏统稿。

书中标有\*号的内容不作基本要求。

由于水平、经验所限，书中的不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者  
于北京理工大学

# 目 录

## 前言

<b>第 0 章 预备知识</b> .....	1
0.1 集合与区间 .....	1
0.2 函数 .....	3
习题 0 .....	20
<b>第 1 章 极限与连续</b> .....	23
1.1 数列的极限 .....	23
习题 1.1 .....	31
1.2 函数的极限 .....	32
习题 1.2 .....	39
1.3 极限的运算法则 .....	40
习题 1.3 .....	44
1.4 两个重要极限 .....	45
习题 1.4 .....	50
1.5 无穷小与无穷大 .....	51
习题 1.5 .....	57
1.6 函数的连续性 .....	58
习题 1.6 .....	68
1.7 综合例题 .....	69
习题 1.7 .....	77
<b>第 2 章 导数与微分</b> .....	80
2.1 导数概念 .....	80
习题 2.1 .....	90
2.2 求导法则和求导基本公式 .....	92
习题 2.2 .....	102
2.3 隐函数和参数方程确定的函数的导数 .....	104
习题 2.3 .....	111
2.4 高阶导数 .....	112
习题 2.4 .....	118

2.5 函数的微分 .....	119
习题 2.5 .....	125
2.6 综合例题 .....	126
习题 2.6 .....	133
<b>第 3 章 微分中值定理及其应用 .....</b>	<b>137</b>
3.1 微分中值定理 .....	137
习题 3.1 .....	145
3.2 未定式的极限 .....	147
习题 3.2 .....	153
3.3 泰勒公式 .....	154
习题 3.3 .....	161
3.4 函数性态的研究 .....	162
习题 3.4 .....	176
3.5 曲线的曲率 .....	179
习题 3.5 .....	185
3.6 方程的近似解 .....	185
习题 3.6 .....	190
3.7 综合例题 .....	190
习题 3.7 .....	201
<b>第 4 章 一元函数积分学 .....</b>	<b>205</b>
4.1 定积分的概念与性质 .....	205
习题 4.1 .....	212
4.2 微积分基本定理 .....	213
习题 4.2 .....	217
4.3 不定积分 .....	218
习题 4.3 .....	236
4.4 定积分的计算 .....	238
习题 4.4 .....	247
4.5 广义积分 .....	248
习题 4.5 .....	254
4.6 定积分的几何应用 .....	254
习题 4.6 .....	263
4.7 定积分的物理应用 .....	264

习题 4.7 .....	267
4.8 综合例题 .....	268
习题 4.8 .....	274
<b>第 5 章 常微分方程</b> .....	<b>276</b>
5.1 微分方程的基本概念 .....	276
习题 5.1 .....	279
5.2 一阶微分方程 .....	279
习题 5.2 .....	295
5.3 可降阶的高阶方程 .....	297
习题 5.3 .....	301
5.4 线性微分方程解的结构 .....	301
习题 5.4 .....	306
5.5 线性常系数齐次方程 .....	307
习题 5.5 .....	310
5.6 线性常系数非齐次方程 .....	311
习题 5.6 .....	318
5.7 常系数线性微分方程组 .....	319
习题 5.7 .....	320
5.8 用常微分方程求解实际问题 .....	321
习题 5.8 .....	338
5.9 综合例题 .....	340
习题 5.9 .....	347
<b>习题答案</b> .....	<b>350</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>378</b>



## 第0章 预备知识

高等数学的核心内容是微积分,它与以前所学的初等数学有很大的区别.初等数学研究的“数”是常数或常量,研究的几何形体是孤立的、不变的规则几何形体,主要研究常数间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系.与此相反,高等数学研究的“数”是变数或变量,研究的几何形体是不规则的几何形体,如曲线、曲面、曲边形和曲面形等.高等数学将数和几何形体紧密结合起来,以函数为基本研究对象,以极限方法为基本研究方法,动态地、整体地、普遍地揭示变量间的变化规律.

在这一部分内容中,我们先对高等数学的研究对象——函数及相关知识进行简要复习和必要的补充.本部分内容是研究微积分最必要的基础知识.

