提升能力 突破中考 冲刺竞赛

新课标

七年级

数学竞赛通用教材

施 储 马茂年 主编

浙江大学出版社

新课标数学竞赛通用教材

（七 年 级）

主 编 施 储 马茂年
编 委 （按姓氏笔画为序）
马茂年 方旭英 王姣慧 厉秀成
李彩虹 杜素贞 张志堂 张 吉
张宏政 陈永华 宋向阳 林健鸿
郑姬铭 杨宗平 周秋霞 赵 汀
施 储 徐萍燕 袁小容 翁海芳
章中东 童正平 程锡坤 谢丙秋

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标数学竞赛通用教材.七年级/施储,马茂年主编.—杭州:浙江大学出版社,2005.10
ISBN 7-308-04525-0

Ⅰ.新...　Ⅱ.①施...②马...　Ⅲ.①数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 119860 号

出版发行　浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑　杨晓鸣
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　11.75
字　　数　340 千字
版 印 次　2005 年 10 月第 1 版　2006 年 2 月第 3 次印刷
印　　数　10001 — 14000
书　　号　ISBN 7-308-04525-0/G・984
定　　价　17.00 元

前　言

为了满足新一轮基础教育课程改革强调对学生能力的培养，倡导发展学生的个性特长的需要，我们编写了这套《新课标数学竞赛通用教材》，包括七年级、八年级和九年级三个分册。

《新课标数学竞赛通用教材》就是为学生适应初中数学奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助材料。其主要优点：一是“竞赛”，二是“同步”。所谓“竞赛”是指内容的选取和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性，并特别注重了创新能力的培养；所谓“同步”主要是指内容选取的基础性以及安排上与教学进度基本一致，使用时可删减或选用部分内容，也可提前或错后讲解使用。

《新课标数学竞赛通用教材》博采众长，匠心独具，有的放矢，注重实效，值得学生和教师认真读，认真用，认真练。它像粒粒种子，植入百花争艳的竞赛辅导园地；它像股股清泉，滋养莘莘学子的求知心田；它又像把金钥匙，开启您智慧的闸门。创新是魂，这套丛书创新是我们的追求！只有新，才能吸引人；只有新，才有生命力。这套丛书全方位、多维度地展示了创新魅力。它强化了知识的含金量，把准中考和竞赛的脉搏；它具有长于思辨的理性色彩，流淌着人文关爱。正是凭着这样的魅力，激活和梳理着学生的思维，唤起并驱动着学生的创造意识！

考试和竞赛命题的核心是理解和驾驭知识的能力。近年来，加强理解和驾驭知识能力的考查，正是中考、竞赛命题展示给人们的一条清晰的思路，《新课标数学竞赛通用教材》则把这条思路具体化为一条清晰的复习训练思路，这样编写的指导思想是产生精品的保障。

《新课标数学通用培训教材》由浙江省数学特级教师、杭州市正教授级高级教师、杭州市教育局教研室副主任施储老师和杭州第十四中学特级教师、浙江师范大学数学教育硕士生导师、中国数学奥林匹克高级教练马茂年

老师主编。参加编写的教师还有(按姓氏笔画为序):方旭英(杭州第十三中学)、王姣慧(宁波镇海区蛟川书院)、厉秀成(金华东阳吴宁一中)、李彩虹(杭州富阳永兴中学)、杜素贞(金华东阳吴宁一中)、张志堂(杭州勇进中学)、张 吉(台州黄岩区实验中学)、张宏政(舟山南海实验学校)、陈永华(杭州朝晖中学)、宋向阳(衢州市菁才中学)、林健鸿(杭州朝晖中学)、郑姬铭(杭州朝晖中学)、杨宗平(绍兴诸暨市浣江中学)、周秋霞(湖州五中)、赵 汀(绍兴诸暨市浣沙中学)、徐萍燕(杭州萧山南阳镇中)、袁小容(杭州朝晖中学)、翁海芳(宁波镇海区仁爱中学)、章中东(绍兴上虞市实验中学)、童正平(杭州富阳永兴中学)、程锡坤(嘉兴桐乡七中)、谢丙秋(杭州朝晖中学)。

目　录

第1讲　丰富多彩的图形

赛点目标

丰富多彩的图形世界,使我们学习数学增添了无穷的乐趣.本讲通过对图形的展开、折叠、切截、拼接等方法,从不同的方向看丰富多彩的图形,体验探究图形世界奥秘的乐趣.

