

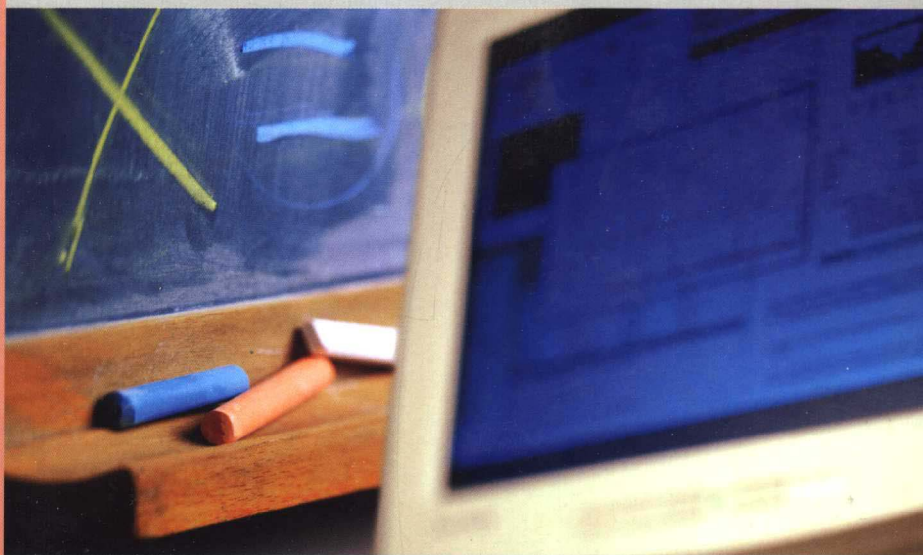
小学教师教育本科段教材

数学 (的)

观念、思想和方法

SHUXUE DE GUANNIAN SIXIANG HE FANGFA

首都师范大学初等教育学院组编
郜舒竹 主编 ▶



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

中国数学教育 30 周年纪念特刊

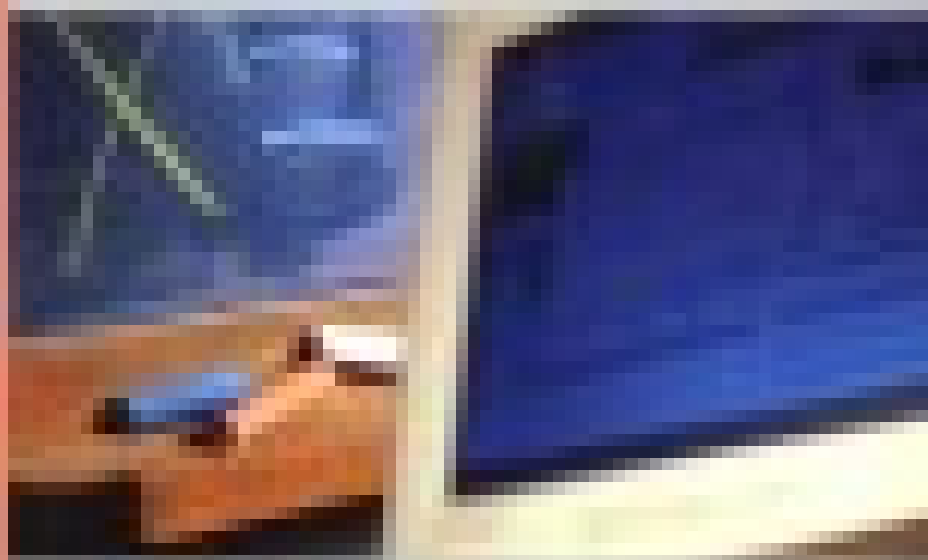
数学 ⑤

观念、思想和方法

CONCEPTS AND THOUGHTS BEHIND THE SYMBOLS

《数学》编委会编

2017 年 10 月



中国数学教育 30 周年纪念特刊

小学教师教育本科段教材

数学 的

观念、思想和方法

SHUXUE DE GUANNIAN SIXIANG HE FANGFA

首都师范大学初等教育学院组编

主 编： 郜舒竹

副主编： 刘长红 程小红

编 者： 徐春华 刘长红 程小红

 郜舒竹 杨洁菊 刘月艳

审 定： 房荣林



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学的观念、思想和方法/部舒竹主编. —北京:首都师范大学出版社,
2004.5

