

DAN DAO DAODAN DAN DAO XUE

# 弹道导弹弹道学

张毅 肖龙旭 王顺宏 编著

国防科技大学出版社



# 弹道导弹弹道学

DANDAO DAODAN DANDAOXUE

责任编辑：卢天颢 封面设计：火山设计

ISBN 7-81024-506-6



9 787810 245067 >

ISBN 7-81024-506-6/V·21

定价：39.80元

# 弹道导弹弹道学

张毅 肖龙旭 王顺宏 编著

国防科技大学出版社

·长沙·



## 内容简介

本书深入地分析了弹道导弹的运动状态,建立了弹道导弹的运动方程,揭示了弹道导弹的运动规律,并对导弹设计、试验、使用中遇到的设计参数选择、飞行程序选择、弹道计算等问题进行了详细的介绍。本书适用于弹道导弹弹道学专业的本科生、研究生使用,对其他从事导弹工作的科技工作者也有一定的参考价值。

## 图书在版编目(CIP)数据

弹道导弹弹道学/张毅,肖龙旭,王顺宏编著.——长沙:国防科技大学出版社,1999.3  
ISBN 7-81024-506-6

- I. 弹道导弹弹道学
- II. 张毅,肖龙旭,王顺宏
- III. ①导弹 ②弹道学 ③飞行力学
- IV. V412.1

国防科技大学出版社出版发行  
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073  
<http://www.gfkdcbs.com>  
责任编辑:卢天颢 责任校对:石少平  
新华书店总店北京发行所经销  
国防科技大学印刷厂印装

\*

787×1092 1/16 印张:22.25 字数:514千  
2005年12月第2版第2次印刷 印数2501-3700册

\*

定价:39.80元

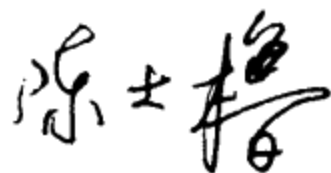
# 序 言

飞行力学是研究飞行器运动规律的科学,是飞行器设计、试验和应用的理论基础。飞行力学与研究一般力学对象运动规律的理论力学既有区别又有联系。理论力学给出了一般力学对象作机械运动时所应遵循的普遍规律,而飞行力学则是结合飞行器的特点,在理论力学和其他学科的理论基础上,建立了自己独特的理论体系,是一门严谨而又复杂的科学。为了深入细致地描述飞行器的运动规律,在工程中常将飞行器运动分为质心运动和绕质心的姿态运动;研究其质心运动的就是弹道学,而研究姿态运动的则称为动态分析。弹道导弹弹道学是以弹道导弹为特定的力学对象研究其质心运动规律的专门学科,是飞行力学的一个分支。

弹道导弹自身的特点决定了导弹弹道学的理论和方法有别于普通弹道学。弹道导弹的弹道不仅有自由飞行段,而且有动力飞行段,这就涉及到火箭发动机推力的有关理论和计算;弹道导弹是有控飞行器,不同型号有不同的控制系统,所建立的弹道模型也就不同;弹道导弹的精度要求特别高,飞行中考虑的因素多,所以建立的计算模型也特别复杂,例如,地球扰动引力场模型;不仅如此,弹道导弹弹道学还包括飞行试验、作战使用中的精度鉴定、精度提高、射程挖潜、可靠性、机动性、火力应用等问题,其研究范围涉及到理论力学、空气动力学、控制与制导理论、计算机科学、结构力学、地球重力学以及现代数学等;所以,弹道导弹弹道学是一门研究面宽、理论深、和武器类型结合紧密的学科,是其他学科不可替代的。近几十年来,弹道导弹的发展异常迅速,不断涌现出的新理论和新方法对弹道学提出了新的更高的要求,迫切需要为弹道学增添新的内容,本书正是为满足这种要求所作努力的结果。

本书是根据导弹弹道的特点而作系统论述的,既总结了几十年来弹道学的已有成果,又有新的研究内容,可以说是弹道学方面比较完整、详细、新颖的好书。为了满足不同型号导弹在不同坐标系内建立运动方程的要求,书中对

坐标系及其间的转换关系进行了完整的描述,并建立了不同坐标系内的导弹运动方程。兼顾到读者阅读的完整性,书中对空气动力学、地球重力学以及火箭发动机推力计算等方面的知识也作了精心细致的论述。多年来,作者在弹道计算、再入弹道解析解、非零攻角再入以及地球扰动引力场等方面积累了多项研究成果,这些成果的编入,为导弹弹道学增添了新的内容,也是本书与其他弹道学专著的区别之处。我相信,这本书的出版将对培养导弹弹道学方面的高级技术人才和导弹弹道学的研究与发展起到有力的推动作用。