赛题精讲

例1　足球一般由许多黑白相间的小皮块缝合而成,黑块呈正五边形,白块呈正六边形,如图1-1所示,若黑块有12块,试求白块有多少块?

图1-1

分析与解　由图可知,每一块黑块周围有5块白块与它相邻;每一块白块周围有3块黑块与它相邻,因为黑块共有12块,所以白块共有 $12\div3\times5=20$ 块.

说明　观察和分析图形特点,从图中得出有关结论是数学学习的一种重要方法,在解题过程中,要善于对图形中的信息进行分析、归纳,并能利用这些信息解决问题.

例2　用一边长为3厘米的正方形纸板制作一幅如图1-2所示的七巧板,并解答下列问题:

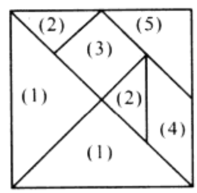


图1-2

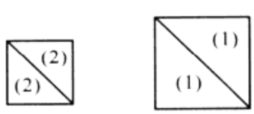
(1)用其中的两个部位拼成一个正方形有几种拼法?拼出所有符合条件的图形;

(2)用其中的三个部位拼成一个三角形有几种拼法?拼出所有符合条件的图形;

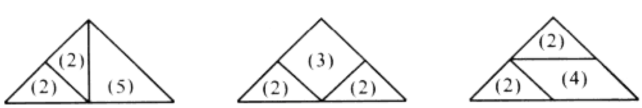
(3)你能拼出其他不同的图案吗?若能,请拼出一个,并给图案取个名字.

分析　拼接成正方形,要用两块完全相同的,有45°角的直角三角形.用三块拼成一个三角形,可分为两类来拼:一类是用三块三角形拼成一个三角形;另一类是用两个三角形再配一块四边形来拼.

解　(1)有两种拼法,如图所示.



(2)有三种拼法,如图所示.



(3)略(充分发挥学生的想象力).

说明　拼接要抓住全等形(完全相同的图形)或相等的边进行拼接.

例3　已知平面上一个圆和 n 条直线:

(1)当 $n=2$ 时,它们最多把平面分成几部分?

(2)当 $n=5$ 时,它们最多把平面分成几部分?

分析与解　一个圆把平面分成两个部分,加一条直线时,当直线与圆有两个交点时,分成平面部分最多,最多是4个部分;当 $n=2$ 时,两条直线都与圆有两个交点(不重合),且这两条直线本身也相交时,如图1-3所示,最多把平面分成 $4+4=8$ 个部分;当 $n=3$ 时,第三条直线与前两条直线两两相交,且与圆有两个交点时,分出的平面最多:$4+4+5=13$ 个部分;当 $n=4$ 时,第四条直线与前三条两两相交(交点不重合),且与圆有两个交点时,分成的平面最多:$4+4+5+6=19$ 个部分;依此规律,当 $n=5$ 时,分成的平面最多:$4+4+5+6+7=26$ 个部分.

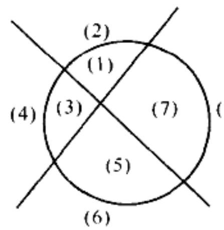


图1-3

说明　探究最多问题,先分清如何分,使得分成的部分最多,要学会从最简单的情形 $n=1,2$ 入手,找出增多的规律,从而求解. 此题若用 n 来表示最多部分结果为:$\frac{1}{2}(n^2+5n+2)$(n 表示直线的条数).

