高等学校教材
Gaodeng Xuexiao Jiaocai

现代控制理论基础

XIANDAI KONGZHI LILUN JICHU

施颂椒　陈学中　杜秀华 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

现代控制理论基础

施颂椒　陈学中　杜秀华　编著
万百五　主审

高等教育出版社

内容提要

“现代控制理论基础”是高等学校本科自动化专业的一门重要的专业基础课。本书为高等学校自动化专业编写，以自动控制系统为研究对象系统地讲述线性系统理论，适当介绍线性二次型最优控制方法，是进一步学习研究现代控制理论的基础。

本书包含了现代控制理论基础的主要理论和方法，围绕系统建模、系统分析和系统设计，介绍系统的状态空间描述基本概念和求解、稳定性、能控性和能观性、极点配置和状态观测器，以及最优控制理论中最基本的线性二次型最优控制方法，对这些理论均作了精确的阐述和严格的证明，着重阐述各种分析、设计算法及其应用。

“现代控制理论基础”的理论性强，应用较多的数学知识，内容抽象。为了便于读者理解和掌握现代控制理论基础的主要理论和方法，本书力求做到：精选内容，注重应用，尽可能多选工程实用算法，在各章均介绍了MATLAB相关应用的命令和例子；引进了作者们近年来的研究成果，在多变量系统的综合中，提供了适用于系统综合的西尔维斯特(Sylvester)矩阵方程的简捷解法，将状态反馈、状态观测器及降维观测器设计统一于同一的框架下，还有应用最优化技术综合系统的方法等；每一章均编排有相当数量的习题，由浅入深地分档安排，并将它们分为练习题、深入题、实际题和MATLAB题；在内容叙述上深入浅出，注重对物理概念的叙述。

本书可作各类高等学校自动化专业本科及有关专业研究生的教材，也可供从事这一专业的科研、工程技术人员以及高等院校教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/施颂椒，陈学中，杜秀华编著.
—北京：高等教育出版社，2005.11
ISBN 7-04-017753-6

Ⅰ.现… Ⅱ.①施…②陈…③杜… Ⅲ.现代控制理论-高等学校-教材 Ⅳ.O231

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第125627号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京泽明印刷有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2005年11月第1版
印　　张	18	**印　　次**	2005年11月第1次印刷
字　　数	430 000	**定　　价**	22.70元

物料号　17753-00

序

“现代控制理论基础”课程是自动化专业本科生教学计划中的一门专业课，它是建立在一些技术基础课，特别是“自动控制原理”课程之上的重要课程。它应紧密联系“自动控制原理”课程并充分反映“现代的”自动控制理论。为了适应扩宽专业知识面、优化整体自动化的教学体系，目前很需要一本新的教材。

本书主要为高等学校本科自动化专业编写，由上海交通大学电子信息与电气工程学院施颂椒、陈学中和杜秀华三位老师分工执笔，参考全国高等学校自动化专业“现代控制理论”课程的大纲要求编写。三位作者先后都担任这门课程的教学工作许多年，也从事这方面的研究工作。他们总结多年从事现代控制理论基础课程教学和科研的经验，故本书内容的科学性、系统性已趋于完善和成熟。

“现代控制理论基础”课程理论性强，要应用较多的数学知识，内容抽象。为了使学生掌握现代控制理论基础的基本概念、基本原理和主要算法，本书作者做了许多深入细致的教学研究工作。该书有如下特点值得强调和肯定：

(1) 本书包含了现代控制理论基础的主要理论，如稳定性理论、能控性和能观性理论、极点配置理论和状态观测器理论，对这些理论均作了精确的阐述和严格的证明。

(2) 本书力求做到深入浅出，并注重对物理概念的叙述，使学生容易理解。为使理论易于接受与掌握，在叙述上，尽量通过实例来说明其应用。

(3) 精选内容，注重应用，尽可能多选工程实用算法。重点讨论了线性定常系统的分析和设计算法，不仅介绍单变量系统的算法，而且也介绍多变量系统的算法。考虑到计算机的广泛应用，适当介绍线性时间离散系统的内容。在分析与设计的算法中，不仅给出一般的算法，同时也介绍一些实用的算法和手段，以便进行工程近似算法。