1998年7月13日

# 前 言

本书是第二炮兵工程学院航空、宇航科学与技术学科重点教材,同时也是第二炮兵诸元计算与火力运用系列教材。

导弹弹道学(Missile ballistics)是研究弹道导弹运动规律的一门学科。为了保证导弹能准确命中目标,在研制、试验和实际应用过程中,均必须掌握导弹的运动规律,只有这样,在研制中才能正确地选择导弹设计参数,选择合理的弹道,在使用中才能快速准确地提供射击诸元,在试验中正确地分析故障原因,对武器作出合理的精度鉴定。所以,导弹弹道学是导弹设计、试验、使用的理论基础,是从事弹道导弹工作者必须熟练掌握的专门科学。

本书是在几十年来导弹弹道学成果的基础上,结合作者多年来给本科生、研究生授课的经验体会编写而成。在编写过程中,参阅了大量的国内外资料,并且考虑到了我国武器的发展状况,书中也包含有作者多年来的科研成果。由于使用这本书的人员较多,知识面宽窄不一,所以,编写的内容既有基础知识,又有专门、深入的研究,既有详尽的理论推导,又不累赘,特别适用于导弹弹道学专业本科生、研究生教学使用,也适用于其他有关人员参考。

全书共分十二章和五个附录,第一章介绍导弹和弹道的一般知识;第二章论述了弹道学中常用的坐标系,考虑到新型号武器的发展,加入了坐标系的四元数表示法;第三章分析了发动机推力、控制力和控制力矩;第四章主要讨论地球引力和扰动引力的计算问题,对扰动引力的论述尤其完整,是其他弹道学书中所没有的;第五章介绍了适合弹道计算的空气动力及空气动力矩,既有基本理论,又有工程算法;第六章分别建立了不同坐标系内的导弹运动方程并对各运动方程进行了满足精度的简化;第七章研究被动段弹道,除了质点运动方程以外,还建立了导弹为刚体时的运动方程;第八章弹道计算,除了介绍一般的弹道计算方法和规律外,还有作者长期进行弹道计算的实践经验;第九章介绍椭圆弹道理论;第十章探讨了考虑地球旋转和扁率时的被动段弹道计算问

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	( 1 )
§ 1.1 导弹弹道学研究对象、任务及其在作战中的作用 .....	( 1 )
§ 1.2 导弹的飞行及弹道分段 .....	( 2 )
<b>第二章 坐标系及其变换</b> .....	( 5 )
§ 2.1 坐标系间的方向余弦矩阵及矢量导数的关系 .....	( 5 )
§ 2.2 发射坐标系和弹体坐标系 .....	( 9 )
§ 2.3 惯性坐标系 .....	( 18 )
§ 2.4 速度坐标系 .....	( 24 )
§ 2.5 轨迹坐标系 .....	( 27 )
§ 2.6 坐标系间的四元数表示法 .....	( 29 )
<b>第三章 推力、控制力和控制力矩</b> .....	( 31 )
§ 3.1 发动机推力 .....	( 31 )
§ 3.2 控制力和控制力矩 .....	( 39 )
<b>第四章 地球引力和扰动引力</b> .....	( 51 )
§ 4.1 地球的运动及形状 .....	( 51 )
§ 4.2 地球引力 .....	( 54 )
§ 4.3 扰动引力的计算 .....	( 61 )
<b>第五章 空气动力及力矩</b> .....	( 82 )
§ 5.1 地球大气 .....	( 82 )
§ 5.2 空气动力 .....	( 85 )
§ 5.3 空气动力矩 .....	( 95 )
<b>第六章 弹道导弹的主动段运动</b> .....	( 99 )
§ 6.1 变质量力学基本定理 .....	( 99 )
§ 6.2 主动段运动微分方程组的一般形式 .....	( 109 )
§ 6.3 发射坐标系内的导弹主动段运动方程 .....	( 122 )