ISBN 7-81064-714-8

I. 数… II. 部… III. 数学课—教学研究—小学—师资培训—教材
IV. G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 036164 号

SHUXUE DE GUANNIAN SIXIANG HE FANGFA

数学的观念、思想和方法

部舒竹 主编

责任编辑 刘小峰

首都师范大学出版社出版发行

地 址 北京西三环北路 105 号

邮 编 100037

电 话 68418523(总编室) 68982468(发行部)

网 址 www.cnup.cnu.cn

E-mail cnup@mail.cnu.edu.cn

北京嘉实印刷有限公司印刷

全国新华书店发行

版 次 2004 年 4 月第 1 版

印 次 2004 年 4 月第 1 次印刷

开 本 787mm×1 092mm 1/16

印 张 25

字 数 428 千

印 数 0,001~5,000 册

定 价 36.80 元

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换

序 言

在我国基础教育的改革与发展中，小学教师培养模式的改革恐怕算是最具有挑战的方面和领域之一。一方面，它面临着学历层次提高的要求；另一方面，它也需要适应新的课程标准的改革；同时，小学一线教师的培养机构也在经历着由中等师范院校向大学的转变。所有这些都要求小学教师培养过程中的各个环节和因素都相应地进行改革与调整。在这些环节和因素中，教材的重新建设则是一个非常关键的方面。由首都师范大学初等教育学院组织编写的高等教育自学考试初等教育专业（独立本科段）的新教材，集中了各个方面研究和实践的经验和成果，适应新形势的要求与挑战，经过反复的打磨，形成的一套不仅能够满足高等教育自学考试需要，而且同样适应高等学校小学教师培养和培训的系列教材。它是我国第一套适合于高等教育自学考试初等教育专业本科阶段学习教材，因而是小学教师培养模式建设和教学创新的一项非常有意义的措施，是提高小学教师培养质量和水平的一个重要因素，也是该专业主考学校首都师范大学初等教育学院给所有小学教师提供的宝贵的教育资源。

当然，作为高等教育自学考试用书，这套教材在编写过程中，始终坚持了以考生为本的基本原则。在熟悉和了解小学教师的实际与小学教师参加自学考试的特点的基础上，在掌握和认识高等教育自学考试规律和基本要求的实践中，这套教材在整体结构的安排，各本书的体例，章节的顺序，以及内容的组织、文字的写作等方面，均充分考虑了高等教育自学考试的考生的实际需要和特点。同时，这套教材不仅在形式上考虑了小学教师考生的学习特点和实际，而且，在内容上也结合了当前小学教师面临新课程标准要求的实际需要，包括整个书目的选择、教学目标的制定，以及教学内容的安排等，都在一定程度上体现了当前基础教育，特别是小学教育改革与发展的要求。而在这些方面，我个人感到比较突出的主要有以下几个方面。