例4　如图1-4是一个边长为3的立方体,现将其各个面都涂成黑色,再切割成27个小立方体,请回答:

(1)有一面是黑色的小立方体有几个?

(2)有两面是黑色的小立方体有几个?

(3)有三面是黑色的小立方体有几个?

(4)各个面都不是黑色的小立方体有几个?

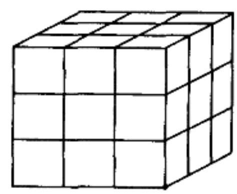


图1-4

分析　图中共有27个小立方体,共有54个小正方面被涂成黑色,这54个黑色面分成三类:(1)有一面是黑色的小立方体位于各个面的正中间;(2)有三面是黑色的小立方体位于大立方体的8个顶点处;(3)其余就是有两个面是黑色的小立方体.

解　(1)有一面是黑色的小立方体有6个;(2)有两面是黑色的小立方体有12个;(3)有三面是黑色的小立方体有8个;(4)各个面都不是黑色的小立方体有1个.

说明　要善于对问题进行分类处理,这样就能做到不重不漏.

例5　用六根火柴棒摆出四个一样的三角形,请画出示意图.

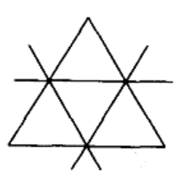


图1-5

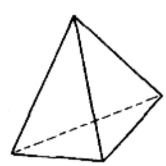


图1-6

分析与解　这是一道智力游艺题，没有一定的数学知识是很难得出正确答案的.

有的人从平面上考虑，其示意图如图1-5所示，其实这种摆法不尽如人意，因为火柴棒不是首尾相连的. 如果从空间去考虑，可以让六根火柴棒成为三棱锥的六条棱，如图1-6所示.

例6　如图1-7是由6个大小一样的正方形拼接而成的，请问它是否能折叠成正方体？如果能折叠成正方体，写出三对相对的面并写出与c相邻的四个面.

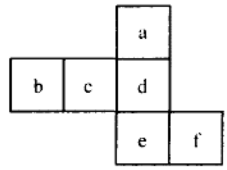


图1-7

分析与解　这是一道操作性命题，它具有考查你的空间想象能力的功能，也考查你的动手操作能力. 发挥你的空间想象能力或者你动手剪一剪，拼一拼不难发现能折叠成正方体. 三对相对的面分别是a与e，b与d，c与f；与c相邻的四个面为：a、b、d、e.

例7　数一数：图1-8中有多少个正方形？

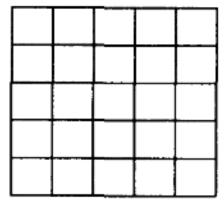


图1-8

分析　将图中的正方形按边长分类计数，这是避免计数时重复或遗漏的好方法.

解　如果我们把图中的每一小段作为单位线段1，那么由一个1为边组成的正方形的个数为：$5^2=5\times5=25$(个)；

由两个1为边组成的正方形的个数为：$4^2=4\times4=16$(个)；

由三个1为边组成的正方形的个数为：$3^2=3\times3=9$(个)；

由四个1为边组成的正方形的个数为：$2^2=2\times2=4$(个)；

由五个1为边组成的正方形的个数为：$1^2=1\times1=1$(个)；

这样，正方形的总数为：$5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=55$(个).

说明　一般情况下，如果把正方形各边平均分成n份，那么得到的正方形的总数为：$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

例8　如图1-9(1)，第一次把三角形剪去一个角后，图中最多有4个角. 如图1-9(2)，第二次再把新产生的角各剪一刀，则图中最多有________个角. 如此下去，每一次都是把新产生的角各剪一刀，则第六次剪好后，图中最多有________个角.

