21世纪高职高专规划教材

公共基础系列

高等数学(工科类)

下册

主编　唐瑞娜　李美贞

副主编　吴国才　白淑岩　杨振光

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学(工科类)

下 册

主 编 唐瑞娜 李美贞
副主编 吴国才 白淑岩 杨振光

清华大学出版社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书分上、下两册，共5篇16章. 上册包括微积分、常微分方程2篇，涉及函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、二元函数微积分及常微分方程共9章的内容；下册包括拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论与数理统计3篇，其中有拉普拉斯变换、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、概率论、数理统计初步共7章. 每章节后都配有一定数量的习题，并在每册书末附有习题答案.

本书注意结合中学教材的实际及普通高中新课程改革的方案，起点适中，内容重点突出，层次分明；编排模块化，方便选择性教学；习题配备文题对应，难易适中；叙述语言简洁，条理清楚，浅显易懂，便于自学.

本书可作为高职高专、成人院校工科类专业的高等数学教材，也可作为数学专科学生自学参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册：工科类/唐瑞娜，李美贞主编. —北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2004.10

(21世纪高职高专规划教材·公共基础系列)

ISBN 7-81082-408-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①唐…②李…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第088205号

责任编辑：黎　丹
出 版 者：清 华 大 学 出 版 社　邮编：100084　电话：010-62776969
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010-51686045，62237564
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　印张：15.25　字数：340千字
版　　次：2004年10月第1版　2004年10月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-81082-408-2/O·17
印　　数：1～5 000册　定价：21.00元

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，它的根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的高等技术应用型专门人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基本知识和职业技能，因而与其对应的教材也必须有自己的体系和特色。

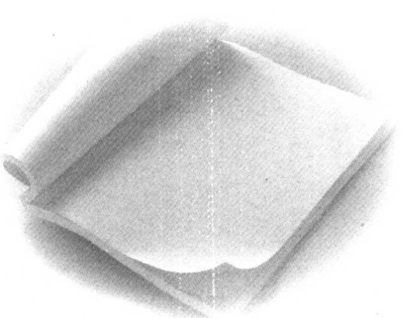
为了适应我国高职高专教育发展及其对教学改革和教材建设的需要，在教育部的指导下，我们在全国范围内组织并成立了“21 世纪高职高专教育教材研究与编审委员会”（以下简称“教材研究与编审委员会”）。“教材研究与编审委员会”的成员单位皆为教学改革成效较大、办学特色鲜明、办学实力强的高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院，其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学院。

为了保证规划教材的出版质量，“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“21 世纪高职高专规划教材编审委员会”（以下简称“教材编审委员会”）成员和征集教材，并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的优秀教师或生产第一线的专家。“教材编审委员会”组织各专业的专家、教授对所征集的教材进行评选，对所列选教材进行审定。

目前，“教材研究与编审委员会”计划用 2～3 年的时间出版各类高职高专教材 200 种，范围覆盖计算机应用、电子电气、财会与管理、商务英语等专业的主要课程。此次规划教材全部按教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”编写，其中部分教材是教育部《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》的研究成果。此次规划教材按照突出应用性、实践性和针对性的原则编写并重组系列课程教材结构，力求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向；反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养；适应“实践的要求和岗位的需要”，不依照“学科”体系，即贴近岗位，淡化学科；在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“深”的面面俱到，基础理论以应用为目的，以必要、够用为度；尽量体现新知识、新技术、新工艺、新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外，为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性，我们希望全国从事高职高专教育的院校能够积极加入到“教材研究与编审委员会”中来，推荐“教材编审委员会”成员和有特色的、有创新的教材。同时，希望将教学实践中的意见与建议，及时反馈给我们，以便对已出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

此次所有规划教材由全国重点大学出版社——清华大学出版社与北京交通大学出版社联合出版，适合于各类高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院使用。



21 世纪高职高专教育教材研究与编审委员会

2004 年 10 月

前　　言

英国著名哲学家培根指出："数学是科学的大门和钥匙."数学分为初等数学与高等数学.高中以前阶段所学的数学一般称为初等数学.初等数学研究的对象主要是常量和固定的图形，使用的方法一般来说是静止的、孤立的；而高等数学则是用运动的观点和相互联系的辩证方法研究变量和变化的图形，从而能更生动地反映出客观世界的变化规律，所以高等数学已成为现代科学技术、科学管理等诸多领域理论研究的工具与基础，同时也是高职高专院校课程设置中一门十分重要的文化基础课和工具课.