第一，重视小学教师研究能力和培养与训练。

与以往中小学教材不同的是，这套教材在强调小学教师在教材教法方面

的学习与训练以外，还非常重视小学教师对于各个主要学科的教学研究。例如，这套教材中将过去比较传统的小学语文、英语和教学教材教法的课程，分别拓展为《小学语文教学研究》、《小学英语教学研究》和《小学数学教学研究》，由此突出了小学教师培养和训练中研究能力的锻炼和提高。这与当前中小学教师队伍建设和新课程的要求是非常一致的。如果说，过去我们常常将学科知识、教育教学的知识与能力，以及道德修养三个方面作为合格教师的基本条件，那么，随着时代的发展和教育的改革与变化，研究能力也将越来越成为一个合格教师的必要条件。不会研究课程、教材和学生的教师，绝对不是一个合格的教师。而这套教材正是非常敏锐地看到了这一点，并且在教材体系上进行了这样的改革与创新，应该说，这种改革是非常必要和及时的。这里需要特别说明的是，有的人也许会认为，小学这样简单的教学还需要什么研究吗？如果我们这样来看这个问题，这样认识小学教师的工作，那真是极大的误解。根据教育学的基本理论和个体成长的规律，小学阶段的儿童的成长对他一辈子的影响都是十分关键的，而在这个阶段的教育也是最复杂的，我们甚至可以认为，它可能比在中学和大学的教育对个体的成长都更加重要。因为，正是在这个阶段，儿童开始形成了他的各种习惯，特别是对学习和外部世界和社会的基本态度。这种习惯和态度对于他而言，将是一辈子的事情。从发展心理学的角度看，小学阶段的儿童所经历的发展阶段也是比较复杂的，其中的变化也是非常丰富的。因此，它对于教师的研究能力的教学水平的要求也是非常高的。特别是要求教师能够结合教学，对儿童和青少年本身，包括他们的成长规律、学习规律与特点等，进行深入细致的探讨和研究。

第二，注重培养和提高教师的素养。

大量实践证明，中小学教师不仅需要具有比较丰富的学科知识和理论，掌握熟练的教学技能，而且，也需要具备非常高的综合素养。这种综合素养往往是看不见，摸不着的，但是，它又常常是在各个方面发挥作用的。它是一种显性的知识，更是一种隐性的知识。它体现在一个教师的观念之中，也常常表现在教师的思想和方法中。这套教材非常清楚地看到了这种需要，因而也加强了这个方面的建设。例如，《数学的观念、思想和方法》一书，正是比较充分地体现这个特点和取向。而且，历史类的教材也是帮助教师形成这种综合素养的非常有效的途径，包括中外教育史和中国文学史。这里需要特别提出的是，小学教师的培养与中学教师的培养模式是有所不同的，培养规格也是不同的。一般而言，小学教师往往是一种全科性的培养，而中学教

师则更多是一种专科性的培养，因而两者的知识和理论结构是不同的。作为小学教师，由于学生的特点不同，往往需要具有更加全面的知识、理论和能力，从这个角度看，这种综合性的素养常常是十分重要的。如何全面地掌握各个学科的知识，特别是融会贯通地应用这些不同的知识，了解各个学科知识和理论之间的关系，对于小学教师来说，可能比单纯某一个方面的学科知识更加重要。

第三，适应新课程的特点和要求。

我国目前正在进行和实施的中小学新课程改革和新的课程标准的建设，对于我们过去的课程和教材都是一个新的挑战，它要求在课程建设和教材编写方面相应的进行调整和改革。在这次新课程标准的建设中，比较突出的特点就是非常关注青少年学生的需要，体现了以学生为本的思想和原则：增加了综合活动实践课。这对于我们许多小学教师来说，也是一个新的挑战。现在这套教材正是非常及时地抓住了这种变化，特别加强了这个方面的建设。例如，《小学生综合实践活动》的教材，以及《小学生心理发展与心理健康》的教材正是反映了这种新的要求，适应了新的课程标准对小学教师的要求，也为小学教师应对这种挑战提供了非常直接的帮助和支持。应该说，这种综合实践活动课的建设是一项非常需要研究和探讨的课程。而且，小学的综合实践活动与中学的综合实践活动课又是有所不同的。如何抓住小学综合实践活动的特点，的确不是一件容易的事情。而丛书的编写者大胆地进行了这个方面的尝试，并且产生了比较好的效果，这一点是值得鼓励和赞赏的。