### 0.1 集合与区间

#### 1. 集合

集合是现代数学中最基本的概念,许多数学研究都离不开集合.例如,所有自然数的集合,所有有理数的集合,一个方程的根的集合,某矩形内所有点的集合,等等.一般地,具有某种确定性质的对象的总体称为集合或集,其中的对象称为集合的元素.通常以大写字母  $A, B, M$  等表示集合,而以小写字母  $a, b, m$  等表示集合的元素.若  $a$  是集合  $A$  的元素,则记作  $a \in A$  (读作  $a$  属于  $A$ ). 否则,记作  $a \notin A$  (读作  $a$  不属于  $A$ ).

一般地,表示集合的方法有两种.一种是列举法,就是把集合的所有元素一一列出,写在一对花括号内.例如,方程  $x^2 - 1 = 0$  根的集合表示为  $S = \{-1, 1\}$ . 另一种是命题法,就是指明集合元素所具有的确定性质.例如,整数集可表示为  $N = \{x \mid \sin \pi x = 0\}$ . 一般地



$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

其中,  $P$  是关于  $x$  的某个性质, 意思为:  $x \in A$  的充要条件是  $x$  满足性质  $P$ . 例如, 方程  $x^2 - 1 = 0$  的根也可以表示为  $S = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ .

由某些数组成的集合称为数集. 全体实数构成实数集  $\mathbf{R}$ . 若将数轴上的点对应到其坐标上的实数, 则实数集中的数与数轴上的点就建立了一一对应关系. 因此, 以后对实数与数轴上的点不严加区别. 例如, 数  $a$  有时也说成点  $a$ , 反之亦然.

## 2. 区间

高等数学中最常用的数集是区间. 介于两个实数间的全体实数构成的数集称为区间. 这两个实数称为区间的端点, 两端点间的距离称为区间的长度. 这类区间称为有限区间. 还有一类区间称为无限区间. 一般有如下几种区间(表 0-1):

表 0-1

符号	定义	名称	
$(a, b)$	$= \{x \mid a < x < b\}$	开区间	有限区间
$[a, b]$	$= \{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	
$(a, b]$	$= \{x \mid a < x \leq b\}$	左开右闭区间	
$[a, b)$	$= \{x \mid a \leq x < b\}$	左闭右开区间	
$(a, +\infty)$	$= \{x \mid a < x < +\infty\}$	无穷开区间	无限区间
$(-\infty, b)$	$= \{x \mid -\infty < x < b\}$	无穷开区间	
$(-\infty, +\infty)$	$= \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	无穷开区间	
$[a, +\infty)$	$= \{x \mid a \leq x < +\infty\}$	无穷半开半闭区间	
$(-\infty, b]$	$= \{x \mid -\infty < x \leq b\}$	无穷半开半闭区间	

表 0-1 中,  $a, b$  是确定的实数,  $a < b$ ;  $+\infty, -\infty$  是两个记号(不是数), 分别读作正无穷、负无穷.

## 3. 邻域和内点

邻域也是一种常用的集合. 对于任意的正数  $\delta$ , 开区间  $(a - \delta, a + \delta)$  称为点  $a$  的以  $\delta$  为半径的邻域, 简称点  $a$  的邻域, 记作  $N(a, \delta)$ . 即

$$N(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$$

或写作

$$N(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

如果把邻域的中心去掉, 所得到的集合称为点  $a$  的以  $\delta$  为半径的去心邻域, 记作  $\dot{N}(a, \delta)$ . 即

$$\dot{N}(a, \delta) = N(a, \delta) \setminus \{a\}$$



$$= \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

为方便起见,称开区间 $(a-\delta, \delta)$ 为点 $a$ 的左 $\delta$ 邻域;称开区间 $(a, a+\delta)$ 为点 $a$ 的右 $\delta$ 邻域.

设 $I$ 表示某一数集, $x \in I$ ,若存在 $x$ 的邻域 $N(x, \delta) \subset I$ ,则称 $x$ 为 $I$ 的内点.开区间和无穷开区间都是由其内点构成的.

若对于任意的 $\delta > 0$ , $N(x, \delta)$ 中既有属于 $I$ 的点,又有不属于 $I$ 的点,则称 $x$ 为 $I$ 的边界点,边界点可以属于 $I$ ,也可以不属于 $I$ .如开区间 $(a, b)$ 的两个端点 $a, b$ 是边界点,不属于此开区间.而闭区间的两个端点是边界点,且都属于此闭区间.

#### 4. 常用符号

本书将多处使用以下四个符号:

$$\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

分别读作“对于任意给定的”、“存在”、“推出”、“等价”.其用法通过例子说明如下:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \text{有 } x \leq |x|$$

表示:对于任意一个实数 $x$ ,都有 $x \leq |x|$ .