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的教学基本要求》，结合高职高专工科类专业的特点，针对高职高专的培养对象而编写的.在编写过程中，做到了以下几点.

- 定位准确，针对性强.以高职高专院校的培养目标为依据，以适用、够用、好用为指导思想，在体现数学思想为主的前提下删繁就简，深入浅出，做到既注重高等数学的基础性，又适当保持其学科的科学性与系统性，同时更突出它的工具性.

- 教材编写模块化.考虑到高职高专工科类不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因，教材的编写采用了模块化，全书分上、下两册共五大模块.上册包括微积分、常微分方程 2 个模块，下册包括了拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论与数理统计初步 3 个模块.每个模块的内容相对独立，有利于学校根据实际情况灵活安排课程，方便教师有选择性地教学.

- 内容安排重点突出，层次分明.微积分是高等数学的主要内容，是现代工程技术的主要数学支撑，也是高职高专工科类学生学习高等数学的首选，因此作为必学的内容，把它放在第一模块.常微分方程是建立在微积分基础之上的，是微积分在实际中的应用，所以把它作为第二模块与微积分一起放在上册.

- 理论联系实际，突出了数学的应用思想.书中概念的引入、定理的证明等尽可能地从实际背景入手；在第一部分微积分的应用中，除了介绍微积分在物理方面与几何方面的应用外，还单独增加了一元函数微积分在经济学中的应用，以求拓宽工科类学生的数学应用基础，提高其理论联系实际的能力.

- 加大了例题的示范性，利于学生尽快掌握数学的方法；习题的配备类型合理，文题对应，难易适中，具有一定的梯度，符合学生的认知规律.

参加本书编写的作者是多年来从事高校数学教学和高职高专高等数学教学的一线教师.在编写过程中，我们参照了国内外众多院校教师编写的教材和书籍，融进了自己的教学心得和体验，结合实际，反复推敲，力求使本书能够成为受高职高专院校师生欢迎的一本好的高等

数学教材.

鉴于编者水平有限,书中不当之处在所难免,敬请读者与同行指正.

编　者
2004 年 10 月

目　录

第 10 章　拉普拉斯变换

拉普拉斯变换，简称拉氏变换，它是通过积分运算把一个函数化成另一个函数的变换.拉氏变换是微分方程、积分方程中经常用到的较简便的求解方法，在自动控制系统的分析中起着极其重要的作用.本章将简要介绍拉氏变换的基本概念、主要性质、逆变换，以及在解常系数线性微分方程中的应用.

10.1　拉氏变换的基本概念和性质

在代数中，直接计算

$$N=6.28\times\sqrt[3]{\frac{5781}{9.8}\times 20^2}\times(1.164)^{\frac{3}{5}}$$

是很复杂的，为使计算简便，引入对数，即把上式变换为

$$\lg N=\lg 6.28+\frac{1}{3}(\lg 5781-\lg 9.8+2\lg 20)+\frac{3}{5}\lg 1.164.$$

通过查常用对数表，得到 N 的常用对数，然后再查反对数表就可算得原来要求的数 N.

这是一种把复杂运算转化为简单运算的做法，拉氏变换也是基于这种化繁为简的目的而引入的一种变换方法.