(4) 引进了作者们近年来的研究成果：在多变量系统的综合中，提供了适用于系统综合的 Sylvester 矩阵方程的简捷解法，并将其应用于状态反馈、状态观测器及降维观测器设计，不仅使多变量系统的设计显得简单容易了，而且使三者的设计统一于同一的框架下。对常用的能控性矩阵秩判据给出了一个推论，简化了判别能控性的计算，并引入了能控度的新概念。

(5) MATLAB 是一种应用广泛的数学计算软件包，它提供了一整套控制系统计算的工具箱，因此本书在每一章中均介绍了 MATLAB 在本章的相关应用的命令和例子，其目的也是为学生提供另一种解决现代控制理论复杂计算的工具。

(6) 每一章均编排有相当数量的习题，由浅入深地分档安排，并将它们分为练习题、深入题、实际题和 MATLAB 题。练习题是用来消化基本理论和算法的；深入题是用来深入理解课程内容的，某些题有相当难度，能提高学生分析、证明和解题能力；实际题是解决在实际系统中的应用；MATLAB 题则是应用 MATLAB 求解系统的计算问题。这样可以满足不同要求的教学和不同学生的学习需要。

本书按照高等学校本科讲授一个学期的教学时数编写，并适当地引申某些内容，增加一些实

例(打 * 号表示),任课教师可根据不同的教学需要,适当取舍选用,同时为优秀学生提供深入学习的资料。因此本书可适用于不同类型高等学校自动化专业本科生或部分研究生的教学需要。

本书是一本精心编写的、以学生为本的“现代控制理论基础”课程的教材,内容精选、难易恰当、深入浅出、循序渐进、联系实际、练习题分成四类、充分应用 MATLAB 软件包,完全适用于高等学校本科自动化专业的学生以及非自动化类专业研究生的教学需要。相信它的出版必将有助于自动化界广大学者和工程技术人员们的学习和在实际中推广应用。

万百五
西安交通大学电信学院
2005 年 7 月

前　　言

现代控制理论源于20世纪60年代，以庞特里亚金(Pontryagin)的极大值原理、贝尔曼(Bellman)动态规划和卡尔曼(Kalman)滤波技术为形成标志。经典控制理论以单变量系统为研究对象，以频率法为主要研究方法，而现代控制理论以多变量系统为研究对象，以状态空间方法为研究方法。这种方法是建立在线性空间理论的基础上，主要在时域中研究系统，其最大特点是深刻地揭示了线性系统的许多基本特点和性质，并可以定量地进行系统的分析和设计。由于计算机技术的出现和发展，使其复杂的计算得以实现。现代控制理论经过几十年的发展，已形成许多学科分支，如线性系统理论、最优控制、系统辨识、自适应控制、鲁棒控制等。线性系统理论是现代控制理论的基础部分，它是学习研究控制理论其他学科分支的基础知识，因此对于自动化专业来说，它不仅是一门重要的基础课，也是重要的专业课。本书为自动化专业编写，以自动控制系统为研究对象来讲述线性系统理论，是进一步学习研究现代控制理论的基础，故取名为“现代控制理论基础”。

一、现代控制理论基础研究对象和内容

1. 研究对象

现代控制理论基础以线性控制系统为对象，主要研究其动态属性。实际系统都是非线性系统，但大部分实际系统，在一定条件下，均可充分精确地以线性系统来近似。因此现代控制理论基础(线性系统理论)不仅具有理论意义，而且具有实际价值。线性系统包括连续系统和离散系统，线性连续系统的理论可扩展应用于离散系统。本书主要讨论线性连续系统理论，对于离散系统也做一些介绍。

2. 主要内容

现代控制理论基础主要研究线性系统的动态行为和改变这一行为的可行性和方法。它用状态空间方法，从系统内部状态入手，建立系统结构、参数和系统状态运动行为之间的关系。具体地说，主要内容包括：系统建模、系统分析和系统设计。