§ 6.4	轨迹坐标系内的导弹主动段运动方程 .....	(131)
§ 6.5	惯性坐标系内的主动段导航方程及其实时解 .....	(139)
§ 6.6	主动段运动参数分析 .....	(144)
<b>第七章</b>	<b>弹道导弹的被动段运动</b> .....	<b>(148)</b>
§ 7.1	导弹为质点时的运动微分方程 .....	(148)
§ 7.2	导弹为刚体时的运动微分方程 .....	(149)
§ 7.3	被动段弹道特性分析 .....	(157)
<b>第八章</b>	<b>弹道计算</b> .....	<b>(161)</b>
§ 8.1	标准弹道和干扰弹道 .....	(161)
§ 8.2	弹道微分方程组的解算方法 .....	(165)
§ 8.3	弹道计算 .....	(171)
<b>第九章</b>	<b>弹道导弹的自由段运动</b> .....	<b>(173)</b>
§ 9.1	运动微分方程及其积分 .....	(173)
§ 9.2	弹道方程的讨论 .....	(175)
§ 9.3	导弹被动段射程与主动段终点参数的关系 .....	(183)
§ 9.4	被动段飞行时间的计算 .....	(189)
§ 9.5	误差系数 .....	(199)
<b>第十章</b>	<b>考虑地球旋转及其扁率时导弹被动段弹道计算</b> .....	<b>(212)</b>
§ 10.1	考虑地球旋转时的被动段弹道计算 .....	(212)
§ 10.2	考虑地球旋转时的误差系数 .....	(219)
§ 10.3	考虑地球扁率时的被动段弹道计算 .....	(223)
<b>第十一章</b>	<b>弹道导弹的再入段运动</b> .....	<b>(243)</b>
§ 11.1	再入段运动微分方程的建立 .....	(243)
§ 11.2	零冲角再入时的运动参数近似计算 .....	(244)
§ 11.3	非零冲角再入时的弹道近似解 .....	(252)
§ 11.4	再入机动弹道方程和最优制导律 .....	(255)
<b>第十二章</b>	<b>导弹主要参数的估算</b> .....	<b>(271)</b>
§ 12.1	主动段终点速度和坐标的估算 .....	(271)
§ 12.2	全射程的估算 .....	(281)
§ 12.3	导弹设计参数的选择 .....	(282)
§ 12.4	多级火箭主要参数的估算 .....	(285)

§ 12.5 飞行程序选择 .....	(293)
附录 1 四元数简介 .....	(306)
附录 2 北东坐标系 .....	(318)
附录 3 标准大气(1976 美国) .....	(325)
附录 4 常微分方程组的求解算法程序 .....	(334)
附录 5 考虑地球旋转时的误差系数计算公式 .....	(341)
参考文献 .....	(346)



# 第一章 绪 论

## § 1.1 导弹弹道学研究对象、任务及其在作战中的作用

飞行力学是应用力学的一个新分支,是研究可操纵飞行器在给定外力、外力矩和控制系统工作条件下的基本运动的一门科学。所谓可以操纵飞行器是指在空中运动的、具有自身改变其飞行轨道能力的一种机械装置,如飞机、导弹、火箭、卫星和宇宙飞船等航空航天飞行器。飞行力学根据研究对象的不同,又分为飞机飞行力学、导弹飞行力学和航天动力学等。研究导弹(或火箭)在空中的基本运动规律的科学称为导弹飞行力学。

飞行力学与研究一般力学对象运动规律的理论力学既有区别又有密切的联系。理论力学是研究一般力学对象作机械运动时所遵循的普遍规律和描述其运动规律的数学方程。而导弹飞行力学则是以导弹(或火箭)为特定的研究对象,应用理论力学的基本规律和知识深入研究其运动规律,并应用这些规律解决导弹设计、试验和作战应用中的有关各种实际问题的一门科学。

导弹作为在空间运动的刚体,因受力和力矩的作用,有六个自由度的运动,因此需要有六个动力学微分方程和六个运动学微分方程来描述它。随着导弹射程的不断增加和射击精度的不断提高,考虑影响其运动的因素越来越多,因而描述其运动的微分方程组也越来越复杂。在工程中,为简化研究的问题,常将导弹运动分为质心的运动和绕质心的运动两部分,相应地导弹飞行力学也就分为导弹弹道学和动态分析两部分内容。导弹弹道学是将导弹当成理想操纵下的一个可操纵质点,研究其质心在飞行中所描绘出的运动轨迹的科学。这条轨迹称为基准弹道,并根据此基准弹道可进一步确定导弹的主要性能指标。如果在研究中考虑的影响因素和采用的数据比较准确,那么基准弹道就更接近于导弹的实际飞行弹道。导弹动态分析则是将导弹作为可操纵的质点系,在受有各种干扰作用下的运动状态。

