全国高等农业院校教材

应用数学

（第二版）

北京农业机械化学院　主编

农　业　出　版　社

全国高等农业院校教材

应　用　数　学

（第 二 版）

北京农业工程大学主编

农　业　出　版　社

全国高等农业院校教材

应用数学（第二版）

北京农业工程大学主编

*　　*　　*

责任编辑　李耀辉

农业出版社出版（北京朝内大街130号）

新华书店北京发行所发行　　北京市潮白印刷厂印刷

787×1092毫米 16 开本　30 印张　700 千字

1987 年 5 月第 1 版　1987 年 5 月第 2 版北京第 1 次印刷

印数　1—6[illegible]000 册　　定价 4.95 元

ISBN 7-109-00078-8/O·2

统一书号　13144·314

第一版前言

在本世纪实现农业现代化、工业现代化、国防现代化和科学技术现代化，农林院校肩负着相应的责任。农业现代化要求农业机械化有一个飞跃的发展，面临这个任务，农业机械化专业传统的数学内容已不适应形势发展的要求。一九七七年全国农林院校农业机械化专业教材会议决定编写《应用数学》，内容包括近似数、线性代数、概率论、数理统计及实验方法。

这几章是按下列学时考虑的：

近似数 4 学时；线性代数30学时；概率论20学时；数理统计及实验方法26学时，共计80学时。

为了适应各校不同的情况，我们对一些章节予以适当的灵活安排。这些章节打有 * 号，由各学校自行安排取舍。

本书末附有有关数学用表，以供学习需要。

本书由北京农业机械化学院余宁旺主编，吉林农业大学孙立城为副主编。参加本书各章编写的同志为：近似数、线性代数由金子瑜、孙立城、程新意编写；概率论由樊守义、王乃信、卢一粪编写；数理统计及实验方法由余宁旺、刘襄成、程序、徐仲儒编写。钱明亮也参加了编写工作。

在编写过程中，我们经过多次集体讨论，大家定稿，但由于水平所限，错误在所难免，希读者，尤其是农业机械化专业的数学老师，对我们提出宝贵意见。

第二版前言

本书是1979年出版的全国农业高等院校试用教材《应用数学》的修订本。《应用数学》出版后，经过几年试用，对农业院校的教学起了一定的作用。这次修订是根据读者的意见和我们多年教学实践以及当前的需要作了较大幅度的修改，取消了近似数，增添了线性空间、回归设计等内容。修订本的内容为：线性代数、概率论、数理统计、回归试验设计。

这几部分的学时分配为：线性代数29—34学时；概率论26—31学时；数理统计20学时。本书打有*号的章节不分配学时，是为了适应各校不同情况以及满足广大农业科技工作者的需要而写的。目前回归试验设计这种新的数据处理方法在农业、工业上已发挥了一定的作用。我们配有实例，供广大读者参考。

本书作为高等农业院校教材，也可作为广大农业科技工作者的参考书。

由于水平所限，错误在所难免，希望广大读者提出宝贵意见。

目　　录

I　线性代数

II 概率论

III 数理统计与试验设计

Ⅰ　线性代数

第一章　行 列 式

行列式是数学中的一个重要工具，它产生于解线性方程组。在数学和其他学科中有着广泛的应用。这一章我们从二、三阶行列式的定义出发，引出几阶行列式的归纳法定义，介绍其基本性质和计算方法以及利用行列式解线性方程组的克莱姆法则。

§1　行列式的概念

在初等数学中，已由解二、三元线性方程组的问题引出了二、三阶行列式的概念。我们知道二、三阶行列式可以分别表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

把三阶行列式（2）展开，它的完全展开式就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{3}$$

特别地，可以定义一阶行列式$|a_{11}|$为：

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

由此就可以引出 n 阶行列式的归纳法定义。

为了叙述方便，先引进 n 阶行列式的记号，并给出余子式、代数余子式等概念。我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示 n 阶行列式，它是由 n^2 个数排成 n 行 n 列而构成的，**横排称为行**，**竖排称为列**。其中，数 a_{ij}（i，$j=1,2,\cdots,n$）称为**行列式的第 i 行第 j 列的元素**；第一个下标 i 表示该元素所在的行数，称为**行下标**；第二个下标 j 表示该元素所在的列数，称为**列下标**。

定义 1　将行列式的元素 a_{ij} 所在的行与列划去后由剩下的元素（不改变它们的相对位置）构成的 $(n-1)$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}。M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\text{.}$$

例如，四阶行列式记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\text{.}$$

它的元素 a_{12} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\text{.}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\text{.}$$

下面给出 n 阶行列式（$n\geqslant 2$）的定义：

定义 2　设一阶行列式已定义，则由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的 n 阶行列式定义为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} \\ &= a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}\text{.} \qquad (\text{Ⅰ}-1.1)\end{aligned}$$

这个定义的意义是：n 阶行列式可归结为 $n-1$ 阶行列式，而 $n-1$ 阶行列式可归结为 $n-2$ 阶行列式，这样下去最后归结为已定义过的三阶、二阶、一阶行列式。

公式（Ⅰ—1.1）也称为 n 阶行列式按第一列元素展开的展开式。

例　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解　按照定义，我们有

$$D=(-1)^{1+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\cdot(-5)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{4+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=40.$$

由式（1）及（3）可以看出，二、三阶行列式的完全展开式有这样一个共性：它的每一项是行列式中位于不同行、列的元素的乘积。二阶行列式有 2！项，三阶行列式有3!项。应用数学归纳法可以证明，n 阶行列式的完全展开式共有 $n!$ 项，其每一项是 n 个不同行、列的元素的乘积（证明从略）。

§ 2　行列式的性质及其计算

根据 n 阶行列式的定义，计算一个 n 阶行列式的值是非常麻烦的，因此我们来讨论行列式的性质，并利用这些性质来简化计算。n 阶行列式的性质与三阶行列式的性质是一样的，我们一一叙述如下，只对其中的一部分给予证明。

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次换为列，所得的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\qquad (\text{I}-1.2)$$

称为行列式 D 的**转置行列式**（也可记为 D^T）。

性质 1　行列式转置后其值不变，即 $D'=D$（证明略）。

我们可以验算，例 1 中的行列式 D 转置后其值不变：

$$D'=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

按照定义，可以把它表示为

$$D'=(-1)^{1+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{4+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=3\cdot(-5)-1\cdot(-5)+(-1)\cdot 70-2\cdot(-60)=40.$$

由此性质可知，行列式的“行”所具有的性质，对“列”也一定成立，反过来也一样。

性质 2　互换行列式的两行（列），行列式的值改变符号。

（证明略）

例 1　三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10.$$

交换该行列式的第一、二两行所得的行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-10.$$

由此性质，不难得出如下结论：

若行列式 D 有两行（列）的元素完全相同，则此行列式的值为零。

性质 3　行列式 D 等于它任意一行（列）的元素与它的代数余子式的乘积之和。即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$(i=1,2,\cdots,n).\qquad(\text{Ⅰ}-1.3)$$

或

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$(j=1,2,\cdots,n).\qquad(\text{Ⅰ}-1.4)$$

证　这里我们只证明（Ⅰ—1.4）式，把 D 中第 j 列元素依次和它前面的列互换，最

后把它换到第一列的位置，所得行列式为

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然，D_1中第一列元素 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的余子式，就是原来行列式 D 的第 j 列元素的余子式M_{ij} $(i=1,2,\cdots,n)$。根据行列式的定义有

$$D_1=(-1)^{1+1}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+1}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{nj}M_{nj}.$$

再由性质 2 有（因互换$j-1$次）

$$D=(-1)^{j-1}D_1.$$

于是得

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{j-1}\left[(-1)^{1+1}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+1}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{ij}M_{ij}+\cdots\right.\\ &\quad\left.+(-1)^{n+1}a_{nj}M_{nj}\right]\\ &=(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}\\ &=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{nj}A_{nj}. \end{aligned}$$

性质 4 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和为零。即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j).\tag{I—1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).\tag{I—1.6}$$

证 我们只证（I—1.5）式，为此先用 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 去换行列式的第 j 行，得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad(\text{第 } j \text{ 行})$$

D_1中第 j 行元素 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的代数余子式分别是 D 中第 j 行元素 $a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn}$ 的代数余子式 $A_{j1},A_{j2},\cdots,A_{jn}$。由性质 3 (I—1.3) 式有

$$D_1=y_1A_{j1}+y_2A_{j2}+\cdots+y_nA_{jn}\tag{I—1.7}$$

如果取 $y_1=a_{i1},y_2=a_{i2},\cdots,y_n=a_{in}$ $(i\neq j)$，那么 D 中就有两行元素相同，由性质 2 知，此时 $D_1=0$，因此由（I—1.7）式得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)\ .$$

这就证明了（Ⅰ—1.5）式成立。

性质 5 如果行列式某一行（列）所有元素有公因子，则可将公因子提到行列式记号外面。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (Ⅰ—1.8)$$

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij})\ A_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由此性质，不难推得下列结论：

1° 如果行列式有一行（列）元素全为零，则行列式的值为零。

2° 如果行列式有两行（列）的元素对应成比例，则行列式的值为零。

性质 6 如果行列式某一行（列）的元素都是两项的和，则可将此行列式化为两个行列式的和。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Ⅰ—1.9)

（证明略）

性质 7 如果行列式某一行（列）的元素加上另一行（列）对应元素的 λ 倍，那么行列式的值不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1}+\lambda a_{t1} & a_{s2}+\lambda a_{t2} & \cdots & a_{sn}+\lambda a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{I—1.10}$$

这一性质可以利用性质5、6推出，留给读者自己证明。

我们常利用以上性质来简化行列式的计算，下面举例说明。

例1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 把 D 中第一列元素加到第三列的对应元素上，得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

再把第一列的元素乘以（－5）加到第四列的对应元素上去，得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -11 \\ 3 & 1 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

把这一行列式按第四行展开，根据（I—1.3）式得

$$\begin{aligned} D &= 1\cdot A_{41}+0\cdot A_{42}+0\cdot A_{43}+0\cdot A_{44} \\ &= (-1)^{4+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -11 \\ 1 & 3 & -8 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -85. \end{aligned}$$

例2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 我们把第一行乘以（-1）加到第三行上去，又把第一行乘以（-2）加到第四行上去，得

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\0 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & 2\\0 & -2 & -3 & 1\end{vmatrix}.$$

再按行列式的第一列展开，得

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\0 & -2 & 2\\-2 & -3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\0 & -2 & 2\\0 & -2 & 2\end{vmatrix}=0.$$

例 3 证明三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

证 我们用数学归纳法证明。

对于一阶行列式这一论断是显然的，现设论断对于 $n-1$ 阶行列式成立，今证明对 n 阶行列式论断也成立。

将行列式 D 按第一列展开，得

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

由归纳法假设，右端的行列式等于 $a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$，故

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

由此例还可知，对角形行列式（其中未写出的元素为零）

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 证明范德蒙（Vandermonde）行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j). \quad (n\geqslant 2)$$

式中“$\prod$”为连乘号，$\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$表示$a_1, a_2, \cdots, a_n$这$n$个数的所有可能的$a_i-a_j$（$i>j$）的乘积。例如，当$n=4$时，

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)\cdot(a_4-a_2)(a_4-a_3).$$

证　用数学归纳法证明。

当$n=2$时

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1.$$

故结论成立。设对于$n-1$阶行列式结论成立，证明对n阶行列式结论亦成立。为此从第n行开始，逐行减去上面相邻行的a_1倍，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & \cdots & a_n^2(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}.$$

按第一列展开，得

$$D=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & \cdots & a_n^2(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

后一行列式是$n-1$阶范德蒙行列式。由假设，它等于

$$\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$