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \text{使 } y < x$$

表示:对于任意实数 $x$ ,存在实数 $y$ ,使得 $y < x$

符号“ $\Rightarrow$ ”与“ $\Leftrightarrow$ ”比较常用,此处不再说明.

## 0.2 函 数

在观察自然与社会现象时,会遇见各种不同的量,其中有些量在所考察的过程中始终保持不变,取一固定的数值,这种量称为常量;有些量在所考察的过程中发生变化,取不同的数值,这种量称为变量.值得注意的是:一个量是常量还是变量与所考察的过程有关.例如,局限于地球表面上某一地点而言,重力加速度 $g$ 是常量;但在较大的地区内, $g$ 是一个与地理位置有关的量.通常以字母 $a, b, c$ 等表示常量,以字母 $x, y, z$ 等表示变量.变量 $x$ 所取数值的全体组成的集合称为变量 $x$ 的变域.

在现实环境中,往往有两个或多个变量在相互关联地变化着,这就是函数现象.函数是最重要的数学概念之一.微积分研究的就是各类函数(包括初等函数、非初等函数、显函数和隐函数等)的各种性质,特别是函数的分析性质,如函数的导数和积分等.

### 1. 函数的定义

**定义1** 设有两个变量 $x$ 和 $y$ , $x$ 的变域 $D$ 是一非空数集.若对于每一个 $x$

$\in D$ , 总有确定的  $y$  按某种法则  $f$  与之对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 法则  $f$  是函数关系, 记为  $y=f(x)$ .  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量或函数.  $D$  为函数的定义域,  $y$  的一切值所组成的数集称为函数的值域.

对于自变量所能取的每一个值, 都有因变量的一个值与之对应, 这样的函数叫做单值函数. 对于自变量所能取的每一个值, 都有因变量的多个值与之对应, 这样的函数称为多值函数. 本书主要研究单值函数. 我们约定, 本书中的函数就是单值函数.

在函数定义中, 函数关系  $f$  及定义域  $D$  是两个重要因素, 至于自变量和因变量采用什么字母表示则无关紧要. 因此, 只要两个函数的定义域相同, 函数关系相同, 它们就表示同一个函数. 例如, 函数

$$y = f(x), x \in X$$

与函数

$$v = f(u), u \in X$$

表示同一个函数.

在实际问题中, 函数的定义域是由问题的实际意义确定的. 而对于一般的函数, 其定义域是使因变量有确定实数值的自变量的全体.

**例 1** 从高为  $h$  处自由下落的物体, 下落路程  $s$  与时间  $t$  的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

运动从  $t=0$  时刻开始, 到  $s=h$  时终止, 终止时刻是  $\sqrt{2h/g}$ . 所以函数的定义域是  $[0, \sqrt{2h/g}]$ .

**例 2** 求函数  $y = \sqrt{\frac{5-x^2}{x-1}}$  的定义域.

解 使函数有意义的  $x$  应满足  $\frac{5-x^2}{x-1} \geq 0$ .

下面分两种情况讨论:

(1)  $\begin{cases} 5-x^2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ , 解得  $1 < x \leq \sqrt{5}$ , 如图 0-1 所示.

(2)  $\begin{cases} 5-x^2 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ , 解得  $x \leq -\sqrt{5}$ , 如图 0-2 所示.

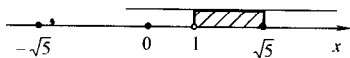


图 0-1

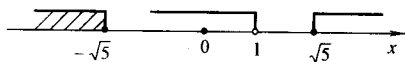


图 0-2



因此,函数的定义域为  $1 < x \leq \sqrt{5}$  或  $x \leq -\sqrt{5}$ , 即  $D = (1, \sqrt{5}] \cup (-\infty, -\sqrt{5}]$ .

**例3** 设  $f(x-1) = x^2 + 2x - 2$ , 求  $f(x)$ .

**解** 令  $x-1=t$ , 则  $x=t+1$ , 代入已知式两端, 得

$$\begin{aligned} f(t) &= (t+1)^2 + 2(t+1) - 2 \\ &= t^2 + 4t + 1 \end{aligned}$$

所以  $f(x) = x^2 + 4x + 1$

由此可知, 函数关系  $f$  就是  $f(\quad) = (\quad)^2 + 4(\quad) + 1$ .