导弹弹道学的主要任务在于:研究作用在导弹上的各种力和力矩,根据不同类型导弹的特点建立完成不同任务的运动微分方程组,并研究其计算方法;根据给定的战术技术指标,研究与导弹结构参数、飞行程序、动力装置、控制系统和战斗部系统各参数间的关系,以及确定这些参数的最佳值;研究各种干扰因素对弹道性能的影响;解算弹道以确定飞行试验原始数据和分析试验结果;解决战斗使用中诸如根据给定的发射点和目标点位置坐标,计算射击诸元等问题。

在导弹弹道学研究中,首先在一定的理论基础上,根据给定条件建立描述导弹运动规律的运动方程,其次分析研究各种影响因素,进而作出较符合客观实际的基本假设和运动方程的简化,最后在理论研究的前提下,进行数字仿真、飞行试验和实际使用,检验理论的

正确性,并根据飞行试验和实际使用结果,不断使这门工程技术科学的理论逐步完善、提高和发展。

研究和掌握导弹运动规律是从事飞行力学工作者的一项十分重要的任务。在导弹设计过程中,只有经过弹道分析掌握导弹运动规律,才能正确地选择结构参数、选择飞行弹道和进行弹道计算,评定导弹的基本性能参数,并为导弹飞行试验提供需要的理论弹道参数数据;在导弹设计完成后的飞行试验过程中,只有应用弹道理论分析试验数据,研究弹道参数变化规律,才能正确地评定飞行试验结果,确定各分系统的性能指标的优劣,为导弹定型提供可靠的依据;在导弹交付作战部队使用过程中,也只有掌握了导弹弹道理论和导弹的飞行规律,才能正确地制定精度高、使用方便的诸元计算方案,判断和排除使用中出现的故障,确保导弹准确地瞄准和命中目标,才能根据定型后状态参数进行射程和精度挖潜,充分发挥武器系统效能,提高战斗力,才能为首长的作战指挥技术决策和制定作战方案提供理论依据,才能正确地确定发射阵地控制区和火力控制范围,进行落点预报和建立导弹弹道走廊安全区。

## § 1.2 导弹的飞行及弹道分段

### 1.2.1 飞行概述

按火箭发动机类型分类,弹道导弹分为液体弹道导弹和固体弹道导弹;如果按导弹级数多少来分类,弹道导弹又分为单级弹道导弹、两级弹道导弹和多级弹道导弹。

这里以由二级液体火箭发动机推动的弹道式导弹为例,来说明该类导弹的飞行过程及其飞行弹道。弹道式导弹的飞行过程一般由垂直起飞、程序转弯、发动机关机、级间分离、头体分离、自由段飞行、再入段飞行和击中目标几部分组成(图 1-1)。当垂直竖立在发射台上的导弹各子系统完成测试、飞行控制参数装订、瞄准和接到点火命令后,按下点火按钮,一级发动机点火工作,推力逐渐增加。当推力达到导弹起飞重量时,导弹离开发射台缓缓垂直起飞,此时记作导弹飞行的零秒,弹上各种控制仪器同时进入正常工作状态。当导弹飞行 1 秒左右时,发动机推力达到额定值。而当垂直上升累计时间约几秒时,导弹在控制系统作用下逐渐向目标方向转动,弹道也开始向目标方向弯曲,开始程序段飞行。随着时间的增长,导弹的飞行速度、飞行高度及飞行距离逐渐增大,而速度方向与发射点处地平面的夹角  $\theta$  却逐渐减小。当导弹的飞行速度及其质心空间位置等参数达到一级预令关机的要求时,控制系统就实时地发出一级发动机关机指令,此时燃料输送系统中的启动活门逐渐关闭,推进剂秒流量急速减少,推力迅速下降。预令后的不长时间,控制系统发出关机主令,此时启动活门完全关闭,推进剂秒流量递减为零。一级关机预令后零点几秒时,二级主发动机启动,而关机预令后不久,则一、二级解锁,并依靠二级主发动机喷出的高速燃气流所具有的动能实现一、二级的热分离。分离后的一级弹体惯性飞行一段时间后陨落,二级则在其发动机推力和控制系统的作用下沿着预定的弹道继续飞行。随着时间的增长,导弹飞行速度、飞行高度及飞行距离逐渐增加。当导弹的飞行速度和其质心位置等参数满足二级预令关机要求时,控制系统发出二级主发动机关机指令,推