(1) 系统建模

建立系统的数学模型是进行系统分析和设计的前提。系统的数学模型就是对系统运动特性的数学描述，一个系统由于回答的问题不同，可以有不同的数学模型。系统数学模型可以通过分析系统的物理机理，应用物理学的定律并进行数学推导予以建立。用不同的数学手段能获得不同形式的数学描述，现代控制理论是用状态空间方法研究系统的问题，线性系统的数学模型是系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$、输入 $\boldsymbol{u}(t)$、输出 $\boldsymbol{y}(t)$和表征系统结构和参数的 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{C}(t)$、$\boldsymbol{D}(t)$之间关系的数学描述，即系统的状态空间描述，它一般具有下列形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

系统建模的方法是本课的基本任务之一。

最小实现是研究从系统的输入输出描述(主要是传递函数)求取既能控又能观状态空间描述的方法。对一个实际系统,可以通过实验的方法获得其输入输出描述,再求取状态空间描述,因此,用实验方法也是建立系统数学模型的一种途径。尤其对一些比较复杂的系统,很难用理论的方法直接建模时,它是一种有效的途径。

(2) 系统分析

一旦建立了系统模型,下一步就是进行系统分析,系统分析包括定量分析和定性分析。定量分析是用解析的方法求解系统的运动方程(状态空间描述),求出系统在确定的输入 $u(t)$ 的激励下,其状态 $x(t)$ 及输出 $y(t)$ 的响应。

定量分析固然能求得系统准确的响应,但往往是不方便的,人们更感兴趣的是定性分析——定性地确定系统的基本性质以及它们和系统结构参数之间的关系。对于系统的状态空间描述,除了系统的稳定性外,系统的能控性和能观性也是系统的重要性质,它们全面地揭示了系统的行为和本质特性。能控性和能观性这两个现代控制理论最基本的概念是系统定性分析的主要内容,也是系统综合时的结构条件和理论基础。

(3) 系统设计

系统设计是在系统分析的基础上,寻求改善系统动态性能的方法。系统综合是为系统寻找一个合适的控制律(主要是反馈方式和控制算法),使系统满足人们对控制的各种要求。在本书中主要是在时域上用解析的方法来进行系统的综合。

状态空间描述是系统内部描述,它包含了系统的全部信息,使在更大范围内改善系统的性能成为可能。状态反馈是配置系统极点的主要方法,是改进和控制系统动态品质的最基本方法,而状态观测器提供了系统状态的估计,使状态反馈成为现实。在现代控制理论基础中,状态反馈和状态观测器的理论和方法是系统设计的主要内容。

除了用状态反馈通过极点配置进行系统综合外,在系统镇定、系统解耦和无静差跟踪系统的综合等方面也为系统设计提供了某些特殊控制律。这些问题也将在系统的综合中加以讨论。

在系统的综合中,有些问题,例如输出反馈系统特征值的任意配置问题,是很难用解析的方法解决的,本书还介绍一种应用最优化技术寻求输出反馈控制的方法,这种方法虽然不能得到精确配置极点结果,但能满足工程上的要求,尤其是这种设计思想提供了解决实际问题的一种途径。

二、本书的特点和内容安排

1. 本书特点

本书主要为大学本科自动化专业编写,为了便于读者理解和掌握现代控制理论基础的主要内容,在编写中力求做到:

(1) 从控制系统实际出发,建立现代控制理论基础的基本概念,阐述基本原理和推导算法。对于现代控制理论基础中的基本概念和理论的阐述,力求做到严格正确,使读者能正确理解和深入掌握。现代控制理论基础理论性强,应用较多的数学知识,所以内容抽象。在叙述上力求做到深入浅出,理论联系实际,通过实例,尤其是实际系统例子来说明其应用,使理论易于接受与掌握。对涉及的数学知识,除了矩阵理论外,均在需要应用时预先加以介绍,使之学以致用。