10.1.1　拉氏变换的基本概念

定义 10.1　设函数 $f(t)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，如果存在 p 的一个变化范围 D，对每个 $p\in D$，广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

都收敛，则此积分确定了 D 上一个以参数 p 为自变量的函数，记为 $F(p)$，即

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,\quad p\in D. \tag{10-1}$$

称函数 $F(p)$ 为 $f(t)$ 的拉氏(Laplace)变换(或称为 $f(t)$ 的象函数).公式(10-1)称为函数 $f(t)$ 的拉氏变换公式，用记号 $L[f(t)]$ 表示，即 $F(p)=L[f(t)]$.若 $F(p)$ 是 $f(t)$ 的拉氏变换，则称 $f(t)$ 为 $F(p)$ 的拉氏逆变换(或称为 $F(p)$ 的象原函数)，记为 $L^{-1}[F(p)]$，即 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$.

关于拉氏变换的定义，在这里作几点说明.

(1) 在定义中，只要求 $f(t)$在 $t\geqslant 0$ 时有意义，为了研究拉氏变换性质的方便，以后总假定在 $t<0$ 时，$f(t)\equiv 0$.

(2) 在较为深入的讨论中，拉氏变换公式中的参数 p 是在复数范围内取值，即 D 为复数集，为了方便，这里把 p 作为实数来讨论，这并不影响对拉氏变换的性质的研究和应用.

(3) 拉氏变换是将给定的函数通过广义积分转换成一个新的函数，它是一种积分变换.一般来说，在科学技术中遇到的函数，它的拉氏变换总是存在的.

例 10.1 求下列函数的拉氏变换.

(1) $f(t)=0$，$(t\geqslant 0)$；　　(2) $f(t)=1$，$t\geqslant 0$.

解：(1) 根据拉氏变换定义有

$$L[0]=\int_0^{+\infty}0\cdot e^{-pt}dt=0.$$

$$(2)\ L[f(t)]=L[1]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{p}(p>0).$$

例 10.2 求指数函数 $f(t)=e^{at}(t\geqslant 0$，a 是常数)的拉氏变换.

解：根据公式(10-1)，有

$$L[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}dt.$$

这个积分在 $p>a$ 时收敛，所以有

$$L[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}dt=\frac{1}{p-a}\quad(p>a).$$

例 10.3 求一次函数 $f(t)=at(t\geqslant 0$，a 为常数)的拉氏变换.

解：

$$L[at]=\int_0^{+\infty}at\cdot e^{-pt}dt=-\frac{a}{p}\int_0^{+\infty}td(e^{-pt})$$

$$=-\left[\frac{at}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}+\frac{a}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt.$$

当 $p>0$ 时，根据洛必达法则，有

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{a}{p}te^{-pt}\right)=-\lim_{t\to+\infty}\frac{at}{pe^{pt}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{a}{p^2e^{pt}}=0.$$

所以

$$L[at]=\frac{a}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=-\left[\frac{a}{p^2}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}=\frac{a}{p^2}\quad(p>0).$$

例 10.4 求正弦函数 $f(t)=\sin wt(t\geqslant 0)$的拉氏变换.

解：

$$L[\sin wt]=\int_0^{+\infty}\sin wt\cdot e^{-pt}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{p^2+w^2}e^{-pt}(p\sin wt+w\cos wt)\right]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{p^2+w^2}\quad (p>0).$$

用同样的方法可得

$$L[\cos wt]=\frac{p}{p^2+w^2}\quad (p>0).$$

在自动控制系统中，经常会用到下述两个函数.

1）单位阶梯函数

如图 10-1 所示，它的表示式是

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geqslant 0.\end{cases}\tag{10-2}$$

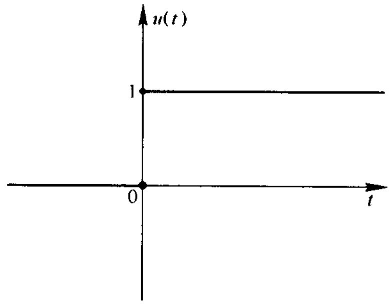


图 10-1

把 $u(t)$分别平移$|a|$和$|b|$个单位，如图 10-2、图 10-3 所示，则有

$$u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t\geqslant a;\end{cases}\tag{10-3}$$

$$u(t-b)=\begin{cases}0, & t<b,\\ 1, & t\geqslant b.\end{cases}\tag{10-4}$$

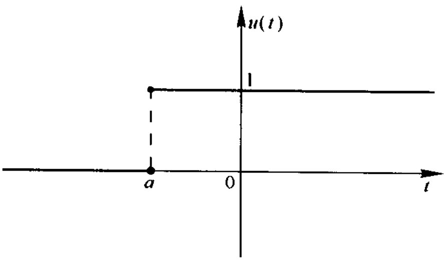


图 10-2

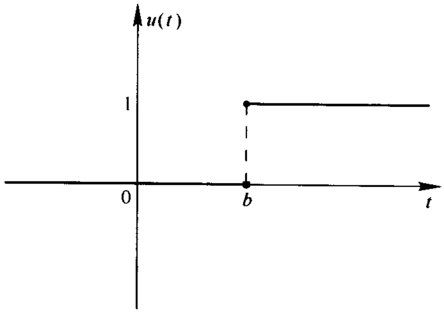


图 10-3

当 $a<b$ 时，由式(10-3)减去式(10-4)，得

$$u(t-a)-u(t-b)=\begin{cases}1, & a\leqslant t<b,\\ 0, & t<a \text{ 或 } t\geqslant b.\end{cases}\tag{10-5}$$

如图 10-4 所示.

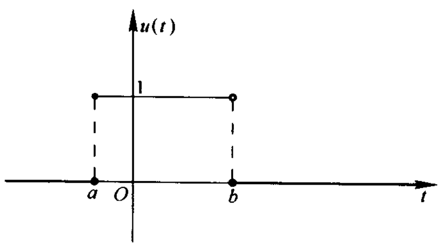


图 10-4

利用单位阶梯函数(10-2)～(10-5)，可以将某些分段函数的表达式合写成一个式子.

例 10.5　已知分段函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ C, & 0\leqslant t<a,\\ 2C, & a\leqslant t<3a,\\ 0, & t\geqslant 3a;\end{cases}\quad (C\text{ 为常数})$$

试用单位阶梯函数 $u(t)$ 将 $f(t)$ 合写成一个式子.

解: $f(t)$ 的图形如图 10-5 所示. 按式(10-5)有

$$C(u(t)-u(t-a))=\begin{cases}C, & 0\leqslant t<a,\\ 0, & t<0 \text{ 或 } t\geqslant a.\end{cases}$$

和

$$2C(u(t-a)-u(t-3a))=\begin{cases}2C, & a\leqslant t<3a,\\ 0, & t<a \text{ 或 } t\geqslant 3a.\end{cases}$$

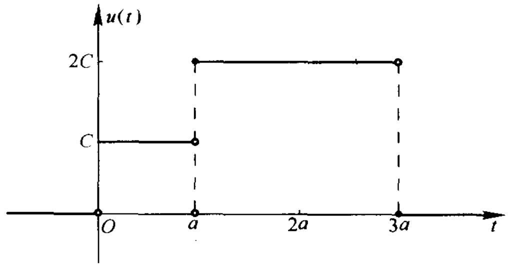


图 10-5

其图形分别为图 10-6 和图 10-7 所示.

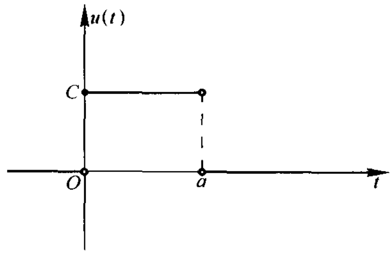


图 10-6

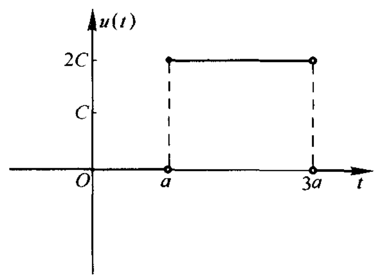


图 10-7

将上面两式相加, 得

$$\begin{aligned}f(t)&=C[u(t)-u(t-a)]+2C[u(t-a)-u(t-3a)]\\&=Cu(t)+Cu(t-a)-2Cu(t-3a).\end{aligned}$$

例 10.6 已知分段函数

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t<\pi,\\ t, & t\geqslant\pi.\end{cases}$$

试利用单位阶梯函数 $u(t)$ 将 $f(t)$ 合写成一个式子.