对于  $x$  的给定值  $a$ ,  $f(a) = a^2 + 4a + 1$ .

设函数  $y=f(x)$  是定义在  $D$  上的函数. 在  $Oxy$  平面上取定直角坐标系后, 对每个  $x \in D$  可确定平面上一点  $M(x, y) = M(x, f(x))$ . 当  $x$  取遍  $D$  中所有值时, 点集  $C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$  画出平面上一条曲线  $y=f(x)$ , 该曲线即称为函数  $y=f(x)$  的图形(如图 0-3). 有时也将图形直接称为函数  $y=f(x)$ .

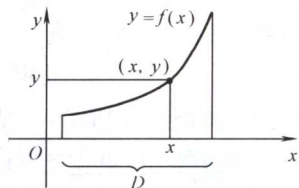


图 0-3

上面的函数表达式中仅有一个自变量, 称此函数为一元函数.

## 2. 分段函数

函数的表示方法很多, 常用的有列表法、图示法和公式法三种.

应该注意到, 在函数的定义中, 并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示函数关系, 在很多问题中常常会遇到这种情况, 就是在定义域的不同范围内, 函数关系用不同的式子来表示, 这种函数叫做分段函数.

**注意:** 分段函数是一个函数, 而不是几个函数, 这一点初学者一定要弄清楚.

**例4** 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

其定义域是  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R = [0, +\infty)$ , 函数图形如图 0-4 所示.

**例5** 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

其定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R = \{-1, 0, 1\}$ . 函数图形如图 0-5 所示.

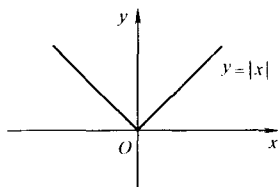


图 0-4

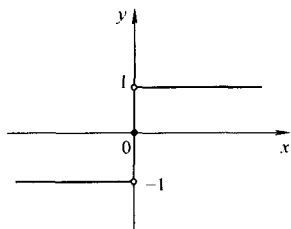


图 0-5

**例 6** 取整函数

$$y = [x] = n, n \leq x < n+1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

函数值定义为小于或等于  $x$  的最大整数, 例如  $[1.3] = 1, [2] = 2, [-0.5] = -1, [-\pi] = -4$ . 其定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , 函数图形如图 0-6 所示, 这是一个分为无限多段的分段函数.

**例 7** 狄里克莱(Dirichlet)函数

$$y = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

其定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $R = \{0, 1\}$ . 函数图形如图 0-7 所示.

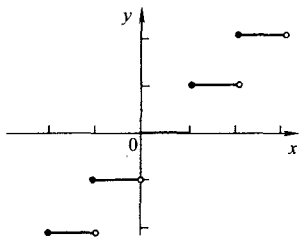


图 0-6

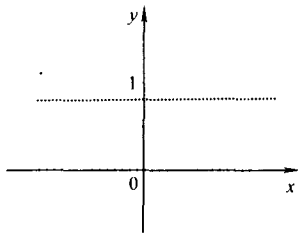


图 0-7

**例 8** 如图 0-8 所示, 在  $O$  与  $A$  之间引一条平行于  $y$  轴的直线  $MN$ , 试将直线  $MN$  左边阴影部分的面积  $A$  表示为  $x$  的函数.

解 当直线  $MN$  上点  $x$  的坐标位于区间  $[0, 1]$  内, 即  $x \in [0, 1]$  时,  $A = \frac{1}{2}x^2$ .

当直线  $MN$  上点  $x$  的坐标位于区间  $(1, 2]$  内, 即  $x \in (1, 2]$  时,

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + (x-1) \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

因此所求面积

$$A = A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

其定义域  $D=[0, 2]$ , 值域  $R=[0, \frac{3}{2}]$ .

在科学技术和日常生活中, 我们经常会遇到分段函数, 例如出租汽车的计价问题, 个人所得税的缴纳问题等, 都需要用分段函数来表示.

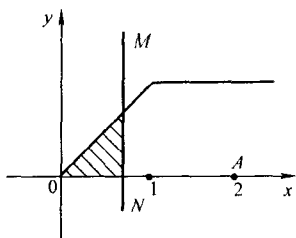


图 0-8

**例 9** 设函数  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2+2 & x < 0 \end{cases}$ , 试求  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$  和

$f(x-1)$ .

