



数 学 信 箱

数的整除性

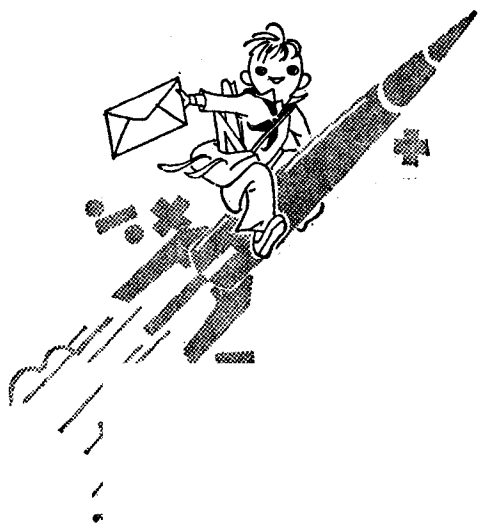
邱 学 华

上海教育出版社

数学信

数的整除性

邱学华



上海教育出版社

数学信箱
数的整除性

邱学华

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷十二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 8.5 字数 56,000

1979 年 10 月第 1 版 1979 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—100,000 本

统一书号: 7150·2096 定价: 0.27 元

给 小 读 者

数学是一门严密的科学，每一个计算法则，每一条结论，都是有根有据的，来不得半点虚假。我们学习数学，不能光顾着算，一定要懂得道理。学习中要多问几个“为什么”，问题不弄清楚，决不罢休。学问学问，就是要一面学一面问，能学能问的人必将有所发现，不断前进。

许多小朋友经常来信，提出各种各样的数学问题，这是十分令人可喜的。我们选取了一部分问题，分门别类，逐一解答，编成了这套《数学信箱》。我们希望，它在加深理解小学数学内容，扩大数学知识和活跃思路等方面，都将对你有所帮助。至于教材中已讲得比较清楚的问题，一般就不选进去了。

本套书的每一册都附有一些练习题，希望你认真思考，不要急于去看后面的答案。

编这样的读物，我们经验不足，问题一定很多。你有什么意见和建议，欢迎来信，以便不断改进。

目 录

给小读者

1. 整除和除尽有什么不同?1
2. 为什么要学习关于“数的整除性”的知识?2
3. 数的整除性有些什么性质?3
4. 为什么判断一个数能不能被 2 或 5 整除, 只要看
这个数的个位数?6
5. 为什么判断一个数能不能被 3 或 9 整除, 只要看
各位数字的和?7
6. 弃九验算法的奥妙在哪里?11
7. 猜数游戏的秘诀在哪里?15
- 练习一17
8. 为什么判断一个数能不能被 4, 25 整除, 只要看这
个数的末两位?19
9. 怎样判断一个数能不能被 8 整除?20
10. 怎样用割减法判断一个数能不能被 7 整除?22
11. 判断一个数能不能被 11 整除, 有什么方法?25
- 练习二29
12. 怎样判断一个数能不能被 6 整除?30
13. 怎样判断一个数能不能被 15, 18, 12, 45 整除?32
14. 三个连续自然数的和, 为什么一定是 3 的倍数?34
15. 三个连续自然数的相乘积, 为什么一定是 6 的

倍数?	35
16. 为什么小猫比小狗先到终点?	36
练习三	37
17. 怎样很快地算出 $1+3+5+7+\cdots+99=?$	39
18. 怎样很快地算出 $2+4+6+8+\cdots+100=?$	42
19. 为什么任意两个连续奇数的和一定是4的倍数?	44
20. 五个连续偶数的和是150, 这五个偶数是哪几个数?	45
练习四	47
21. 质数与合数有最大的吗?	48
22. 怎样判断一个数是不是质数?	51
23. “质数一定是奇数, 偶数一定是合数”, 这句话错在哪里?	52
24. 质数表是怎样编制出来的?	53
25. 5以上的质数分布有什么规律?	54
26. 怎样把一个合数分解质因数?	56
27. “两个数都是质数就叫互质数”, 这句话错在哪里?	58
28. 你能区别质数、质因数和互质数吗?	60
29. 怎样找出一个合数所有的约数?	61
30. 一圆周角等于360度有什么优点?	62
31. 各个数位上都是1的数都是质数吗?	64
32. 什么叫哥德巴赫猜想?	66
33. 什么叫陈氏定理?	67
练习五	68
34. “24是倍数, 8是约数”, 这句话错在哪里?	69
35. 什么叫最大公约数? 有没有最小公约数?	70