进剂秒流量迅速减少,推力下降。二级预令后约十几秒,当导弹满足给定的射击精度时,控制系统发出二级发动机关机主令,游动发动机关机,而主发动机已在其预令关机后的几秒内自动关闭。在主发动机关机后的一段时间内,因游动发动机仍处于正常工作状态,所以推进剂秒流量和发动机推力基本保持不变。二级关机主令后,再经过几秒,头体解锁,并借助于安装在二级弹体上的固体反推火箭实现头体的冷分离。分离后的二级弹体在飞行一段时间后陨落,而分离后的弹头,若无任何控制时,则将依靠分离时所获得的能量按预定的自由段弹道惯性飞向目标;若有姿态控制时,则在其飞行过程中的初始时间内,将以一定的角速度绕其质心作翻转运动,如果携带有突防物,同时将其释放。但当其重返大气层时,装在上面的姿态控制火箭工作,并按姿态控制程序规定的动作和飞行姿态稳定地进入大气层,直至飞向目标。

在弹道学中,常将导弹头体分离点称为主动段关机点,而其所对应的弹道参数(速度、速度倾角、位置)则称为关机点弹道参数。实践表明,关机点弹道参数对导弹的被动段飞行至关重要。从后面的讨论中将会看到,在理想的情况下,导弹能否达到预定的射程以及弹头能否准确地命中目标,完全取决于关机点的弹道参数。

### 1.2.1 弹道分段

导弹质心在空间的运动轨迹称为弹道。两级弹道式导弹的弹道如图 1-1 所示。根据导弹飞行概况中所描述的飞行特点,整个弹道不尽相同,需进行分段研究。因此,弹道分段的目的就在于应用不同的数学模型描述各段弹道的特点,以便求得导弹运动规律的全貌。

根据弹道式导弹从发射点到目标点的运动过程中的受力情况,可将其弹道分为几段。首先,根据导弹在飞行中发动机和控制系统工作与否,可将其弹道分为动力飞行段(简称主动段)和无动力飞行段(简称被动段)两部分。其次,在被动段则又根据弹头所受空气动力的大小而分为自由飞行段(简称自由段)和再入大气层飞行段(简称再入段)两部分。

下面分别叙述导弹在其各段弹道上的飞行特点。

#### 1. 主动段( $ok$ )

这是从导弹离开发射台到头体分离为止的一段弹道。在这段弹道上,由于发动机和控制系统一直工作,因而称之为主动段。在该段的飞行特点是:作用在弹上的力和力矩有地球引力、空气动力、发动机推力、控制力以及它们相对导弹质心所产生的相应力矩。推力主要用来克服地球引力和空气阻力并使导弹作加速运动;而控制力则主要产生控制力矩,以便在控制系统作用下使导弹按给定的飞行程序飞行,确保导弹按预定的弹道稳定地飞向目标。通常,导弹在主动段的飞行时间并不长,一般约在几十至几百秒的范围内。

#### 2. 被动段( $kc$ )

从头体分离到弹头落地的一段弹道称为被动段弹道。在无控制的情况下,弹头依靠在主动段终点所获得的能量作惯性飞行。虽然在此段不对弹头进行控制,但作用在它上的力是可以相当精确地计量的,因而基本上可较准确地掌握弹头的运动,以保证其在一定的射击精度要求下命中目标。若在弹头上安装姿态控制系统,即设有末制导时,则导弹的射击精度可大大提高。