显然，希望在一个简短的序言中将这套教材的各个方面都详细地进行介绍是不可能的。但是，作为一个关注我国基础教育改革与发展的教育工作者，欣喜地看到它的出版，进而借这个机会表达自己的一点想法和体会，也算是一种参与吧！这里，我还要特别感谢北京市教育委员会和北京市高等教育自学考试委员会的领导、支持和非常具体的指导帮助。我也要感谢首都师范大学的领导，特别是首都师范大学初等教育学院的领导在组织编写这套教材中所付出的辛勤劳动和大量科学细致与认真的组织工作。当然，我一定要感谢这套丛书的各位编写者的努力，以及首都师范大学出版社领导、本套书的责任编辑，没有他们的智慧和踏实的工作，没有他们的大力支持，整套教材的出版也是不可能的。

但是，在最后我还应该说明的是，一套教材无论如何的出色，也总是有它的不足的。它不可能囊括小学教师所应该具有的所有知识、理论和素质。

也不可能完全反映所有小学教师教育研究的全部观点与看法。更加重要的是，它不可能完全代替教师本身的教学实践和工作，更不能取消教师本人的创新。一套教材的真正的效果，还应该取决于教师的教学工作，依靠教师对教材的研究和应用。如果说，教材只是一种教学资源，那么，这些资源能否真正发挥比较大的作用，产生更大的效益，还需要依靠教师本身的实践。

谢维和

2004年4月27日

于励耘楼

前 言

当前，我国的基础教育改革正在向纵深发展。在这种形势下，作为基础之基础的小学教育必然面临新的挑战。当务之急是要造就一支符合时代需要与改革需要的小学师资队伍。为此，国内许多高等师范院校陆续设立“小学教育专业”，着力提高小学教师的学历层次和实际水平。

21世纪将是数字化或在某种意义上是数学化的世纪。数学素养应该是现代社会每一个有文化的公民必须具备的基本素质。因此，北京市决定为大学本科小学教育专业开设“数学的观念、思想和方法”这样一门必修课程，是正确的和有远见的措施。本书是针对这门重要的课程而编写的教材，反映了我国初等教育发展的时代特征。

高学历小学数学教师的专业培训在国内外并无成鉴可借，本书按数学的哲学与历史、数学文化、数学科学知识及数学教育理论四大方面来组织教学，在传统的学校数学知识范畴外增加了数学哲学、历史与文化的部分，同时强调数学与其他科学的联系，在建立小学本科数学教育的创新知识体系方面作出了可贵的尝试。本书内容全面，编者对选材有精心的考虑，教学上承上启下，具有较强的育人功能。我相信，本书的出版使用必将对提高我国小学师资的整体水平起到有力的推进作用。

中国现代数学教育如果从1905年废除科举、兴办新学算起，已有百年历史，从模仿西方，学习前苏联，到当今独立自主的、完整的教育体系，这是艰难曲折的百年，改革奋进的百年，也是成绩辉煌的百年，她培养了以华罗庚、陈省身为代表的一批国际级数学大师，孕育了数学机械化、哥德巴赫猜想研究等一系列举世瞩目的数学成果，并在上世纪末为我国赢得了国际数学家大会主办国的地位。当然，我们同时应该清醒地认识到，我国的数学教育和数学研究与国际先进水平相比还存在着相当的差距，正是这种差距，说明了我们与时俱进地进行数学教育改革的必要性。我认为，健康的数学教育改革，应该是在肯定成绩、寻找差距、总结经验与教训的基础上开展。固步自封、保守传统是错误的，全盘否定，对我国数学教育的成就与现状的虚无倾向也是错误的。笔者高兴地注意到，本书的编者对这一问题采取了客观的

态度。如，主编后记中指出我国小学教师的数学教育历来有重视数学基础知识的特点，但同时又分析除了“一般科学意义下的数学知识”和“学校数学知识”外，还应加强“学校数学哲学的知识”以及“对不同科学知识的综合”这两个方面。书中对从杜威到弗赖登塔尔的西方教育理论及数学教育改革运动既有兼收并蓄的介绍，也有对其不足与缺陷的分析，等等。惟其如此，才能明确我国数学教育进一步改革、发展的方向。

我本人对初等数学教育是外行，部舒竹同志嘱为本书写序，谨借此机会表示对《数学的观念、思想和方法》出版的祝贺及对编者们在改革我国的初等数学教育所做努力的支持，同时祝愿本书在教学实践中取得成功并不断改进、完善。