解: 因为

$$\sin t\cdot[u(t)-u(t-\pi)]=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t<\pi,\\ 0, & t<0 \text{ 或 } t\geqslant\pi;\end{cases}$$

$$t\cdot u(t-\pi)=\begin{cases}0, & t<\pi,\\ t, & t\geqslant\pi.\end{cases}$$

所以

$$f(t)=\sin t\cdot[u(t)-u(t-\pi)]+tu(t-\pi).$$

例 10.7 求单位阶梯函数 $u(t)$ 的拉氏变换.

解：
$$L[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p}\quad(p>0).$$

2）狄拉克函数

在许多实际问题中，常会遇到一种集中在极短时间内作用的量. 例如，一个质量为 m 的物体以速度 v_0 撞击一固定的钢板，于是在时间 $[0,\tau)$（τ 是一个很小的正数）内，物体的速度由 v_0 变成 v，根据物理学中动量定律，这时钢板受到的冲击力为
$$F=\frac{mv_0}{\tau}.$$
所以，作用时间越短（即 τ 的值越小），冲击力就越大，因而钢板受到的冲击力 F 是时间 t 的函数，并可近似地表示为
$$F_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{mv_0}{\tau}, & 0\leqslant t<\tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases}$$
当 $\tau\to0$ 时，如果 $t\neq0$，则 $F_\tau(t)\to0$；如果 $t=0$，则 $F_\tau(t)\to\infty$. 即
$$\lim_{\tau\to0}F_\tau(t)=\begin{cases}0, & t\neq0,\\ \infty, & t=0.\end{cases}$$
可以看出，对于此与 t 有关的极限不能用通常意义下的函数来表示，于是给出下面的定义.

定义 10.2　设
$$\delta_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases}$$
称 $\lim\limits_{\tau\to0}\delta_\tau(t)$ 为狄拉克函数，简称为 δ 函数或单位脉冲函数，记为 $\delta(t)$，即有 $\delta(t)=\lim\limits_{\tau\to0}\delta_\tau(t)$.

$\delta_\tau(t)$ 和 $\delta(t)$ 的图形分别如图 10-8 和图 10-9 所示.

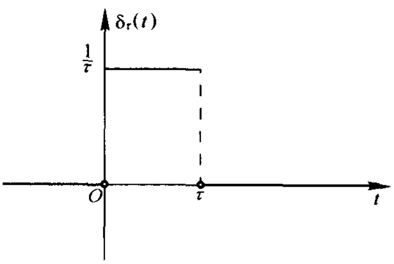


图 10-8

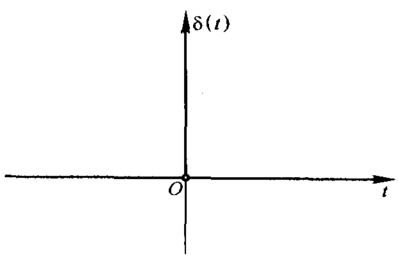


图 10-9

又因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\tau}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t+\int_{\tau}^{+\infty}\delta_\tau(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^\tau\frac{1}{\tau}\mathrm{d}t=1.$$

所以规定 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$. 从物理角度考虑，此积分即表明在 $t=0$ 时刻，出现了宽度无限小、幅度无限大、面积为 1 的脉冲.

狄拉克函数 $\delta(t)$ 有下述重要性质.

定理 10.1(筛选性质) 设 $g(t)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个连续函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta(t)\mathrm{d}t=g(0)$.