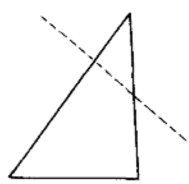


图1-9(1)

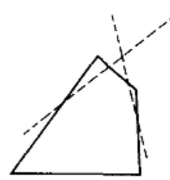


图1-9(2)

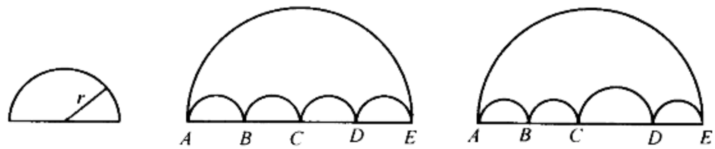
分析与解　操作性问题既要重视动手操作，又要重视在操作中探索规律. 第一次剪好后，图中共有4个角，其中两个角是新产生的，另两个角是原三角形的两个角，以后每次都是把新产生的角再各剪一刀，由此可知后一次新产生的角的个数是前一次新产生角个数的2倍，再加上2就是后一次产生角的总数. 因此，第二次剪好后图中最多有$2+2\times2=2+2^2=6$(个)角，第六次剪好后图中最多有$2+2\times2\times2\times2\times2\times2=2+2^6=66$(个)角.

说明　本题推广到剪n次后，图中最多有角：$(2+2^n)$个.

例9　(1)如图1-10(a)，半径为r的半圆弧长你会算吗？

(2)如图 1-10(b),从 A 村到 E 村有两条路(一条经过 B、C、D,另一条不经过),哪一条路比较近呢?(两条路分别是由一个比较大的半圆和四个半径相等的小半圆组成的)

(3)如图 1-10(c),当四个小圆的半径不相同时,你还能比较出哪一条路更近吗?



(a)　(b)　(c)

图 1-10

分析　计算半径为 r 的半圆弧长小学里就学过,它是半径为 r 的圆周长的一半:πr;对于问题(2),可分别设半径为 r, R;对于问题(3),可分别设半径为 r_1, r_2, r_3, r_4 及 R,显然它们分别有关系:$R=4r$,$R=r_1+r_2+r_3+r_4$.

解　(1)半径为 r 的半圆弧长为 πr(π 为圆周率).

(2)如图 1-10(b),路线一(四个小半圆)总长:$4\times\pi r=4\pi r$;路线二(沿一个大半圆弧)长:$\pi R=\pi\times 4r=4\pi r$,故两条路线一样长.

(3)如图 1-10(c),路线一(四个不等半径的小半圆)长:$\pi r_1+\pi r_2+\pi r_3+\pi r_4=\pi(r_1+r_2+r_3+r_4)$;路线二(沿一个大半圆弧)长:$\pi R$,显然 $R=r_1+r_2+r_3+r_4$,所以 $\pi R=\pi(r_1+r_2+r_3+r_4)$,即两条路线一样长.

说明　从分析中不难发现,只要是按半圆弧路线行走,两条路线长一定是相等的.

例 10　如图 1-11,请用四个直角边分别为 1 和 2 的直角三角形纸板按下列要求拼图:(每种情况只画一个)

(1)拼成边长为 2 的正方形;

(2)拼成长、宽分别为 4 和 1 的长方形;

(3)拼成底和高都是 2 的平行四边形;

(4)拼成底和高分别为 4 和 2 的三角形;

(5)拼成两底分别为 2 和 6,高为 1 的梯形;

(6)拼成对角线分别为 2 和 4 的菱形.

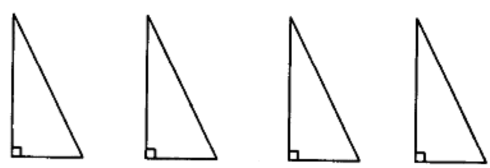
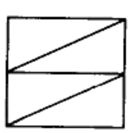
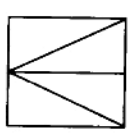
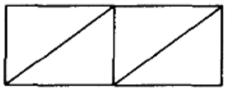
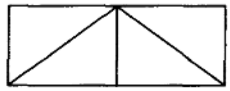


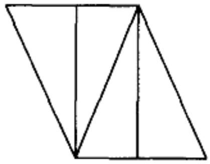
图 1-11

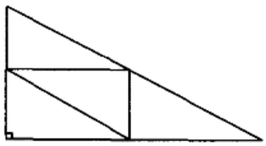
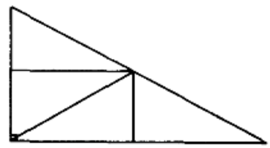
分析　将三角形拼成符合条件的图形,可以用四个符合要求的直角三角形纸板拼好了再画示意图,抓住两直角边之比为 2∶1 的关系动手试拼.