李文林

2004年1月6日

于北京中关村

目 录

| | |
|-----------------------------|--------|
| 第 1 章 数学的萌芽 | (1) |
| 1.1 数概念的产生 | (1) |
| 1.1.1 感性—集合计数 | (1) |
| 1.1.2 手算、结绳和刻痕记数 | (2) |
| 1.1.3 数目字的出现 | (4) |
| 1.2 各种古老的记数法 | (4) |
| 1.2.1 进位制和位值制 | (4) |
| 1.2.2 几种古老的记数法 | (6) |
| 1.3 形概念的形成 | (11) |
| 1.4 文明古国的数学 | (12) |
| 1.4.1 古埃及的数学 | (13) |
| 1.4.2 古巴比伦 | (15) |
| 第 2 章 数学思想的发展 | (18) |
| 2.1 初等数学体系的形成 | (18) |
| 2.1.1 算术 | (18) |
| 2.1.2 初等几何 | (25) |
| 2.1.3 初等代数 | (32) |
| 2.1.4 中国古代的数学成就 | (44) |
| 2.2 变量数学的产生与发展 | (60) |
| 2.2.1 解析几何的出现 | (61) |
| 2.2.2 微积分的产生和发展 | (63) |
| 2.3 纯数学的兴起 | (72) |
| 2.3.1 几何学的变革——非欧几何的产生 | (72) |
| 2.3.2 分析基础的建立 | (76) |

| | |
|--------------------------|--------------|
| 2.3.3 代数学的突破 | (80) |
| 2.4 20世纪数学概观 | (84) |
| 2.4.1 希尔伯特的23个问题 | (84) |
| 2.4.2 20世纪数学发展特点 | (87) |
| 2.4.3 20世纪若干数学成果介绍 | (90) |
| 2.4.4 现代中国数学 | (98) |
| 2.4.5 21世纪的数学问题 | (101) |
| 第3章 数学哲学 | (104) |
| 3.1 西方早期的数学观 | (104) |
| 3.1.1 毕达哥拉斯学派的数学观——唯数论 | (104) |
| 3.1.2 柏拉图学派的数学观——数学实在论 | (105) |
| 3.1.3 亚里士多德的数学观——数是抽象的存在 | (106) |
| 3.2 中国古代的数学观 | (108) |
| 3.2.1 数和数学的神秘性 | (108) |
| 3.2.2 数学的实用主义 | (110) |
| 3.3 17、18世纪的数学观 | (111) |
| 3.3.1 17世纪的数学观 | (112) |
| 3.3.2 18世纪的数学观 | (113) |
| 3.4 现代数学观 | (115) |
| 3.4.1 逻辑主义 | (115) |
| 3.4.2 直觉主义 | (116) |
| 3.4.3 形式主义 | (117) |
| 3.5 数学的特点 | (118) |
| 3.5.1 抽象性 | (119) |
| 3.5.2 精确性 | (119) |
| 3.5.3 应用的广泛性 | (120) |
| 3.6 数学危机 | (122) |
| 3.6.1 第一次数学危机 | (122) |
| 3.6.2 第二次数学危机 | (123) |
| 3.6.3 第三次数学危机 | (125) |
| 第4章 数学与其他领域 | (132) |