解 根据分段函数的定义, 有

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)+1 & x-1 > 0 \\ 0 & x-1 = 0 \\ (x-1)^2+2 & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & x > 1 \\ 0 & x = 1 \\ x^2 - 2x + 3 & x < 1 \end{cases}$$

**例 10** 设  $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $f(x) - f(x-1)$ .

解 先将  $x-1$  替换  $f(x)$  中的  $x$ , 得

$$f(x-1) = \begin{cases} 0 & x-1 < 0 \\ 1 & x-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

0 和 1 将  $f(x)$  和  $f(x-1)$  的定义域  $D=\mathbf{R}$  分成了三部分:

当  $x < 0$  时,  $f(x) - f(x-1) = 0 - 0 = 0$ .

当  $x \geq 1$  时,  $f(x) - f(x-1) = 1 - 1 = 0$ .

当  $0 \leq x < 1$  时,  $f(x) - f(x-1) = 1 - 0 = 1$ .

因此

$$f(x) - f(x-1) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

## 3. 参数方程

函数  $y=f(x)$  在平面上表示一条曲线,若曲线上点  $(x, y)$  的两个坐标都可以表示成变量  $t$  的函数,即

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

则上式也是这条曲线的方程,称为曲线的参数方程,其中  $t$  是参数. 参数方程是函数的另一种表示方式.

**例 11** 圆的方程为  $x^2 + y^2 = R^2$ ,若选取  $\theta$  为参数,其中  $\theta$  为点  $(x, y)$  和  $(0, 0)$  点的连线与  $x$  轴正向的夹角(见图 0-9),则圆的方程可以表示为

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

这就是圆的参数方程.

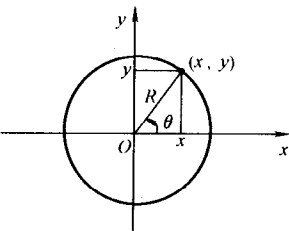


图 0-9

**例 12** 函数  $y = \sin\sqrt{x-1}$ ,若取参数  $t = \sqrt{x-1}$ ,则  $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in$

$[0, +\infty)$  就是  $y = \sin\sqrt{x-1}$  的参数方程.

**例 13** 参数方程  $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$  表示星形线(见图 0-10).

**例 14** 一轮子沿一直线无滑动地滚动,求轮子上一定点的轨迹(见图 0-11).

解 设开始时定点与直线接触,取该点为坐标原点,直线为  $x$  轴. 设轮子的半径为  $a$ ,当轮子向前滚动时,定点就在平面上画出一条曲线. 当轮子滚过一圈时,定点又与直线相接触,并在平面上画出曲线的一拱. 以后轮子每滚动一圈,都画出同样形状的一拱曲线. 由周期性,只要求出第一拱曲线的参数方程.

取半径转过的角度  $t$  为参数,定点  $C$  的坐标为  $(x, y)$ ,即要求出  $x, y$  随  $t$  的变化规律. 为此,过圆心  $A$  作  $x$  轴的垂线  $AM$ ,过  $C$  作  $AM$  的垂线  $CB$ ,由图 0-11 看出

$$x = OM - CB$$

$$y = AM - AB$$

因轮子无滑动,所以  $OM = \widehat{CM}$ ,从而有

$$x = OM - CB$$

$$= at - asint = a(t - \sin t)$$

$$y = AM - AB = a - acost = a(1 - cost)$$

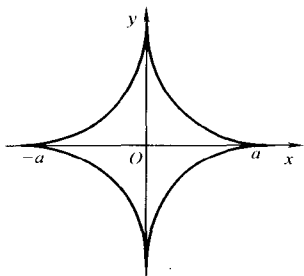


图 0-10

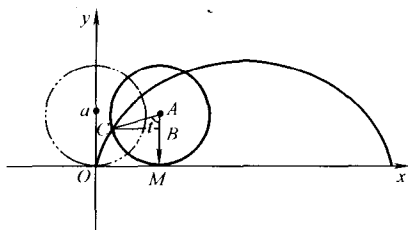


图 0-11

式中,  $t$  为参数 ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), 这就是曲线的参数方程.

我们称这条曲线为旋轮线, 又称为摆线.

#### 4. 极坐标系

如图 0-12 所示, 在平面上给定一个定点  $O$ , 从定点引一条固定的射线  $OP$ , 同时规定一个长度单位和一个固定的角度的转向作为正向 (通常取逆时针方向为正向), 这样就建立了一个极坐标系. 定点  $O$  称为极点, 固定的射线  $OP$  称为极轴.