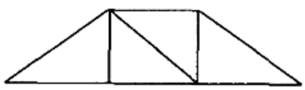
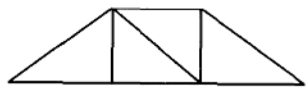
解　如图 1-12 所示.

(1)  或 

(2)  或 

(3) 

(4)  或 

(5)  或 

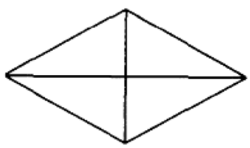
(6) 

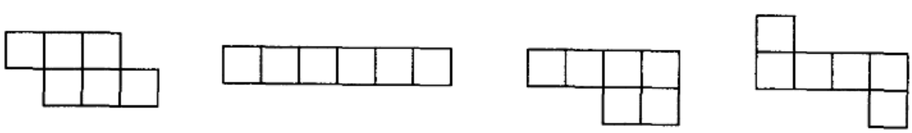
图 1-12

说明　本题还能拼出不同的平行四边形和梯形，请大家试一试.

能力训练

一、选择题

1. 在图 1-13 中，为正方体展开图的是(　　)



A　　B　　C　　D

图 1-13

2. 把一个直角三角形绕着其一条直角边旋转一周得到的几何体是(　　)

A. 长方体　　B. 圆锥　　C. 圆台　　D. 圆柱

3. 如图 1-14，下列图形中，能通过切正方体得出来的共有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

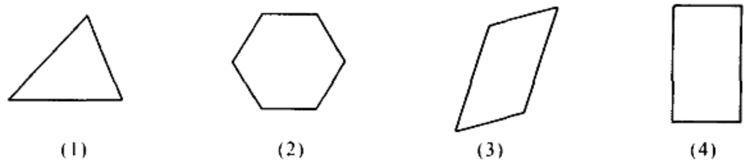


图 1-14

4. 如图 1-15，这是飞行棋的一颗骰子，根据图中 A，B，C 三种状态显示的点数，推出“?”处的点数是(　　)

A. 1 点　　B. 2 点　　C. 3 点　　D. 6 点

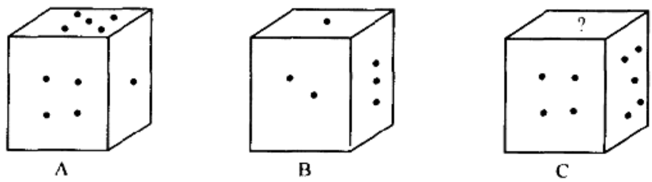


图 1-15

5. 如图 1-16，下列几种形状，你认为不适合作为地砖形状的是(　　)

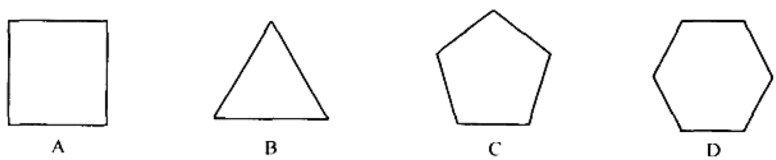


图 1-16

二、填空题

6. 如图 1-17，图中三角形共有________个.

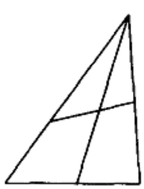


图 1-17

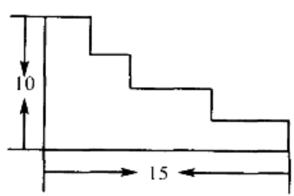


图 1-18

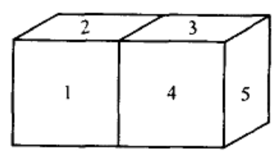


图 1-19

7. 如图 1-18(单位：厘米)，该图形的周长为________厘米.