| | |
|----------------------------|--------------|
| 4.1 数学与文学 | (132) |
| 4.2 数学与艺术 | (139) |
| 4.2.1 数学与音乐 | (139) |
| 4.2.2 数学与绘画 | (142) |
| 4.2.3 数学与建筑 | (146) |
| 4.3 数学与经济 | (149) |
| 4.4 数学与战争 | (155) |
| 第5章 数学的概念和命题 | (159) |
| 5.1 概念 | (159) |
| 5.1.1 概念 | (159) |
| 5.1.2 公理化体系的思想与方法 | (169) |
| 5.2 数理逻辑简介 | (178) |
| 5.2.1 命题简介 | (179) |
| 5.2.2 命题逻辑 | (180) |
| 5.2.3 谓词逻辑 | (191) |
| 5.3 高观点下的一些初等数学概念 | (197) |
| 5.3.1 自然数、整数、有理数 | (197) |
| 5.3.2 函数 | (208) |
| 5.3.3 实数 | (213) |
| 5.3.4 度量 | (217) |
| 5.3.5 无限与集合 | (226) |
| 第6章 数学的运算和证明 | (235) |
| 6.1 计算和运算 | (236) |
| 6.1.1 计算与证明 | (236) |
| 6.1.2 代数系统中的运算 | (240) |
| 6.1.3 算法 | (246) |
| 6.2 证明 | (253) |
| 6.2.1 证明的意义 | (254) |
| 6.2.2 初等数学中几种常见的证明方法 | (267) |
| 6.2.3 数学的真理性 | (278) |
| 第7章 数学教育与教育数学 | (290) |

| | |
|-----------------------------------|--------------|
| 7.1 数学教育领域的几件大事 | (290) |
| 7.1.1 培利—克莱因的数学教育改革运动 | (290) |
| 7.1.2 杜威实用主义教育思想的影响 | (292) |
| 7.1.3 新数学运动 | (293) |
| 7.1.4 弗赖登塔尔的数学教育思想 | (296) |
| 7.1.5 英国的考克罗夫特报告 | (297) |
| 7.1.6 全美数学教师协会的《学校数学的原则与标准》 | (299) |
| 7.2 教育数学 | (302) |
| 7.2.1 案例分析 | (302) |
| 7.2.2 数学教育的基本矛盾 | (306) |
| 7.2.3 从数学教育到教育数学 | (307) |
| 第8章 问题与问题解决 | (310) |
| 8.1 问题的认识 | (310) |
| 8.1.1 通常意义下问题的涵义 | (310) |
| 8.1.2 心理学领域中问题的涵义 | (311) |
| 8.1.3 数学教育领域中的问题 | (311) |
| 8.1.4 数学家眼中的问题 | (313) |
| 8.1.5 数学教师应该怎样认识问题 | (315) |
| 8.2 问题解决中的矛盾分析 | (317) |
| 8.3 模式识别与问题解决 | (322) |
| 8.3.1 模式 | (323) |
| 8.3.2 模式间的联系 | (326) |
| 8.3.3 问题解决中的模式识别 | (330) |
| 8.4 化归——问题解决的通用模式 | (334) |
| 8.5 问题的背景 | (341) |
| 8.5.1 问题背景与问题提出 | (341) |
| 8.5.2 问题背景与数学发现 | (344) |
| 8.5.3 问题背景与模式理解 | (346) |
| 第9章 教育数学与科学教育 | (351) |
| 9.1 教育数学中的科学概念 | (351) |
| 9.1.1 对科学概念的理解和界定 | (351) |

| | |
|-----------------------------|-------|
| 9.1.2 教育数学中的科学概念及其科学性 | (352) |
| 9.2 数学方法在科学教育中的运用 | (354) |
| 9.2.1 数学方法与科学方法 | (354) |
| 9.2.2 公理化方法 | (356) |
| 9.2.3 化归方法 | (359) |
| 9.3 观察与实验 | (363) |
| 9.3.1 观察 | (363) |
| 9.3.2 实验 | (366) |
| 9.4 猜想与假说 | (373) |
| 9.4.1 数学猜想 | (373) |
| 9.4.2 科学假说 | (375) |
| 后记 | (379) |

第 1 章 数学的萌芽

萌芽时期的数学思想主要围绕着数和形两个概念展开，体现在数概念方面的数学思想包括数概念的产生、记数和数的计算等；体现在形概念方面的数学思想则是图形概念的形成，关于图形各部分之间关系的初步认识和对图形特性的初步了解。