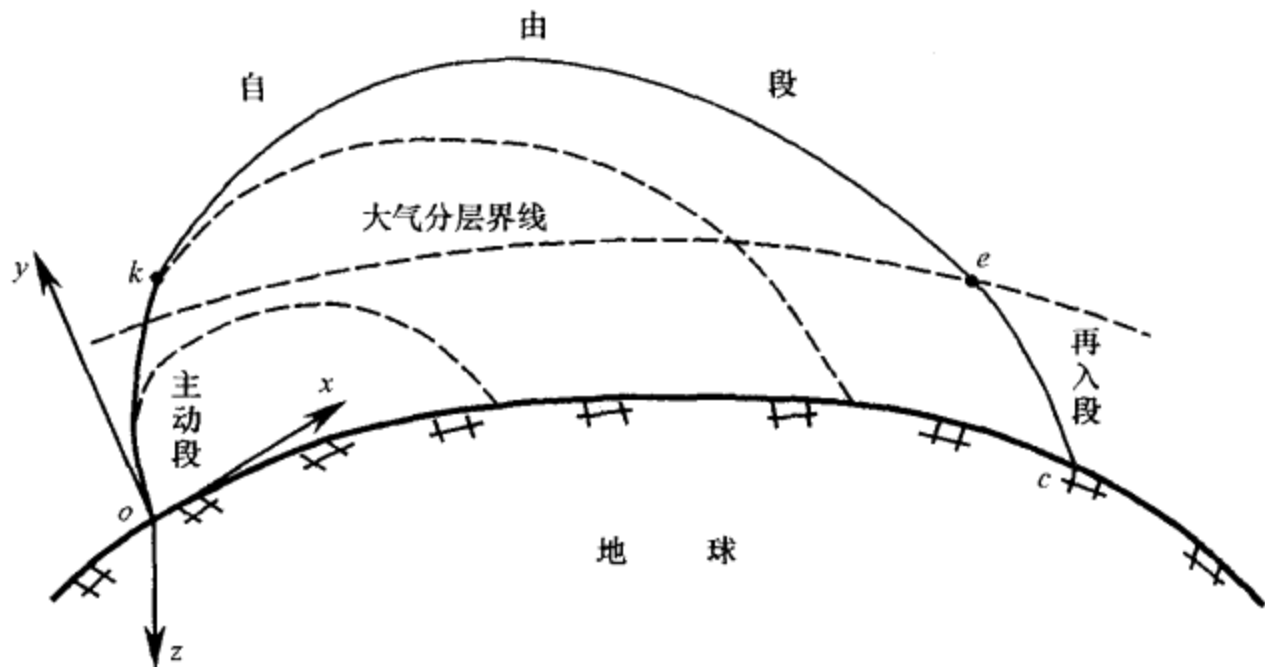


图 1-1

在被动段,根据弹头在运动中所受的空气动力大小又可分为不计大气影响的自由飞行段和计及大气影响的再入段两部分。由于空气密度随高度的增加而连续地减小,因而要想截然地划出一条有、无空气的大气层边界是不可能的。但从大气对导弹飞行参数影响显著与否出发,又需根据实际情况划定一条大气边界线或大气边界层。一般来说,对于中近程弹道导弹通常以主动段关机点高度作为划分自由段和再入段的标准高度,大约 50 ~ 70km;而对远程导弹而言,则通常以高度 80 ~ 100km 作为大气层的计算高度。

(1)自由段( $ke$ ):由于主动段终点高度较高,而大气密度又随着高度的增加而迅速降低,因而可认为在自由段上弹头是在相当稀薄的大气中飞行。这时作用在弹头上的空气动力远远小于其它作用力(地球引力和地转惯性力等),这样空气动力完全可以略去,即认为弹头是在真空中飞行,故自由段也称真空段。我们将从后面的讨论中知道,自由段弹道为椭圆弹道的一部分,且其弹道约占全部弹道的 80% ~ 90% 以上。

(2)再入段( $ec$ ):再入段就是指弹头重新进入稠密大气层的一段弹道。当弹头高速进入大气层时,由于大气对弹头的作用不仅使弹头承受强烈的气动加热,出现高温,也将使弹头受到巨大的气动阻力,从而使其速度迅速减小。因此,再入段弹道与其自由段弹道有着完全不同的特点。

弹头在自由段飞行时,由于不再受到空气动力矩和控制力矩的作用,因而不会保持其分离时的运动姿态,而是以固定的角速度绕其质心自由地进行翻转运动。直到弹头重新进入大气层时,由于大气阻滞作用的逐渐增大,加之头部的气动静稳定特性或姿态控制的作用,才使其任意翻转受到制动,并以一定的速度稳定地冲向目标。



## 第二章 坐标系及其变换

众所周知,自然界中的一切物体都在不停地运动着。运动是绝对的,静止则是相对的。对于物体的永远运动这一客观事实,尽管相对于不同的坐标系(即参考系),其运动形式及其运动规律的描述不同,但绝对不会因选择的参考系不同而改变其固有的运动特性。这正如一定长度的物体,它绝不会因选用度量尺度的不同而改变其客观长度一样。上述特性也完全适用于导弹这一特定运动物体。然而合理而恰当地选择参考系统却会使描述物体运动规律的数学模型大为简化,否则将使问题复杂化,甚至陷入无法处理的困境。因此,正确定义和恰当地选择参考系统是研究导弹运动规律的一项重要工作。