8. 如图 1-19，两个同样大小的正方体形状的积木，每个正方体上相对的两个面写的数之和都等于 -1，现将两个正方体并列放置，看得见的五个面上的数字如图 1-19 所示，则看不见的七个面上的数字之和等于________.

9. 如图1-20,图中共有________个正方形.

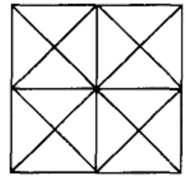
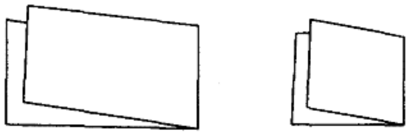


图1-20

10. 如图1-21(甲),将一张长方形纸对折,得到1条折痕,继续对折,对折时折痕与上次的折痕保持平行(见图1-21(乙)),得到3条折痕,如此继续下去,连续对折4次后,可以得到折痕________条.



甲　　乙

图1-21

三、解答题

11. 如图1-22,图中共有多少个三角形?

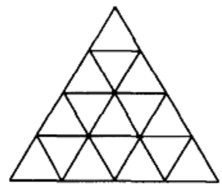


图1-22

12. 用8根火柴棒摆出8个大小一样的三角形和2个大小一样的正方形.

13. 一条直线可以把平面分成两部分,试问10条直线最多可以把平面分成几部分?请你用n来表示相应的规律.

14. 如图1-23,盒子上挂着一串珠子,珠子有黑有白,其排列有一定规律,现有一部分珠子放在盒内,请你找出它们的排列规律,并回答下列问题:盒内有多少颗珠子?这一串珠子共有多少颗?黑珠子有几颗?

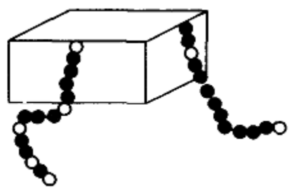
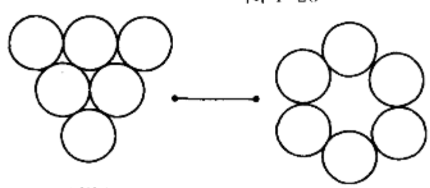


图1-23

15. 用6枚硬币可排成一个三角形,如图1-24(甲),移动硬币,可使三角形变为圆形,如图1-24(乙),但每次移动硬币时,都必须将它放在能与另外两个硬币接触的位置,而且不能推挤硬币,请问最少要移动几次才能完成从甲图到乙图的转变?



(甲)　　(乙)

图1-24

16. (1)已知$\triangle ABC$和其内部一点P_1,则图中以A,B,C,P_1为顶点的三角形有几个?(三角形之间不能重叠)

(2)若$\triangle ABC$内有P_1,P_2,P_3三点,则以A,B,C,P_1,P_2,P_3为顶点的三角形共有几个?(三角形之间不能重叠)

(3)若$\triangle ABC$内有$P_1,P_2,\cdots,P_{2005}$个点,则以$A,B,C,P_1,P_2,\cdots,P_{2005}$为顶点的三角形共有几个?(三角形之间不能重叠)

第 2 讲　有趣的数字迷宫

赛点目标

数字迷宫的有趣，其魅力体现在变化中隐含着不变的规律，归纳是探究数学迷宫的法宝之一. 归纳是建立在细致而深刻的观察的基础上的. 观察活动主要有三条途径：①数与式的特征观察；②从几何图形的结构观察；③通过简单、特殊情况的观察，再推广到一般情况.

从特殊的、简单的、局部的事例出发，探求一般的规律；或从现有结论、条件，通过观察、类比、联想，进而猜想我们未知的知识、结构是探究数学迷宫的第二法宝.