证明：因为当 $t\neq0$ 时，$\delta(t)=0$，所以

$$g(t)\delta(t)=g(0)\delta(t).$$

当 $t=0$ 时，$g(t)=g(0)$，上式也成立，因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}g(0)\delta(t)\mathrm{d}t$$
$$=g(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t$$
$$=g(0)\cdot1=g(0).$$

一般地，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=g(t_0)$.

例 10.8 求狄拉克函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换.

解：因为当 $t<0$ 时，$\delta(t)=0$，所以有

$$L[\delta(t)]=\int_0^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

这里 $g(t)=\mathrm{e}^{-pt}$，$g(0)=\mathrm{e}^{-p\cdot0}=1$. 根据定理 10.1，有 $L[\delta(t)]=1$.

10.1.2 拉氏变换的性质

拉氏变换有以下几个主要性质，利用这些性质可以求一些较复杂函数的拉氏变换.

定理 10.2(线性性质) 设 a_1，a_2 是常数，且 $L[f_1(t)]=F_1(p)$，$L[f_2(t)]=F_2(p)$，则

$$L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1L[f_1(t)]+a_2L[f_2(t)]$$
$$=a_1F_1(p)+a_2F_2(p).$$

证明：由拉氏变换定义知

$$L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=\int_0^{+\infty}[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$= a_1\int_0^{+\infty} f_1(t)e^{-pt}dt + a_2\int_0^{+\infty} f_2(t)e^{-pt}dt$$
$$= a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)]$$
$$= a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p).$$

该性质可叙述为函数线性组合的拉氏变换等于其拉氏变换的线性组合.

以下各性质，都可仿照此例的证明给出，故证明过程略.

例 10.9　求函数 $f(t)=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$ 的拉氏变换.

解: 利用例 10.1 和例 10.2 的结果，以及拉氏变换的线性性质，有

$$L\left[\frac{1}{a}(1-e^{-at})\right]=\frac{1}{a}L[1-e^{-at}]$$
$$=\frac{1}{a}\{L[1]-L[e^{-at}]\}$$
$$=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+a}\right]=\frac{1}{p(p+a)}.$$

定理 10.3(平移性质)　若 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$L[e^{at}f(t)] = F(p-a).$$

这个性质指出，象原函数乘以 e^{at} 相当于其象函数作位移 a，因此称这个性质为平移性质.

例 10.10　求 $L[e^{-at}\sin wt]$.

解: 由例 10.4 知

$$L[\sin wt]=\frac{w}{p^2+w^2}.$$

因此根据拉氏变换的平移性质，有

$$L[e^{-at}\cdot\sin wt] = \frac{w}{(p+a)^2+w^2}.$$

同理可得

$$L[e^{-at}\cdot\cos wt] = \frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}.$$

定理 10.4(延滞性质)　若 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$L[f(t-a)] = e^{-ap}\cdot F(p)\quad (a>0).$$

在这个性质中，函数 $f(t-a)$ 表示函数 $f(t)$ 在时间上滞后 a 个单位，所以这个性质称为延滞性质.

例 10.11　求 $L[u(t-a)]$.

解: 因为 $L[u(t)]=\frac{1}{p}$，所以由延滞性质，知

$$L[u(t-a)] = e^{-ap}\frac{1}{p}\quad (p>0).$$

例 10.12 求 $L[e^{a(t-\tau)}u(t-\tau)]$.

解：因为 $L[e^{at}u(t)]=\dfrac{1}{p-a}\ (p>a)$，所以由延滞性质有

$$L[e^{a(t-\tau)}u(t-\tau)]=e^{-\tau p}\cdot\frac{1}{p-a}\quad(p>a).$$

例 10.13 求 $L[u(wt+\alpha)\sin(wt+\alpha)](w>0)$.

解：因为

$$u(wt+\alpha)\sin(wt+\alpha)=u\left[w\left(t+\frac{\alpha}{w}\right)\right]\sin\left[w\left(t+\frac{\alpha}{w}\right)\right],$$

$$L[u(t)\sin wt]=\frac{w}{p^2+w^2}.$$

所以由延滞性质有

$$\begin{aligned}&L[u(wt+\alpha)\sin(wt+\alpha)]\\&=L\left[u\left(w\left(t+\frac{\alpha}{w}\right)\right)\right]\cdot\sin\left(w\left(t+\frac{\alpha}{w}\right)\right)\right]\\&=e^{-(\frac{\alpha}{w})p}\cdot\frac{w}{p^2+w^2}=e^{\frac{\alpha}{w}p}\cdot\frac{w}{p^2+w^2}.\end{aligned}$$

例 10.14 设

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ C, & 0\leqslant t<a,\\ 2C, & a\leqslant t<3a,\\ 0, & t\geqslant 3a.\end{cases}\quad(C\text{ 为常数})$$

求 $L[f(t)]$.

解法 1 由拉氏变换定义，有

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^a Ce^{-pt}\,dt+\int_a^{3a}2Ce^{-pt}\,dt\\&=\left[-\frac{C}{p}e^{-pt}\right]_0^a+\left[-\frac{2C}{p}e^{-pt}\right]_a^{3a}\\&=\frac{C}{p}(1-e^{-ap}+2e^{-ap}-2e^{-3ap})\\&=\frac{C}{p}(1+e^{-ap}-2e^{-3ap}).\end{aligned}$$

解法 2 由例 10.5 可知，函数 $f(t)$ 用单位阶梯函数可表示为

$$f(t)=Cu(t)+Cu(t-a)-2Cu(t-3a).$$

所以由延滞性质有

$$\begin{aligned}L[f(t)]&=L[Cu(t)+Cu(t-a)-2Cu(t-3a)]\\&=\frac{C}{p}+\frac{C}{p}e^{-ap}-2\cdot\frac{C}{p}\cdot e^{-3ap}\end{aligned}$$

$$=\frac{C}{p}(1+e^{-ap}-2e^{-3ap}).$$

定理 10.5(微分性质) 若 $L[f(t)]=F(p)$，并设 $f(t)$在$[0, +\infty)$上连续，$f'(t)$逐段连续，则

$$L[f'(t)]=pF(p)-f(0).$$

类似地，在相应条件成立时，还可推得二阶及高阶导数的拉氏变换公式

$$\begin{aligned}L[f''(t)]&=pL[f'(t)]-f'(0)=p[pL[f(t)]-f(0)]-f'(0)\\&=p^2F(p)-[pf(0)+f'(0)],\end{aligned}$$

$$L[f'''(t)]=p^3F(p)-[p^2f(0)+pf'(0)+f''(0)].$$

$$\vdots$$

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\cdots+f^{(n-1)}(0)].$$

特别地，当初始值 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$ 时，有以下更简单的结果

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

利用这个性质，可将函数的微分运算化为代数运算，将微分方程化为代数方程，这是拉氏变换的一个重要特点与功能.

例 10.15 利用微分性质，求 $L[\sin wt]$和 $L[\cos wt]$.

解：设$f(t)=\sin wt$，则 $f(0)=0$. 又 $f'(t)=w\cos wt$，则 $f'(0)=w$，$f''(t)=-w^2\sin wt$. 由线性性质，知

$$L[f''(t)]=L[-w^2\sin wt]=-w^2L[\sin wt].$$

由微分性质，知

$$\begin{aligned}L[f''(t)]&=p^2L[f(t)]-[pf(0)+f'(0)]\\&=p^2\cdot L[\sin wt]-w.\end{aligned}$$

因此有

$$-w^2L[\sin wt]=p^2L[\sin wt]-w.$$

于是有

$$L[\sin wt]=\frac{w}{p^2+w^2}.$$

又因为

$$\cos wt=\left(\frac{1}{w}\sin wt\right)',$$

所以

$$L[\cos wt]=\frac{1}{w}L[(\sin wt)']=\frac{p}{w}L[\sin wt]=\frac{p}{p^2+w^2}.$$

定理 10.6(积分性质) 若 $L[f(t)]=F(p)(p\neq 0)$,且设 $f(t)$ 连续，则

$$L\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{F(p)}{p}.$$