(2) 精选内容,注重应用,尽可能多选工程实用算法,适当引入我们的研究结果。重点讨论

了线性定常系统的分析和设计的方法。不仅介绍单变量系统的算法，而且也介绍多变量系统的算法。考虑到计算机的广泛应用，适当介绍离散系统的内容。在分析与设计的算法中，不仅推导一般的算法，同时也给出一些实用的算法和手段，也包含有我们历年来的工作。例如在多变量系统的综合中，提供了适用于系统综合的西尔维斯特(Sylvester)矩阵方程的简捷解法，并将其应用于状态反馈、全维或降维观测器设计，不仅使多变量系统的设计显得简单容易了，并且使三者的设计统一于统一的框架下。对常用的能控性矩阵秩判据给出了一个推论，不仅简化了判别能控性的计算，并引入了能控度的新概念。还有应用最优化技术综合系统的方法等，为读者提供更多的实用和有效的算法。

(3) 学习本课的目的在于应用所学理论解决控制系统的实际问题，本书的习题，除了选编一定数量的一般题外，还选了深入题以加深对基本理论的理解和满足不同学校的需要。还选择了一些实际系统的分析设计问题，以提高实际应用能力。目前 MATLAB 软件在控制系统的计算中已得到越来越多的应用，所以在书中适当介绍一些实例和习题。

(4) 本书按照一个学期的教学时数编写，在此基础上，适当地引申某些内容，增加一些实例，根据不同的教学需要，进行适当取舍。

2. 内容安排

本书的基本结构如下，全书共分六章：

第一章　线性系统的数学描述

第二章　线性系统的状态响应和输出响应

第三章　系统的稳定性

第四章　线性系统的能控性和能观性

第五章　最小实现

第六章　状态反馈和状态观测器

第一章主要介绍系统的数学描述——输入输出描述(外部描述)和状态空间描述(内部描述)，以及求取系统状态空间描述的方法。重点是建立状态及状态空间的概念，掌握系统状态空间描述的基本形式和系统等价动力学方程的物理意义及数学意义和等价变换的基本关系式。

第二章是系统运动的定量分析，即求解系统的状态方程。主要内容包括：线性系统的状态转移矩阵及其性质，线性系统的状态响应——零状态响应和零输入响应，线性系统的输出响应，线性定常系统的响应，线性定常系统状态转移矩阵 e^{At} 的计算方法，系统等价变换对响应的影响。

第三章研究系统的稳定性问题，控制系统的稳定性是控制理论中基本问题之一，除了讨论系统的输入输出稳定性，重点讨论了系统平衡状态的稳定性问题。介绍 BIBO 稳定，李雅普诺夫意义上的稳定和渐近稳定的概念，李雅普诺夫稳定性理论和方法是本章的研究重点。

第四章介绍能控性和能观性的概念，它们是现代控制理论中表征系统特性的重要概念。这两个概念的引入，把系统的分析和设计从外部特性的研究引向内部特性的研究，使系统的分析和设计建立在严格的理论基础上，为在时域中来进行系统的分析和设计提供了理论基础。本章主要内容有四个：能控性和能观性的概念，能控性和能观性判据，系统的结构分解和状态空间描述的标准型，离散系统中能控性与能观性的特点和判据。

第五章是讨论系统的最小实现问题，作为求取系统状态空间描述的途径，主要掌握单变量系统的最小实现方法。最小实现是由系统的传递函数阵求最小维数的状态空间描述，由于系统的

传递函数阵可以通过实验方法求取，因此，它也是求取系统状态空间描述的一种途径。本章主要内容是单变量系统的三种形式最小实现方法。同时也介绍了向量传递函数阵的实现方法。

第六章研究系统的综合问题，它也是能控性和能观性概念的实际应用。状态空间方法可以在时域中，用严格的数学分析方法来设计系统，状态反馈和状态观测器就是这种理论和方法。状态反馈提供了任意配置系统极点的理论和方法，状态观测器提供了在系统状态不可测量时的状态估计，使状态反馈得以实现。介绍了一种适用于系统综合的西尔维斯特矩阵方程的简捷解法，它可应用于状态反馈阵的计算，也可应用于状态观测器和降维观测器的设计。此外还讨论了系统镇定、系统解耦和系统无静差跟踪问题(一种鲁棒控制问题)。还介绍了最优化技术在系统综合中的应用。最后研究了最优控制中的一个基本问题——线性二次型最优控制。