赛题精讲

例 1　如图 2-1 所示，纸板上的方格中有许多数，现在把这块纸板剪成 4 块相同的形状，且每块纸板上数的总和要相同，问该怎样剪？

分析与解　由于图中共有 12 个方格，要把它剪成相同形状的 4 块，每一块应由 3 个小方格组成，又图中所有数之和为 100，因此，每一块的三个数之和为 25，满足以上两个条件的剪法如图 2-2 所示.

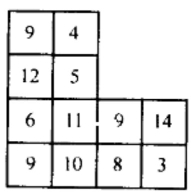


图 2-1

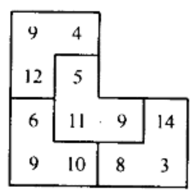


图 2-2

说明　解决图形的分、剪问题，从平均数（块）入手，是解决此类问题的基本思路.

例 2　我国唐朝大诗人李白，有首妇孺皆知的五言诗《静夜思》，有人把它编成了一道算式谜，利用 20 个字是 0～9 共 10 个数字的 2 倍，于是有：

① $\begin{cases}\text{床前}=\text{明月}+\text{光}\\ \text{疑是}=\text{地上}\times\text{霜}\end{cases}$　　② $\begin{cases}\text{举头}\times\text{望}=\text{明月}\\ \text{低头}\times\text{思}=\text{故乡}\end{cases}$

其中每个汉字代表 0～9 中的一个数字，相同的汉字表示相同的数，不同的汉字，在不同的算式中表示不同的数，从两组算式来说，也可能表示同一个数，这是怎样的 4 个算式呢？

分析与解　连续排列的两字表示是一个两位数，"＋"、"×"表示运算，"＝"表示等量关系.

第一字表示的数不能是 0，在①中，"明月"如果是 54，"光"可以是 7，那么"床前"是 61，但是剩下的数字不能使第 2 个等式成立，再尝试"明月"取 68，"光"取 3，则"床前"是 71，剩下 2，4，5，9，0，

则可知为 $90=45\times2$.

在②中,若"头"是 6,"举"取 1,"低"取 2,有 $16\times3=48$,但剩下的数字组成不了第 2 个等式.经验证,"头"只能是 4,"举"不可能是 2,只能取 3,则 $34\times2=68$,剩下 1,5,7,9,0,因为,已有"头"是 4,这样有 $14\times5=70$.

即 ① $\begin{cases}71=68+3,\\90=45\times2.\end{cases}$　　② $\begin{cases}34\times2=68,\\14\times5=70.\end{cases}$

说明　解答这类问题,大胆地去选数尝试,若能把握好等式特征及数字特征,就不难得到结果.

例 3　一串数 1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,21,…称为帕多互数列,请陈述这个数列的一个规律,并且写出其中的第 14 个数和第 18 个数.

分析　通过观察发现:$1+1=2,1+2=3,2+2=4,2+3=5,3+4=7,\cdots$

解　这个数列有两条明显的规律:

(1)从第 4 项开始,每一项均是前面第 2 项与第 3 项的和;

(2)从第 6 项开始,每一项均是前面第 1 项与第 5 项的和.

这里按第(1)条规律计算:

第 14 项是 $12+16=28$,顺次可求出第 15、16 项是 37、49,则第 18 项是 $37+49=86$.

答　第 14 个数和第 18 个数分别是 28,86.

说明　归纳规律可以从数所在项数或行数的关系,也可以从一列数中数与数之间的关系,如和、差、积、商、倍数等中寻找.

例 4　在黑板上写上数 1,2,3,…,98,每次擦去任意的两个数,换上这两个数的和或差,重复这样的操作连续若干次,直到黑板上仅留下一个数为止,求证:这个数不可能为 2004.

分析　由于操作一次,奇数的个数或不变或同时减少两个,所以黑板上仅剩一个数时,这个数为奇数.

证明　如果擦去两个偶数或一奇一偶,那么操作一次,黑板上的奇数个数不变;如果擦去两个奇数,那么黑板上就减少两个奇数.