36. 什么叫最小公倍数? 有没有最大公倍数?	72
37. 为什么用短除法能求出几个数的最大公约数?	74
38. 为什么用短除法能求出几个数的最小公倍数?	75
39. 为什么用辗转相除法能求出几个数的最大公约数?	78
40. 两个数的最大公约数与最小公倍数, 哪个大, 哪个小?	82
41. 两个数的最大公约数与最小公倍数有什么关系?	84
练习六	86
42. 合理安排劳力与最小公倍数有什么关系?	87
43. 轮船调度与最小公倍数有什么关系?	88
44. 怎样应用最大公约数来合理分组?	91
45. 我国古代有名的“孙子问题”是怎么回事?	92
46. 古代用歌诀来解“孙子问题”, 这又是怎么回事?	95
47. 这个“草包司令”到底带领了多少兵?	97
48. 从 1 到 1000 的自然数中, 不能被 13 和 31 整除的有多少个?	98
49. 有一个整数, 用它去除 47, 61, 75 三个数都余 5, 这个数是几?	100
50. 有一个数分别被 12, 16, 28 去除时都不能整除, 如果这个数加上 5 以后, 就都能整除, 这个数最小是多少?	101
练习七	102
练习答案	104



整除和除尽有什么不同？

我们先来计算两道题目：

(1) $276 \div 12 = 23$

(2) $30 \div 12 = 2.5$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 12 \overline{) 276} \\ \underline{24} \\ 36 \\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ 12 \overline{) 30} \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{60} \\ 0 \end{array}$$

这两道除法计算题有什么共同的特点？它们都没有余数，因此都可以说是除尽。它们又有不同的地方，第(1)题被除数、除数和商都是整数，这种情况称作整除，我们可以说 276 能被 12 整除；第(2)题被除数、除数和商中有一个数，即商是小数，就不能称作整除，也就是 30 不能被 12 整除，只能说 30 能被 12 除尽。

又如

$$1.5 \div 0.5 = 3, \quad 24 \div 0.2 = 120.$$

它们虽然都能除尽，但被除数、除数和商中至少有一个不是整数，所以都不能称作整除。

现在，我们可以很容易地来说明整除和除尽了。

在除法中，只要除到某一位时没有余数，不管被除数、除数和商是整数还是小数，都可以说是除尽；只有被除数、除数和商都是整数的情况下，才可以说是整除。

由此可以知道，整除也可以称作除尽，而除尽不一定是整除。除尽包括了整除，整除是除尽的一种特殊情况。除尽和整除的关系可以用下图来表示：



为什么要学习关于“数的整除性”的知识？

不用笔算，你能判断下列算式中的被除数能被除数整除吗？

$$26553 \div 3$$

$$32846 \div 11$$

$$96186 \div 6$$

$$92148 \div 12$$

$$2589 \div 9$$

$$84275 \div 25$$

$$25632 \div 4$$

$$45824 \div 8$$

你一定会说，数目小的可以做到，数目大了就有困难了。如果你学习过关于“数的整除性”知识，那么就能

比较容易地做到这一点了。

“数的整除性”在数学中是有重要意义的。在分解质因数、求公约数、分数运算中，甚至在代数以及高等数学里都要用到它，所以，它是小学数学中的一项重要的基础知识，我们必须认真学好。

数学中有一个分支叫“数论”，数的整除性也是它研究的内容之一。华罗庚爷爷和陈景润叔叔就是研究这方面学问的专家。我们应该努力学好基础知识，将来就能为实现四个现代化作出贡献。



数的整除性有些什么性质？

$$96 \div 4 = 24, \quad 56 \div 4 = 14.$$

这就是说，96，56 都能被 4 整除。请你填方框：

$$(96 + 56) \div 4 = \square \quad (96 - 56) \div 4 = \square$$

你看，96 与 56 的和与差能不能被 4 整除？

请你再做一些练习：

$$\begin{array}{ll} 216 \div 8 = \square & (216 + 104) \div 8 = \square \\ 104 \div 8 = \square & (216 - 104) \div 8 = \square \end{array}$$

.....

$$\begin{array}{lcl}
 153 \div 17 = \square & & (153 + 119) \div 17 = \square \\
 119 \div 17 = \square & & (153 - 119) \div 17 = \square
 \end{array}$$

你得到了什么结论？

我们说，如果两个数 a, b 都能被同一个数 c 整除，那末它们的和 $(a+b)$ 与差 $(a-b)$ 也能被 c 整除。

a 能被 c 整除
 b 能被 c 整除
 $\Rightarrow (a+b)$ 或 $(a-b)$ 一定能被 c 整除。

这是一条普遍的规律，可以用数学方法来证明它，我们不证明了。

再看下面的算式：

$$69 \div 3 = 23, \quad 52 \div 3 = 17 (\text{余 } 1).$$

$$(69 + 52) \div 3 = 40 (\text{余 } 1),$$

$$(69 - 52) \div 3 = 5 (\text{余 } 2).$$

这就是说，如果两个数 a, b ，其中一个数 a 能被 c 整除，另一个数 b 不能被 c 整除，那末它们的和 $(a+b)$ 与差 $(a-b)$ 一定不能被 c 整除。

a 能被 c 整除 (或不能)
 b 不能被 c 整除 (或能)
 $\Rightarrow (a+b)$ 或 $(a-b)$ 一定不能被 c 整除。

这也是一条规律，我们不证明了。

如果两个数 a, b 都不能被 c 整除，那末它们的和与差能不能被 c 整除呢？请看：

$$\left. \begin{array}{l} 44 \div 7 = 6 (\text{余 } 2) \\ 25 \div 7 = 3 (\text{余 } 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (44+25) \div 7 = 9 (\text{余 } 6) \quad (\text{不}) \\ (44-25) \div 7 = 2 (\text{余 } 5) \quad (\text{不}) \end{array}$$

.....

$$\left. \begin{array}{l} 46 \div 7 = 6 (\text{余 } 4) \\ 24 \div 7 = 3 (\text{余 } 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (46+24) \div 7 = 10 \quad (\text{能}) \\ (46-24) \div 7 = 3 (\text{余 } 1) \quad (\text{不}) \end{array}$$

这说明,在这种情况下,结论是不肯定的。这一点请你特别注意。

最后,我们来看

$$(8 \times 7 \times 9) = 504 \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ 能被 } 2 \text{ 整除, 所以 } 504 \text{ 能被 } 2 \text{ 整除;} \\ 7 \text{ 能被 } 7 \text{ 整除, 所以 } 504 \text{ 能被 } 7 \text{ 整除;} \\ 9 \text{ 能被 } 3 \text{ 整除, 所以 } 504 \text{ 能被 } 3 \text{ 整除.} \end{array} \right.$$

$$(4 \times 9 \times 5) = \boxed{} \left\{ \begin{array}{l} \text{积能不能被 } 2 \text{ 整除, 为什么?} \\ \text{积能不能被 } 3 \text{ 整除, 为什么?} \\ \text{积能不能被 } 5 \text{ 整除, 为什么?} \end{array} \right.$$

这就是说,几个数相乘,如果其中一个因数能被某一个数整除,那末它们的积也能被这个数整除。

它同样是一条规律,我们也不证明了。

上面介绍的就是有关数的整除性的性质。这些性质很重要,必须熟悉并能运用它们。

下面我们举一个例子来看它的作用。我们知道,

$$\text{被除数}(a) \div \text{除数}(b) = \text{商}(q) \cdots \cdots \text{余数}(r).$$

这就是 $a = bq + r.$

如果 b, r 能被同一个数 c 整除,根据上面的性质,那末我们立刻可以得出, a 也能被 c 整除。例如

$$69 \div 6 = 11(\text{余 } 3), \text{ 即 } 69 = 6 \times 11 + 3.$$

这里 3, 6 都能被 3 整除, 所以 69 也能被 3 整除.

又如

$$119 \div 28 = 4(\text{余 } 7), \text{ 即 } 119 = 28 \times 4 + 7.$$

这里的 b, r 都能被哪一个数整除? $a(119)$ 能不能被这个数整除?

这个结论我们在下面要用到.



为什么判断一个数能不能被 2 或 5 整除, 只要看这个数的个位数?

大家都知道, 一个数的个位数是 0, 2, 4, 6, 8, 这个数就能被 2 整除; 一个数的个位数是 0 或 5, 这个数就能被 5 整除. 但如果问一个“为什么?” 可能有的同学会答不上来.



我能整除

个位数是 0, 2, 4, 6, 8



我能整除

个位数是 0 或 5

我们学习数学, 不但要会计算, 更重要的是要懂得道理. 说不出道理, 说明你并没有真正弄懂.

这个道理, 我们简单地加以说明. 任何一个数, 总

可以写成象下面的形式:

$$124 = 100 + 20 + 4$$

$$970 = 900 + 70$$

$$1635 = 1000 + 600 + 30 + 5$$

从上面的式子中可以看出, 一个数的十位上的数字, 如上面的 2, 7, 3, 它们所代表的是 20, 70, 30; 百位上的数字, 如上面的 1, 9, 6, 所代表的是 100, 900, 600; …… 这就是说, 一个数的十位、百位、千位、……数位上的数字所代表的数, 都能被 2 或 5 整除, 因此, 只要个位上的数字能被 2 或 5 整除, 那末这个数就能被 2 或 5 整除了(为什么? 你再看看第 3 题)。所以, 一个数的个位数是 0, 2, 4, 6, 8, 它就能被 2 整除; 个位数是 0 或 5, 它就能被 5 整除。

从上面我们又可以知道, 一个数的个位数是 0, 这个数既能被 2 整除, 又能被 5 整除。

你看上面的 124 能被几整除, 1635 能被几整除, 970 既能被几又能被几整除?



为什么判断一个数能不能被 3 或 9 整除, 只要看各位数字的和?

判断一个数能不能被 3 或 9 整除, 方法很巧妙, 只

要看各位数字的和就知道了。一个数的各位数字的和是3的倍数,这个数就能被3整除。

例如:判断 3576, 2549 能不能被3整除。

3576: $\because 3+5+7+6=21$ (21是3的倍数),

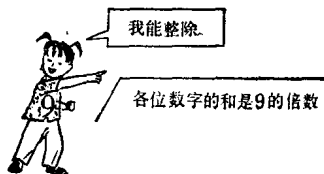
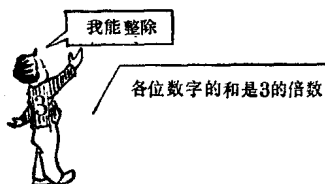
$\therefore$ 3576 能被3整除。

检验: $3576 \div 3 = 1192$ 。

2549: $\because 2+5+4+9=20$ (20不是3的倍数),

$\therefore$ 2549 不能被3整除。

检验: $2549 \div 3 = 849$ (余2)。



一个数的各位数字的和是9的倍数,这个数就能被9整除。

例如,判断 4212, 5282 能不能被9整除。

4212: $\because 4+2+1+2=9$,

$\therefore$ 4212 能被9整除。

5282: $\because 5+2+8+2=17$,

$\therefore$ 5282 不能被9整除。

请你检验一下答案对不对。

要弄懂这个道理比较困难些。让我们先来弄清楚

两个问题。

(1) 凡各位数字都是 9 的数，一定能被 3 和 9 整除。例如，

$$\begin{array}{ll}
 9 \div 3 = 3, & 9 \div 9 = 1, \\
 99 \div 3 = 33, & 99 \div 9 = 11, \\
 999 \div 3 = 333, & 999 \div 9 = 111, \\
 9999 \div 3 = 3333, & 9999 \div 9 = 1111, \\
 \dots\dots & \dots\dots
 \end{array}$$

(2) 10 的倍数可以用下面的形式表示：

$$\begin{array}{ll}
 10 = 9 + 1, & 50 = 5 \times 10 = 5 \times (9 + 1), \\
 100 = 99 + 1, & 200 = 2 \times 100 = 2 \times (99 + 1), \\
 1000 = 999 + 1, & 6000 = 6 \times 1000 = 6 \times (999 + 1), \\
 10000 = 9999 + 1, & 30000 = 3 \times 10000 = 3 \times (9999 + 1), \\
 \dots\dots & \dots\dots
 \end{array}$$

懂得了上面两个问题，就好办了。我们任意取一个数，例如 354，这个数可以写成下面的形式：

$$\begin{aligned}
 354 &= 300 + 50 + 4 \\
 &= \underbrace{3 \times 100}_{\downarrow} + \underbrace{5 \times 10}_{\downarrow} + 4 \\
 &= 3 \times \underbrace{(99 + 1)}_{\downarrow} + 5 \times \underbrace{(9 + 1)}_{\downarrow} + 4 \\
 &= 3 \times 99 + 3 + 5 \times 9 + 5 + 4 \quad (\text{用乘法分配律计算}) \\
 &= \underbrace{(3 \times 99 + 5 \times 9)}_{\substack{\text{9 的倍数} \\ \swarrow \searrow}} + \underbrace{(3 + 5 + 4)}_{\substack{\text{354 的各位数字之和}}} \quad (\text{运用交换律重新归类排队})
 \end{aligned}$$

第一个括号里是 9 的倍数加上 9 的倍数，从第 3 题我们已经知道，它是能被 3 或 9 整除的。因此，这个

数能不能被 3 或 9 整除，只要看第二个括号里的结果就可以了。可是第二个括号里恰恰就是这个数的各位数字的和。如果第二个括号里的和能被 3 或 9 整除，那末这个数就能被 3 或 9 整除；如果第二个括号里的和不能被 3 或 9 整除，那末这个数也就不能被 3 或 9 整除。所以，判断一个数能不能被 3 或 9 整除，只要看各位数字的和就可以了。

另外，还必须注意：9 本身能被 3 整除，所以能被 9 整除的数，一定也能被 3 整除，而能被 3 整除的数，却不一定能被 9 整除。

用这个方法不但能判断一个数能不能被 3 或 9 整除，而且也能判断如果不能整除，余数是多少。

例如，7485 能不能被 9 整除？

$$7 + 4 + 8 + 5 = 24 \longrightarrow 2 + 4 = 6$$

各位数字继续相加

把 7485 各位数字相加，最后所得的和是 6 不是 9，所以它不能被 9 整除。这个最后的和 6，就是原来的数 7485 除以 9 的余数，即

$$7485 \div 9 = 831(\text{余 } 6).$$

又如，3478 能不能被 3 整除？

$$\because 3 + 4 + 7 + 8 = 22 \longrightarrow 22 \div 3 = 7(\text{余 } 1),$$

(各位数字
和除以 3)

这个余数也就
是 3478 除以 3
的余数