本书由博士生导师施颂椒教授主编，负责全书大纲确定、结构设计、内容取舍以及编写指导，由陈学中和杜秀华执笔，第四章和线性二次型最优控制问题由杜秀华编写，其余各章由陈学中编写，最后由施颂椒教授定稿。本书根据我们对本课程多年教学的经验以及学生在学习中的反映，按照自动化专业对本课程的要求，力求让读者掌握现代控制理论基础的基本内容。由于水平及实际经验所限，难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

非常荣幸，能聘请西安交通大学电信学院万百五教授作本书的评审人。万百五教授对本书进行认真、负责的评阅，提出许多中肯、宝贵的意见和改进建议，作者谨此向万百五教授致以衷心感谢。

编者

2005 年 10 月

目　录

第一章　线性系统的数学描述

1.1　引　　言

建立系统的数学模型,即描述系统行为特性的数学表达式或数学方程是控制系统进行分析和设计的基础。由于系统所要解决的问题,即选择研究参量的不同以及建立数学模型所用的方法不同,描述同一个系统的数学模型也不相同。

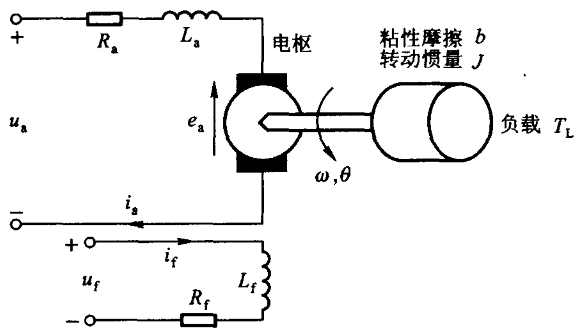

图 1－1　直流电动机控制电路

以如图 1－1 所示的直流电动机为例,在电枢控制时,激磁电压 u_f 恒定,气隙磁通等于常数,电机的电磁转矩 T_i 与电枢电流 i_a 成正比:

$$T_i = K_t i_a \tag{1-1}$$

式中,K_t 为电机的转矩常数。电枢电路电压平衡方程为

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + e_a \tag{1-2}$$

式中,R_a 和 L_a 分别是电枢电路的电阻和电感,电机的反电势 e_a 与电机的角速度 ω 成正比:

$$e_a = K_e \omega \tag{1-3}$$

式中,K_e 为电机的反电势常数。电机转轴上转矩平衡方程为

$$T_i = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + b\omega + T_L \tag{1-4}$$

式中,J 为电机转轴上总的等效转动惯量,b 为电机转轴上的等效粘性摩擦系数,T_L 是负载转矩。若以 u_a 为输入电压,ω 为输出转速,在以上各式中,消去中间变量 i,并假定 $T_L = 0$,可得如下微分方程:

$$L_a J\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2} + (R_a J + bL_a)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + (K_e K_t + R_a b)\omega = K_t u_a \tag{1-5}$$

这是一个二阶微分方程。

如果要研究电机转轴转角的运动特性，以转角 θ 为输出时，其运动方程就变成三阶微分方程：

$$L_aJ\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}t^3}+(R_aJ+bL_a)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+(K_eK_t+R_ab)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=K_tu_a \tag{1-6}$$

如果用激磁电流进行控制，电枢电流 $i_a=Ct$（常数）。假设，气隙磁通与激磁电流 i_f 成正比，电机的电磁转矩等于

$$T_f=K_fi_f \tag{1-7}$$

式中，K_f 是电机对于激磁电流 i_f 的转矩常数。激磁电流和转速变化的微分方程为：

$$u_f=R_fi_f+L_f\frac{\mathrm{d}i_f}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

$$T_f=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+b\omega+T_L \tag{1-9}$$

则电机的微分方程变成

$$L_fJ\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+(R_fJ+bL_f)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+R_fb\omega=K_fu_f \tag{1-10}$$

$$L_fJ\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}t^3}+(R_fJ+bL_f)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+R_fb\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=K_fu_f \tag{1-11}$$

式(1-5)、(1-6)、(1-10)及(1-11)都是同一个系统的运动方程，由于研究参数不同，它们的数学描述也不相同。这几个方程有一个共同点，它们都是只描述了输入（u_a 或 u_f）与输出（θ 或 ω）之间的关系，是系统的输入输出描述。它不能反映系统内部一些变量，例如电枢电流 i_a 或激磁电流 i_f 的运动特性的。

如果不消去变量 i_a，可以得到系统的另一种数学描述。将式(1-1)、(1-3)分别代入式(1-4)及(1-2)，有

$$\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}=-\frac{R_a}{L_a}i_a-\frac{K_e}{L_a}\omega+\frac{u_a}{L_a} \tag{1-12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{K_t}{J}i_a-\frac{b}{J}\omega-\frac{T_L}{J} \tag{1-13}$$

在上两式中，设 $T_L=0$，令输入 $u_a=u$，输出 $\omega=y$，及 $i_a=x_1$，$\omega=x_2$，并将它们写成矩阵形式，有

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{K_e}{L_a}\\ \dfrac{K_t}{J} & -\dfrac{b}{J}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L_a}\\ 0\end{pmatrix}u \tag{1-14}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

同样，将式(1-7)、(1-8)、(1-9)经过类似整理，并设 $T_L=0$，令输入 $u_f=u$，输出 $\omega=y$ 及 $i_f=x_1$，$\omega=x_2$，则可得下列矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_f}{L_f} & 0\\ \dfrac{K_f}{J} & -\dfrac{b}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L_f}\\ 0\end{bmatrix}u \tag{1-15a}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{1-15b}$$

式(1-14)与(1-15)不仅描述了系统外部变量(输入与输出),而且描述了系统内部变量(i_a或i_f)的行为。可见,用不同的方法描述同一个系统,所得到的数学模型也是不同的。

一般来说,一个系统可以用图1-2的方块来表示。$u_1,u_2,\cdots,u_p$是系统的输入,系统的输出是$y_1,y_2,\cdots,y_q$,它们统称为外部变量。表征系统内部状况的变量称为内部变量,以$x_1,x_2,\cdots,x_n$表示。当然,系统的外部变量也可以是内部变量的一个组成部分。只有一个输入和一个输出的系统称为**单变量系统**。如果系统有两个或两个以上的输入或输出,则称为**多变量系统**。系统的数学模型就是描述系统的输入$u_1,u_2,\cdots,u_p$、输出$y_1,y_2,\cdots,y_q$和内部变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$之间关系的方程。系统的数学模型确定了系统的这些变量随时间变化的行为特性。

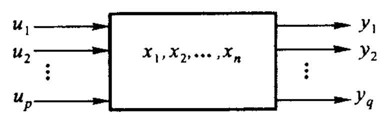

图1-2　系统方块图

系统的输入输出描述只描述系统输入变量$u_1,u_2,\cdots,u_p$和输出变量$y_1,y_2,\cdots,y_q$之间的关系,即系统在输入变量的激励下,系统的输出变量的响应。这种描述不描述系统内部变量的行为,只描述系统的外部变量之间的关系,所以也称为系统的**外部描述**。在自动控制系统的经典理论中研究的都是单变量系统的输入输出描述,它一般具有如下形式的线性常系数微分方程:

$$y^{(n)}+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+\alpha_1 y^{(1)}+\alpha_0 y=\beta_{n-1}u^{(n-1)}+\beta_{n-2}u^{(n-2)}+\cdots+\beta_1 u^{(1)}+\beta_0 u \tag{1-16}$$

式中,$y^{(i)}\triangleq\dfrac{\mathrm{d}^{(i)}y}{\mathrm{d}t^i}$,$u^{(j)}\triangleq\dfrac{\mathrm{d}^{(j)}}{\mathrm{d}t^j}$,$\alpha_i$和$\beta_j$均为实数。外部描述常用的是传递函数:

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s^1+\alpha_0} \tag{1-17}$$

另一种外部描述为单位脉冲响应$g(t,\tau)$,就是输入单位脉冲函数时系统输出的响应。对任意输入$u(t)$,系统的输出$y(t)$可按下式求得

$$y(t)=\int_0^t g(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-18}$$

在本章,将导出线性多变量系统的输入输出描述——系统的冲激响应阵$\boldsymbol{G}(t,\tau)$和系统的传递函数阵$\boldsymbol{G}(s)$。

系统的状态空间描述则是反映系统内部变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$与输入变量$u_1,u_2,\cdots,u_p$和输出变量$y_1,y_2,\cdots,y_q$之间关系的数学表达式,所以也称为系统的**内部描述**。

现代控制理论就是用状态空间描述的数学模型,直接在时域中分析和综合控制系统运动特性的理论和方法。这种理论和方法既可用于线性系统,也可用于非线性系统,既可用于单变量系统,又可用于多变量系统,既可用于定常系统,也可用于时变系统。本书只讨论线性系统的状态空间理论和方法。本章将重点研究线性系统状态空间描述的基本概念和建立系统状态空间描述

的方法。

本章的主要内容：

线性系统的输入输出描述：传递函数阵和单位脉冲响应阵；

线性系统的状态空间描述：状态变量，状态向量，状态空间，线性系统的状态空间描述；

状态空间描述的等价变换；

线性定常组合系统的状态空间描述。

1.2 线性系统的输入输出描述

系统的输入输出描述只给出系统输入与输出之间的数学关系。此时，假定对系统的内部结构是不知的，而把系统看作是一个"黑箱"，如图 1-3 所示，研究对"黑箱"施加不同的输入时，系统有怎样的输出。

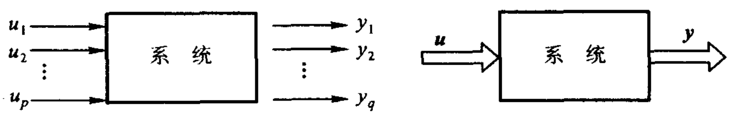

图 1-3 输入输出描述的系统方块图

在讨论正题之前，先对书中常用的符号作出约定。以白体小写字母表示标量，如 u、t、α、τ 等；以粗体小写字母表示向量，如 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{\alpha}$ 等；以粗体大写字母表示矩阵，如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 等。在图 1-3 中，假定有 p 个输入端，q 个输出端，则输入变量以 $u_1, u_2, \cdots, u_p$ 或 $p \times 1$ 列向量 $\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_p]^{\mathrm{T}}$ 表示，输出变量以 $y_1, y_2, \cdots, y_q$ 或 $q \times 1$ 列向量 $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_q]^{\mathrm{T}}$ 表示。$\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 定义在整个时间区间上，即 $t \in (-\infty, \infty)$。以 $\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 表示定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的向量函数，$\boldsymbol{u}(t)$ 则表示在 t 时刻 $\boldsymbol{u}$ 的值。如果 $\boldsymbol{u}$ 仅定义在区间 $[t_0, t_1]$ 内，则记以 $\boldsymbol{u}_{[t_0, t_1]}$。

1.2.1 系统的输入输出描述的一般表达式

系统的输入输出描述是研究系统在 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$ 作用下的响应，即 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$。如果系统的 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$ 由 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$ 唯一决定，且 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{u}(t)$，则称这个系统为**瞬时系统或无记忆系统**。纯电阻网络就是这样的系统。然而，在实践中多数系统都具有记忆特性，即系统在 t_0 时刻以后的输出 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$ 不仅与 t_0 时刻的输入 $\boldsymbol{u}(t_0)$ 有关，而且还与 t_0 时刻之前所加的输入有关。因此，系统的输出 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$ 就不是由 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$ 唯一决定。这样，不仅系统加上不同的输入 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$ 时，系统有不同的输出 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$，即使相同的输入 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$ 也会产生不同的输出 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$。这就给系统的研究造成困难。为此，在推导系统的输入输出描述时，假定系统在 t_0 时刻是**松弛的**。如果系统的输出 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$ 唯一地由输入 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$ 决定，那么，就称系统在 t_0 时刻是松弛的。从数学角度看，t_0 时刻就是初始时刻，因此，系统在 t_0 时刻是松弛的，系统就是零初始条件的。从能量的角度看，如果系统在 t_0 时刻没有能量

积蓄,则系统在 t_0 时刻就是松弛的。在以下讨论中均假定:系统在 t_0 时刻是松弛的。在这个假定下,如果系统在 t_0 时刻有一输入 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$,则系统的输出 $\boldsymbol{y}_{[t_0,\infty)}$ 将由 $\boldsymbol{u}_{[t_0,\infty)}$ 唯一决定。

在这一假定下,系统的输入输出的关系可以下式表示:

$$\boldsymbol{y}=H\boldsymbol{u} \tag{1-19}$$

式中,H 是某种函数或变换,它唯一地确定了输出 $\boldsymbol{y}$ 与输入 $\boldsymbol{u}$ 之间的依赖关系。或表示系统将 $\boldsymbol{u}$ 映射成 $\boldsymbol{y}$。注意,式(1-19)仅适用于松弛系统。

1.2.2 线性系统的单位脉冲响应阵

线性系统:一个松弛系统当且仅当对任意输入 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 及任意实数 α_1 和 α_2,满足

$$H(\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2)=\alpha_1H\boldsymbol{u}_1+\alpha_2H\boldsymbol{u}_2 \tag{1-20}$$

则称之为线性系统;否则,就称为非线性系统。

式(1-20)的条件也可表示为

$$H(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=H\boldsymbol{u}_1+H\boldsymbol{u}_2 \tag{1-21}$$

$$H(\alpha\boldsymbol{u}_1)=\alpha H\boldsymbol{u}_1 \tag{1-22}$$

式中,$\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 为任意两个输入,α 为任意实数。式(1-20)与(1-21)、(1-22)是等价的。式(1-21)叫做相加性,式(1-22)则叫做齐次性。如果松弛系统满足这两个条件,就说系统满足叠加原理。线性系统满足叠加原理,这是线性系统的一个重要的基本特性。

下面推导线性松弛系统的输入输出描述。先从单变量系统入手,然后再推广到多变量系统。

对单变量松弛系统,式(1-19)可写成

$$y=Hu$$

假设 u 是分段连续的,如图 1-4 所示。它可以用一系列宽为 Δ、高为 $u(t_i)\frac{1}{\Delta}\cdot\Delta$ 的脉冲函数来近似。定义如下脉冲函数:

$$\delta_\Delta(t-t_i)=\begin{cases}0 & t<t_i\\ \dfrac{1}{\Delta} & t_i\leqslant t<t_i+\Delta\\ 0 & t_i+\Delta\leqslant t\end{cases}$$

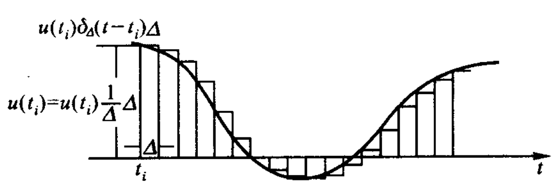

图 1-4 用脉冲函数近似输入函数

显然对所有 Δ,$\delta_\Delta(t-t_i)$的面积均为 1。当 Δ 趋于 0 时,其极限就是单位脉冲函数 $\delta(t-t_i)$

$$\delta(t-t_i)\triangleq\lim_{\Delta\to0}\delta_\Delta(t-t_i)$$

$\delta(t-t_i)$也称 Dirac 函数或 δ-函数。于是由图 1-4 有