因为 1,2,3,…,98 中共有 49 个奇数,所以,每操作一次,黑板上的奇数或不变或减少两个,即奇数的个数始终是奇数.

故操作若干次后,黑板上仅剩下一个数时,这个数只能是奇数,它不可能是偶数 2004.

说明　也可以从 $1+2+3+\cdots+98$ 的和的奇偶性出发,证明这个和的奇偶性是一个不变量,这种思考问题的方法叫做整体思想,它通过研究任意元素所具有的共性或所有元素的整体性质,使问题获解.

例 5　如图 2-3,这是 2003 年 6 月份的日历,现用一矩形在日历中框出 4 个数:

日	一	二	三	四	五	六
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

图 2-3

(1)用一个等式表示 a, b, c, d 之间的关系;

(2)框中的 4 个数的和的最大值、最小值分别是多少?

(3)若框中的 4 个数的平均值为 18,求 a、b、c、d 的值.

分析与解 从日历中观察发现,同一行中,左右相邻两个数是相差 1,同一列中,上下相邻两个数是相差 7,因此有:(1)$a+d=c+b$.(2)要使得框中的 4 个数之和最大,必须使得框进框中的四个数最大,不难发现:$21+22+28+29=100$ 为最大值.同理可找出四个数最小的和:$2+3+9+10=24$.(3)由于框中的 4 个数的平均值为 18,则四个数分别为 x、$x+1$、$x+7$、$x+1+7$,由 $x+x+1+x+7+x+1+7=72$,得 $x=14$,即 14,15,21,22.

说明 解答日历表中的数学问题,要善于利用左右两数相差 1,上下两数相差 7 的规律来分析求解.

例 6 在平面上画出 100 条直线,这些直线最多可把平面分成多少个小区域?

分析 欲想一眼就看出结果是比较困难的,我们不妨从最简单的情况进行观察,逐步找到规律,然后求出答案.

解 平面上如果没有直线,则整个平面就只有一个区域;如果画出第 1 条直线,则平面被分成了 2 个区域,比前面增加了 1 个区域;如果再画一条直线,则共有两条直线,平面最多被分成 4 个区域,比前一次又增加了 2 个区域;如果再画第 3 条直线,则平面最多被分成 7 个区域,又比前一次增加了 3 个区域,……,依次类推,当画出第 k 条直线时,平面将最多可以增加 k 个区域.所以,这 100 条直线最多可以把平面分成 $1+1+2+3+4+\cdots+100=5051$(个).

答 这 100 条直线最多可以把平面分成 5051 个区域.

说明 退到最简单的情况来处理,通过对简单情况进行观察分析,得出规律,再推广到复杂(一般)情况,本题还可以推广到 n 条直线把平面最多分成的区域为:$1+1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$个.

例 7 黑板上写有 1,2,…,2004,这 2004 个自然数,对它们进行 1001 次操作,每次操作规则如下:擦掉写在黑板上的三个数后,再添上所擦掉的三个数之和的末位数.例如:擦掉 5、13 和 1998 后,添加上 6,若再擦掉 6,6,38 后,添加上 0 等等,如果最后发现黑板上剩下两个数,一个是 25,则另一个数是多少?

分析 从操作规则可知,每次擦掉的三个数之和的末位数与添加上的数相同,说明黑板上所有数之和的末位数保持不变,故可从末位数的角度入手.

解 $\because 1+2+3+\cdots+2004=2009010$,知黑板上的所有数之和的末位数是 0,由操作规则知,黑板上所剩数之和的末位数也是 0,经过 1001 次操作后黑板上只有两个数,至少有一个数是添的数,且新添的数一定是一位数,它与 25 的和的末位数是 0,则这个数是 5.

说明 操作性命题解答时,一定要把握操作的本质特征,这是解题的关键所在,就本题而言,操作本质特征是擦去的三个数的和的末位数与新添的数相同,由此得出任何一次操作终止,其剩余数的和的末位数与初始状态时各数和的末位数相同,从而使问题得以解决.

例 8 将 $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\cdots$按一定规律排成下表: