1000 中学数学习题

王沛民 邹碧金 编

云南人民出版社

中学数学习题

王沛民　邹碧金 编

云南人民出版社

一九七九年·昆明

封面设计 李 志 强
责任编辑 肖 功 川

中 学 数 学 习 题

王沛民 邹碧金 编

*

云南人民出版社出版
（昆明市书林街100号）
云南新华印刷厂印刷 云南省新华书店发行

*

开本：787×1092 1/32 印张：11.25
1979年8月第一版 1980年1月第二次印刷
印数：130,301—214,000
统一书号：7116·687 定价：七角七分

前　言

本书共计编选了1000道数学题。

它以1978年教育部颁布的全日制十年制学校数学教学大纲（试行草案）为依据选择题目，但在章节次序上与大纲的安排不尽相同。以加强基础，提高质量，适应实现四个现代化的需要为目的，书中各章皆以复习题和综合题为主。同时，为启发读者的数学思维，满足进一步钻研的要求，书中选入了一定数量的较难的题目。

书中除证明题和作图题以外，其它习题都附有答案，部分习题还有详细题解或简要提示。考虑到本书的读者不仅是在校学生，而且包括许多自学的同志，因而对若干习题作了全解示范，并对解题方法和要点作了指导性的说明。每章习题的编排，遵循了由浅入深、由简到繁的原则，并尽可能地把相同类型的题目编排在一起。

在编写本习题集时，参考了十二本国内外的数学习题集，以及多种数学教科书和参考书。选自上述参考书的题目，有的是直接采用，有的已经过修改。全书约有十分之一的题目由编者自己命题。

限于水平和经验，书中的谬误和欠妥之处在所难免，恳请读者批评和指正。

本习题集在编写过程中，合肥工业大学王义民同志翻阅过某些章节，提供了许多有价值的题目和宝贵意见；对此，编者表示深切的感激。

编　者

1979年元月

目　录

第一章　数的运算

（1—25）

数的运算（包括四则运算、幂和方根运算、比例和绝对值等），不仅是初等数学，而且也是高等数学的重要基础.

1. 计算：$\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\times\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]\div 0.16\right\}$.

2. 计算：$\frac{20.4\times 4.8\times 6.5}{22.1\times 1.2}\left[\left(7\frac{2}{3}-6\frac{8}{15}\times\frac{5}{14}\right)\right.$

$$\left.\div\left(8\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}-1\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{18}\div\frac{14}{27}\right].$$

3. 计算：$\frac{1}{4}-0.8\div\frac{1.5}{\frac{3}{2}\times 0.4\times\frac{50}{1\div\frac{1}{2}}}+\frac{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{0.25}}{\left|\frac{46}{1+2.2\times 10}-6\right|}$.

4. 计算：$\frac{4.5\div\left[47.375-\left|18\times 0.75-26\frac{1}{3}\right|\times 2.4\div 0.88\right]}{\left|17.81\div 1.37-23\frac{2}{3}\div 1\frac{5}{6}\right|}$.

5. 若某数的三分之二等于

$$\left[15\div\frac{(0.6+0.425-0.005)\div 0.01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}\right]\left(0.645\div 0.3-1\frac{107}{180}\right)$$

$$\times\left(4\div 6.25-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\times 1.96\right)$$，试求此数之值。

6. 若某数的33%等于

$$\left(46\frac{2}{25}\div 12+41\frac{23}{35}\div 260\frac{5}{14}+800\div 12\frac{28}{31}\right)$$

$$\times\frac{0.8\times 7.2\times 4.5\times 1.3}{6.5\times 2.7\times 1.92}$$，试求此数之值。

7. 试求下式数值的倒数的三倍，

$$\frac{(2.1-1.965)\div(1.2\times 0.045)}{0.00325\div 0.013}-\frac{1\div 0.25}{1.6\times 0.625}.$$

8. 计算：$\left[3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{8}}\times(\sqrt{3}-1)^{-2}$.

9. 计算：$(0.027)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0.75}-3^{-1}+5.5^{0}$.

10. 计算：$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11)$.

11. 计算：$\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

12. 计算：$\frac{7(\sqrt{3}-\sqrt{5})^{2}}{20(2-\sqrt[4]{15})(2+\sqrt[4]{15})}$.

13. 计算：$(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33})(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4)$.

解　原式$=\sqrt{3}(\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{11})\cdot\sqrt{2}(\sqrt{11}+\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

$$=\sqrt{6}\left[(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2-(\sqrt{11})^2\right]$$

$$=\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{6}。$$

$$\therefore\quad (3+2\sqrt{6}-\sqrt{33})(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4)=24.$$

注 作根式运算时，乘法公式的应用常使运算简捷，有时非如此则运算无法进行。

14．计算：$(14+6\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}+(14-6\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}$。

提示 令$(14+6\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}=a$，$(14-6\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}=b$，再利用立方和公式．注意到$14\pm6\sqrt{5}=9\pm6\sqrt{5}+5=(3\pm\sqrt{5})^2$。

15．计算：$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}-1$。

提示 $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}$。

16．计算：$(1+\sqrt{2})\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}$。

17．计算：$(1+\sqrt{3})\sqrt{-2+2\sqrt{18-6\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}$。

18．计算：$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

提示 由后两个根式因子开始运算。

19．计算：$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$.

提示 无穷递缩等比数列各项和为$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

20．试求下式数值的四次幂。

$$285\div 28\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\div\frac{2}{3}-0.228$$

$$\div\left[\left(1.5291-\frac{14.53662}{3-0.095}\times 0.305\right)\div 0.12\right].$$

21. 试求下式数值的平方根的倒数.

$$\left\{\frac{8.8077}{20-[28.2\div(13.333\times 0.3+0.0001)]\times 2.004}+4.9\right\}\times\frac{5}{32}.$$

求下列各式中的 x 的值(22～25)

22. $x\cdot\left[41\frac{29}{72}-\left(18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}\right)\left(10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right)\right]\div 22\frac{7}{18}=\frac{1}{8}.$

23. $\left[\dfrac{\left(2.4+1\frac{5}{7}\right)\times 4.375}{0.02\times\left(26\frac{3}{5}-1.6\right)}-\dfrac{\left(2.75-1\frac{5}{6}\right)\times 21}{8\frac{3}{20}-0.45}\right]:x=67:0.005.$

24. $\dfrac{1.2\div\left[3\div\frac{2}{5}-0.09\div\left(0.15:x\right)\right]}{0.32\times 6+0.03-(5.3-3.88)+0.67}=1:6.$

25. $\dfrac{\left[\left(4.625-\frac{13}{18}\times\frac{9}{26}\right):x+(2.5\div 1.25)\div 6.75\right]\div 1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0.375\right)\div 0.125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right)\div(0.358-1.4796\div 13.7)}$

$=\dfrac{17}{27}.$

第二章 代数变换

(26—103)

代数式的恒等变换，可以按照各种不同的方式进行，依变换的目的而定。例如：可使一个表达式变为较紧凑的简单形式，以便于用数字值来代替字母，或便于再作变换；也可以把一个表达式化成各种便于解方程、取对数、求微分或积分等等的形式。

将下列各式分解因式* (26～67)

26．$4a^3b-6b^3+2a^2b^2-12ab^2$.

解 原式$=2b(2a^3-3b^2+a^2b-6ab)$

$$=2b[a^2(2a+b)-3b(b+2a)]$$

$$=2b(2a+b)(a^2-3b).$$

27．$x^3+y^3+x^2y^2+xy$.

解 原式也是一个四项式，将其分组则可看出：第一和第四项有公因式x，第二和第三项有公因式y^2。

即：

$$x^3+xy=x(x^2+y),$$

$$y^3+x^2y^2=y^2(y+x^2).$$

---

* 这里所指的分解因式是对有理整式而言的，也就是说，在分解前后的代数式中，仅包含加、减、乘和乘方的运算，或者尽管有除的运算，但除式中不含有字母。演算结果应使多项式变换为质因式的乘积形式，即分解到每一因式都不能再分为止。

$\therefore$ 原式 $= x(x^2+y)+y^2(y+x^2)$

$= (x^2+y)(x+y^2)$

注 直接提取公因式或分组提取公因式（参见本题和题26）的方法是因式分解的基本方法之一。通常一次提取公因式后，并不能使多项式完全分解，尚需继续变换。

28. $ax^2+1+(a+1)x$.

29. $x^3+4x^2-13x-24$.

提示 改写第三项：$-13x=-21x+8x$.

30. x^3+5x^2+3x-9.

31. $x^4-3x^3+3x^2+3x-4$.

提示 改写第三项：$3x^2=4x^2-x^2$.

32. $x^4+5x^3-7x^2-8x-12$.

提示 改写第二项：$5x^3=6x^3-x^3$；

改写第三项：$-7x^2=-6x^2-x^2$.

33. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

提示 原式展开，且添写两项：$+abc-abc$.

34. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$.

提示 原式展开；同类项合并后，得

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

35. $(x+y)z^3+(xy+y^2)z^2-(y+z)x^3-(yz+y^2)x^2$.

提示 分组分解因式，前两项为 $(x+y)z^2\cdot(z+y)$；后两项为 $-(y+z)x^2\cdot(x+y)$.

36. $y(x-2z)^2+8xyz+x(y-2z)^2-2z(x+y)^2$.

提示 改写第二项：$8xyz=4xyz+4xyz$，则原式变成五项。第一、二项分解得：$y(x^2+4z^2)$；第三、四项分解得：

$x(y^2+4z^2)$；此两式继续分解，可得：$(x+y)(xy+4z^2)$。

37. $2(a^2+b^2)(a+b)^2-(a^2-b^2)^2$.

解 原式不能一次直接利用公式进行分解，但是可以看出，第二项括号内的式子是两数的平方差.

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad 原式 &= 2(a^2+b^2)(a+b)^2-[(a+b)(a-b)]^2 \\
&=(a+b)^2[2(a^2+b^2)-(a-b)^2] \\
&=(a+b)^2(a^2+2ab+b^2) \\
&=(a+b)^2(a+b)^2 \\
&=(a+b)^4.
\end{aligned}
$$

注 利用乘法公式和除法公式分解因式，也是因式分解的基本方法之一．变换时应注意公式的灵活应用（如配项后再利用公式等），参见题38和39的解．

38. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

解 一、二项配为和的立方，即

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2.$$

$$
\begin{aligned}
原式 &=(a+b)^3+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2 \\
&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2] \\
&\quad -3ab(a+b+c) \\
&=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab] \\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).
\end{aligned}
$$

注 本题结果可直接用作因式分解公式。

39. $a^4+a^2b^2+b^4$.

解 若原式的第二项为 $2a^2b^2$，则可利用和的平方公式。

$$
\begin{aligned}
原式 &=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \\
&=(a^2+b^2)^2-a^2b^2
\end{aligned}
$$

$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

注 本题结果可直接用作因式分解公式。

40\. $x^2y-ay^3 \qquad (a>0)$.

提示 由于 $a>0$，故 $a=(\sqrt{a})^2$。

41\. $x^4+2ax^2y^2+a^2y^4 \qquad (a<0)$.

提示 由于 $a<0$，故原式可改写为 $x^4-2|a|x^2y^2+|a|^2y^4$；注意到 $|a|=(\sqrt{|a|})^2$。

42\. $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$.

43\. $16x^4-72x^2y^2+81y^4-8x^2-18y^2+1$.

提示 改写第四项：$-8x^2=8x^2-16x^2$，尔后可考虑利用三项和的平方公式.

44\. $x^3+px^2+px+p-1$.

45\. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

46\. $(x^2+y^2)^3-(y^2+z^2)^3+(z^2-x^2)^3$.

47\. $(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)$.

提示 有必要时可参见题38.

48\. $a^{10}-a^2$.

提示 分解过程中得到的式 a^4+1 还不是质因式，仍需按题39的方法继续分解.

49\. $2a^2-7ab-22b^2-5a+35b-3$.

解 原式分组整理得

$$2a^2-(7b-5)a-(22b^2-35b+3)$$
$$=2a^2-(7b-5)a-(2b-3)(11b-1)$$
$$=2a^2+[2(2b-3)-(11b-1)]a-(2b-3)\times(11b-1)$$

$$=[a+(2b-3)][2a-(11b-1)]$$
$$=(a+2b-3)(2a-11b+1).$$

注Ⅰ 题中的二次三项式 $22b^2-35b+1$ 用配方法或十字相乘法分解，得到 $(2b-3)(11b-1)$；原式变换成关于 a 的二次三项式后，也是用此法分解而得最后结果。

注Ⅱ 这种分解二次三项式的方法，就是二次方程的根的性质的应用。令 x_1 和 x_2 为二次方程的两个实根，则有

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=(x-x_1)(x-x_2)^{*}.$$

或者，有

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$
$$=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=a(x-x_1)(x-x_2).$$

利用方程的性质分解因式，同样是因式分解的基本方法之一。

50．$a^2-4ab+4b^2-3a+6b+2$．

51．$x^2-2xy+y^2+3x-3y+2$．

52．$6x^2-5xy+y^2+x-y-2$．

解法Ⅰ 参见题49．

解法Ⅱ 二次项分解后，原式变换为

$$(3x-y)(2x-y)+x-y-2.$$

若上式能够分解因式，则必为下列形式：

$$(3x-y+m)(2x-y+n),$$

式中 m 和 n 为常数．因此，

$$\text{原式}=6x^2-5xy+y^2+x-y-2$$
$$=(3x-y+m)(2x-y+n)$$

---

* 若令 $a=-x_1$，$b=-x_2$，即得到乘法分式：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$。

$$=6x^2-5xy+y^2+m(2x-y)+n(3x-y)+mn$$
$$=6x^2-5xy+y^2+(2m+3n)x-(m+n)y+mn.$$

比较多项式的一次项系数和常数项，可知上式成立的充要条件为：

$$2m+3n=1,\quad -(m+n)=-1 \text{ 和 } mn=-2.$$

由前两式解得：$m=2$，$n=-1$；而此二值亦能适合第三式，即 $mn=2\cdot(-1)=-2$．由此可知，原式等于

$$(3x-y+2)(2x-y-1).$$

注 对这种完全的二元二次多项式的分解，常可用此法结合配方法演算而使过程简单．

53． $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$．

提示 参见题52，或将原式整理成

$$2x^2-[2(2y+a)+(y-a)]x+(2y+a)(y-a).$$

54． $a^2-3b^2-3c^2-2ab+10bc-2ca$．

提示 将原式整理成

$$a^2-2a(b+c)-(3b^2-10bc+3c^2).$$

55． $y(y+1)(x^2+1)+x(2y^2+2y+1)$．

提示 将原式展开并且整理成

$$y(y+1)x^2+[y^2+(y+1)^2]x+y(y+1).$$

56． $x^4-14x^2y^2+y^4$．

解 原式$=x^4+2x^2y^2+y^4-16x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(4xy)^2$$
$$=(x^2+4xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$$
$$=[(x+2y)^2-3y^2][(x-2y)^2-3y^2]$$
$$=(x+2y+\sqrt{3}y)(x+2y-\sqrt{3}y)$$
$$\times(x-2y+\sqrt{3}y)(x-2y-\sqrt{3}y).$$

注 这种三项式叫做x，y的齐次三项式（本题为四次齐次三项式）．当原式分解成两个x，y的二次齐次三项式的乘积后，若运算熟练，则二次齐次三项式可用配方法或十字相乘法直接分解而得到结果．但要注意分解后得到的两个一次因式，其每一项中都要含有字母．

57．$a(a-1)x^2-(a-b-1)xy-b(b+1)y^2$．

提示 原式可变换成

$$a(a-1)x^2-[(a-1)(b+1)-ab]xy-b(b+1)y^2.$$

58．$x^5+3x^4-2x^3-2x^2+3x+1$．

提示 注意到$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$，因此可将原式分组提取公因式$x+1$，且变换成

$$(x+1)[(x^2+1)^2+2(x^2+1)x-6x^2].$$

59．$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$．

提示 可将原式变换成$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$，即$(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120$．

60．$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$．

提示 将原式变换成

$$\begin{aligned}&4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2\\&=4(x^2+16x+60)^2+4x(x^2+16x+60)-3x^2.\end{aligned}$$

61．$8x^3+4(a-b+c)x^2+2(-bc+ca-ab)x-abc$．

提示 将原式改写成

$$(2x)^3+[a+(-b)+c](2x)^2+[a(-b)+(-b)c+ca]\cdot 2x+a(-b)c,$$

且利用三次方程的根的性质．

62．$a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-2abc+b^2c+bc^2$．

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(a^2b+a^2c)+(-ab^2-2abc-ac^2)+(b^2c+bc^2)\\&=a^2(b+c)-a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)\end{aligned}$$