在研究物体和导弹运动特性和规律时,还必须将不同坐标系所描述的另一物理量统一到同一个坐标系中进行,而两坐标系间的关系可用它们间的方向余弦矩阵表示,也可用四元数方法表示。本章首先讨论任意两个坐标系间物理量的方向余弦矩阵转换关系,然后再介绍四元数转换表示方法。

在弹道学中,用到的坐标系比较多,但限于篇幅,只介绍发射坐标系、弹体坐标系、惯性坐标系、速度坐标系和轨迹坐标系等几种常用的坐标系以及它们间的关系。

### § 2.1 坐标系间的方向余弦矩阵及矢量导数的关系

#### 2.1.1 坐标系间的方向余弦矩阵

若  $ox_p y_p z_p$  和  $ox_q y_q z_q$  为两个坐标原点重合,而坐标轴方向不重合的右手直角坐标系, $P$  为  $x_q, y_q, z_q$  坐标轴单位矢量变换成  $x_p, y_p, z_p$  坐标轴单位矢量的转换矩阵,则有

$$E_p = PE_q \quad (2-1.1)$$

其中

$$\begin{cases} E_p = [x_p^0, y_p^0, z_p^0]^T \\ E_q = [x_q^0, y_q^0, z_q^0]^T \end{cases} \quad (2-1.2)$$

为列矩阵。

将(2-1.1)式等号两边同时点乘以  $E_q$  的转置矩阵  $E_q^T$ , 因  $E_q \cdot E_q^T = I$  (单位矩阵), 故有

$$P = E_p \cdot E_q^T = \begin{bmatrix} x_p^0 \cdot x_q^0 & x_p^0 \cdot y_q^0 & x_p^0 \cdot z_q^0 \\ y_p^0 \cdot x_q^0 & y_p^0 \cdot y_q^0 & y_p^0 \cdot z_q^0 \\ z_p^0 \cdot x_q^0 & z_p^0 \cdot y_q^0 & z_p^0 \cdot z_q^0 \end{bmatrix} \quad (2-1.3)$$

上式可简记为

$$\mathbf{P} = [a_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2-1.4)$$

其中  $a_{ij}$  表示第  $i$  行第  $j$  列的矩阵元素, 如

$$a_{11} = \mathbf{x}_p^0 \cdot \mathbf{x}_q^0 = \cos(x_p, x_q)$$

$$a_{12} = \mathbf{x}_p^0 \cdot \mathbf{y}_q^0 = \cos(x_p, y_q)$$

$$a_{13} = \mathbf{x}_p^0 \cdot \mathbf{z}_q^0 = \cos(x_p, z_q)$$

等等。

因为  $\mathbf{P}$  矩阵中的九个元素是由两坐标系坐标轴间夹角的余弦值所组成, 故称该矩阵为方向余弦矩阵。由于  $ox_p y_p z_p$  和  $ox_q y_q z_q$  两坐标系均为右手直角正交坐标系, 因而它们的方向余弦矩阵为正交矩阵。根据正交矩阵的“逆矩阵等于其转置矩阵”的特性, 所以有

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$$

对于具有正交特性的方向余弦矩阵中的九元素, 只有三个元素是独立的。这是因为九元素满足每行(或列)自身点乘积等于 1, 行与行(或列与列)之间互相点乘积等于零, 共有六个关系式之缘故。

两坐标系间方向余弦矩阵的一个最简单形式, 就是这两坐标系的三个坐标轴中, 有一相对应的坐标轴平行, 例如  $z_p$  与  $z_q$  平行, 而  $y_p$  与  $y_q$  夹角为  $\xi$ , 则此时对应的方向余弦矩阵式为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_3[\xi] \quad (2-1.5)$$

式中  $\mathbf{M}_3[\xi]$  表示这两坐标系第三个坐标轴(即  $z$  轴)平行, 而其它相应坐标轴夹角为  $\xi$  的方向余弦矩阵。

采用相同的方法可获得这两坐标系的第二个坐标轴和第一个坐标轴平行, 而其他相应坐标轴夹角分别为  $\eta$  和  $\zeta$  的方向余弦矩阵  $\mathbf{M}_2[\eta]$  和  $\mathbf{M}_1[\zeta]$ 。不难理解, 可将此类方向余弦记为一般形式  $\mathbf{M}_i[\theta]$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $i$  表示第  $i$  轴平行,  $\theta$  为其他相应两坐标轴间的夹角。

### 2.1.3 坐标系转换矩阵的欧拉角表示法

利用上述方法, 可以获得任意两坐标系间方向余弦矩阵关系式。

设有  $ox_p y_p z_p$  和  $ox_q y_q z_q$  为任意两个坐标原点和坐标轴均不重合的右手空间直角坐标系, 并且认为  $ox_p y_p z_p$  坐标系是由  $ox_q y_q z_q$  坐标系经过三次旋转后获得的。为了求得坐标系间方向余弦矩阵关系式, 先将  $ox_q y_q z_q$  坐标系平移到  $ox_p y_p z_p$  坐标系并使两坐标系之原点重合。

#### 1. 第一次旋转

将平移后的  $ox_q y_q z_q$  坐标系绕  $oz_q$  轴逆时针(从  $oz_q$  轴正方向看)以角速度  $\dot{\xi}$  旋转  $\xi$  角得坐标系  $ox_1 y_1 z_q$ 。为今后叙述方便, 我们将用符号“ $ox_q y_q z_q \xrightarrow{(z_q \text{ 逆 } \xi)} ox_1 y_1 z_q$ ”表示, 如图 2-1 所示。这样, 如果空间任一点在坐标系  $ox_q y_q z_q$  和坐标系  $ox_1 y_1 z_q$  各轴上的投影分别为



$(x_q, y_q, z_q)$  及  $(x_1, y_1, z_1)$ , 那么由图 2-1 不难写出该点在这两标系中坐标间方向余弦为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = M_3(\xi) \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \quad (2-1.6)$$

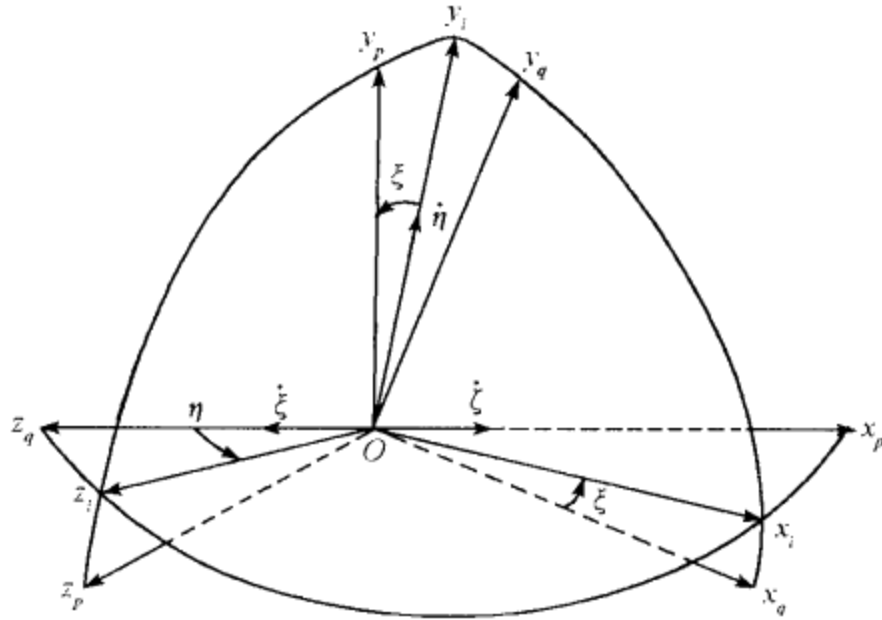


图 2-1

其中, 方向余弦矩阵  $M_3(\xi)$  为

$$M_3(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1.7)$$

若令

$$[x_q] = \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad [x_1] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

则得

$$[x_1] = M_3(\xi)[x_q] \quad (2-1.8)$$

## 2. 第二次旋转

将坐标系  $ox_1y_1z_1$  绕  $oy_1$  轴逆时针以角速度  $\dot{\eta}$  旋转  $\eta$  角得新坐标系  $ox_p y_1 z_1$  (即  $ox_1y_1z_1 \xrightarrow{(y_1 \text{ 逆 } \eta)} ox_p y_1 z_1$ )。此时若任一点在  $ox_p y_1 z_1$  坐标系中的坐标为  $(x_p, y_1, z_1)$ , 则由图 2-1 可得上述两坐标系间方向余弦矩阵式为

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = M_2(\eta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2-1.9)$$

或

$$[x_p] = M_2(\eta)[x_1] \quad (2-1.10)$$