1.1 数概念的产生

在有文字记载之前人类就已经有了数概念。对于数是如何产生的这一问题，自古以来就有很多认识。我国不仅有“黄帝时隶首作数”的传说，而且也有“龙马负图，而数肇焉”的神秘主义观点。近代这方面理论也很多，以下按其中数的表现形式来介绍数概念的形成。

1.1.1 感性—集合计数^①

数的概念不是一下子就完善的，起初人们只能认识“有”还是“没有”，后来又渐渐有了“多”与“少”的朦胧意识。例如，当把某些对象添加到另一些对象中去，会认识到是“多了”，从一群对象中取走某些对象时，会认识到“少了”。

随着生产的发展，人口的增加，很快就需要比较精确地确定事物的数量。原始人采用一一对应的方法体现事物的数量：把两组对象进行一一比较，如果两组对象完全对应，则这两个组的数量就相等。例如，在澳洲东南大陆的两部落之间，交换鳗鱼和菜根的过程是这样进行的：两个男人分别带来鳗鱼和菜根，放在一块很长的树皮上，然后，将鱼的头部从一方转向另一方，把交换物品对应着移动，直至移完为止。如果要以分别计数的方法进行交换，当地人是接受的。这就表明，在对交换的东西进行比较时，开始并

^① 王鸿钧，孙宏安．数学思想方法论．北京：人民教育出版社，1992，13 页

不考虑一堆东西的个数，而是建立感性、直观的“一一对应”关系。

在长期的采集、狩猎等生产活动中原始人逐渐注意到一只羊与许多羊，一头狼与整群狼在数量上的差异。通过一只羊、一头狼与整群狼的比较，就逐渐看到一只羊、一头狼、一条鱼、一棵树……之间存在着某种共同的东西，即它们的单位性。由此抽象出数“1”这个概念。在这个时候，数“1”表示的是具有单个对象的集合之间的量的关系，是这种量的关系在人的头脑中的反映。数“1”可以说是这类具有单个元素的集合的特征。可以认为，在人类发展的一个相当长的阶段上，人们惟一具有的最原始的数的概念是“1”，与之相对应的是一个比较确定的观念——“多”。

在人们只能区别“1”和“多”，并用一一对应的方法来确定客观事物的集合的量的关系时，人们对某个具体事物的集合的数量的认识，实际上依赖事物本身，即按事物的不同的质来认知它们的量的关系。例如，南美阿毕邦印第安人在19世纪时还只有几个数词（如1，2，3），他们以打猎为生，出猎时往往带着他们饲养的数量众多的猎狗，如果少了一只猎狗，他们不仅能够及时察觉，而且在找寻时能准确地叫出缺少的那只猎狗的名字。我们把认识数量的这一阶段叫做感性—集计数阶段。在这个阶段里，数还没有确定的表述方式，它还没从事物本身和质量特性中区分出来，人们区分和比较集合的能力，表现为根据质量特征区分集合的元素和集合整体的能力。

1.1.2 手算、结绳和刻痕记数

人类生产活动的发展，使得直接通过每个集合的元素的逐一对比来认知该集合的数量的方法不够用了，因为人们越来越经常地需要再现某些集合的数量。在这个阶段，数学中发生了第一次抽象，人们抛弃了必须将被数的物品放置在旁边的做法，而是把一些被数物品用另外某些彼此同类的物品或标记来代替，如用手指、小石块、绳结、树枝、刻痕等。根据彼此一一对应的原则进行这种计算，也就是给每个被数物品选择一个相应的东西作为计算工具。这就是早期的记数。

最早可能是手算，即用手指计数。一只手上的5个指头可以被现成地用来表示5个以内事物的集合。两只手上的指头合在一起，可以数到10，再和脚趾联合在一起，可以数到20。还有的民族，借用别人的手指计数。当数目正好用二个人的手指计完时，就说这个数目是“别人”，而当数目需要两个人的全部手指和另一个人的4个手指计完时，那么就称为“他人四指”。这样的实践使人们产生了“满十进一”的思想。正如亚里士多德（Aristotle, 384~322）早就指出的那样，今天10进制的广泛地采用，只不过是人类绝