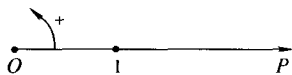


图 0-12

设  $M$  点为极坐标系中任意的一点, 如图 0-13 所示, 称点  $O$  与点  $M$  间的距离  $|OM| = \rho$  为  $M$  点的极径, 称由极轴到  $OM$  的转角  $\theta$  为  $M$  点的极角, 称有序数对  $(\rho, \theta)$  为  $M$  点的极坐标. 一般地, 在极坐标系下,  $M$  点对应着无穷多个极坐标  $(\rho, \theta + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 如图 0-14.

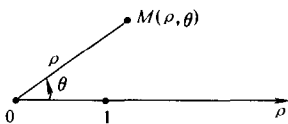


图 0-13

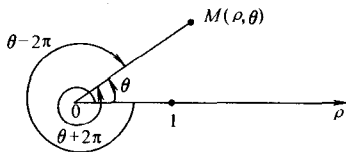


图 0-14

当  $M$  点为极点时, 它的极坐标  $(\rho, \theta)$  中的  $\rho = 0$ ,  $\theta$  可以取任意值.

如果限定  $\rho > 0$ ,  $0 < \theta \leq 2\pi$ , 则除极点外, 平面内的点可以和有序数对  $(\rho, \theta)$  建立一一对应关系.

在平面上, 直角坐标系和极坐标系之间是可以相互转化的. 如图 0-15 所示, 如果我们将两个坐标系按下述条件重合在一起:

(1) 极坐标系的极点与直角坐标系的原点重合.



(2)极坐标系的极轴与直角坐标系的  $x$  轴正向重合.

(3)极坐标系与直角坐标系的长度单位相同.

设  $M$  点是平面上的任一点,  $M$  点的直角坐标为  $(x, y)$ , 极坐标为  $(\rho, \theta)$ , 则有关系式

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

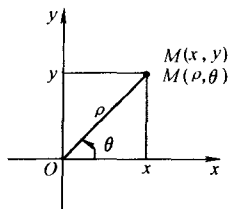


图 0-15

平面上的曲线方程除了用直角坐标表示外,还可以用极坐标来表示.例如,在极坐标系中,

$\rho = \text{常数}$ , 表示以原点为圆心, 以该常数为半径的圆.

$\theta = \text{常数}$ , 表示与  $x$  轴正向夹角为  $\theta$  的一条射线.

**例 15** 极坐标方程  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ) 表示心形线(见图 0-16).

图形的描绘可以这样来考虑, 取  $\theta$  的一个周期  $[0, 2\pi]$ , 当  $\theta$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$  时,  $\rho$  从  $2a$  变到  $a$ ; 当  $\theta$  从  $\frac{\pi}{2}$  变到  $\pi$  时,  $\rho$  从  $a$  变到 0; 当  $\theta$  从  $\pi$  变到  $\frac{3}{2}\pi$  时,  $\rho$  从 0 变到  $a$ ; 当  $\theta$  从  $\frac{3}{2}\pi$  变到  $2\pi$  时,  $\rho$  则从  $a$  变到  $2a$ .

**例 16** 极坐标方程  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$  ( $a > 0$ ) 表示的图形是双纽线(见图 0-17).

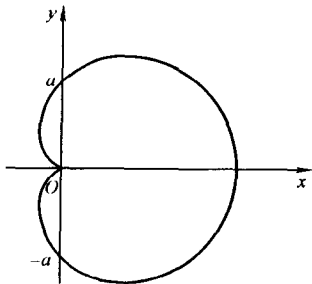


图 0-16

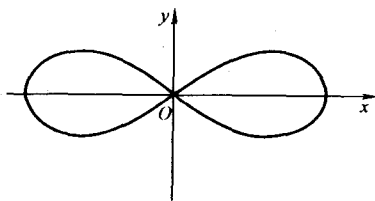


图 0-17

由  $\cos 2\theta = \frac{\rho^2}{a^2}$  知,  $\cos 2\theta \geq 0$ , 解得  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , 或  $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ , 所以双纽线的

图形与射线  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{5\pi}{4}$  都相切.

**例 17** 极坐标方程  $\rho = a$  表示圆心在坐标原点, 半径为  $a$  的圆; 极坐标方