下册

高等数学学习指导

沙启敏　主编

中国矿业学院出版社

高等学校教学参考书

高等数学学习指导

下 册

沙启敏 主编

中国矿业学院出版社

内 容 简 介

本书根据全国数学课程教学指导委员会所制定的高等数学基本要求及数学教研室多年教学经验编写而成。

下册内容共五章，包括多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等。下册分两大部分：学习指导部分与复习指导部分，书中对每章内容提出基本要求，指出重点与难点，亦备有大量的例题、思考题、练习题与自我测验题，书后附有练习题及自我测验题的答案，系大学工科本科学生、学习高等数学的一本主要辅导材料。

本书也可供大专、电大、职大、夜大及自学高等数学与报考研究生的同志们参考。

责任编辑：汤澄波

高等学校教学参考书

高等数学学习指导

（下）

沙启敏　主编

中国矿业学院出版社　出版　发行

中国矿业学院印刷厂　印刷

开本787×1092毫米1/32　印张 9　字数193千字

1988年5月第1版　　1988年5月第1次印刷

印数1—7000册

ISBN　7-81021-053-x

O·5(课)　定价：1.50元

技术设计：周立钢　　责任校对：瓮立平

目　录

学习指导

复习指导

第一部分　学习指导

第八章
多元函数微分学及其应用

【基本内容】

多元函数的概念，二元函数的极限与连续的概念，有界闭区域上连续函数性质的叙述，偏导数的概念及其求法，二元函数偏导数的几何意义，高阶偏导数，混合偏导数可以交换求导次序的条件（叙述），全增量与全微分的概念，全微分存在的必要条件与充分条件，*全微分在近似计算中的应用，多元复合函数的求导法则，全导数，隐函数求导法则，方向导数，梯度，空间曲线的切线与法平面、空间曲面的切平面与法线，二元函数的极值及其求法，最值问题，条件极值的拉格朗日乘数法，二元函数台劳公式的叙述。

【重点】

偏导数的概念及其求法，全增量与全微分的概念，多元复合函数的求导法则。

【难点】

多元复合函数的求导法（特别是抽象函数），极值的应用问题。

【基本要求】

1．理解二元函数的概念（定义域、对应规律、自变量的独立性）。

2. 了解二元函数的几何表示法。会求简单的二元函数的定义域（用不等式表示）。能区别开域、闭域，并能绘出其图形。

3. 知道二元函数的极限，连续等概念及有界闭区域上连续函数的性质。

4. 理解偏导数的概念，并能熟练地求出函数的偏导数，了解偏导数的几何意义。

5. 理解全微分的概念。了解全微分存在的必要条件和充分条件。

6. 熟练掌握复合函数的求导法则。掌握求二阶偏导数的方法。

7. 掌握由一个方程所确定的隐函数求偏导数的方法。会求由方程组确定的隐函数的偏导数。

8. 了解曲线的切线与法平面及空间曲面的切平面和法线，并掌握它们方程的求法。

9. 了解方向导数与梯度的概念，并掌握它们的计算方法。

10. 了解多元函数极值的概念，掌握求极值的方法。了解条件极值的概念，掌握用拉格朗日乘数法求条件极值。会解决一些较简单的最大值与最小值的应用问题。

【思考题】

1. 设 $z=f(x-1)+y$，若当 $y=1$ 时 $z=x$，试求函数 $f(t)$ 及 z。

2. 如何求二元函数的定义域。讨论 $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ 的定义域并将定义域用图形表示。

3．一元函数的极限定义与二元函数的极限定义有什么区别？若点(x,y)沿特定路线趋于点(x_0,y_0)时，$f(x,y)\to A$，能否说$f(x,y)$当$x\to x_0$、$y\to y_0$时极限为A？为什么？在什么情况下，可以断定二元函数的极限不存在？

4．下面求极限的方法对吗？若不对，请给出正确的做法。

设
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

问 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$是否存在

解：因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=0$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$存在。

5．在闭区域内连续的二元函数有些什么性质？

6．设$z=f(x,y)$，试写出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$、$\dfrac{\partial z}{\partial x\partial y}$的定义（用极限形式表示），并说明$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$的几何意义。

7．二阶混合偏导数与求导次序无关的充分条件是什么？

8．二元函数可微的必要条件是什么？充分条件是什么？

9．下面判断是否正确？

(1) $f(x,y)$在域D上分别对每一变量x，y是连续的，但$f(x,y)$在D上不一定连续；

(2) 因$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)点处不连续，所以，在该点处一阶偏导数不存在；

(3) 函数$z=f(x,y)$的偏导数存在且连续是函数可微的充分必要条件；

(4) $z=f(x,y)$的两个偏导数存在，函数不一定可微；

(5) $z=f(x,y)$的两个偏导数存在，函数必连续。

10. 试对下列函数列出函数结构图，并借助于结构图，写出一阶二阶偏导数的求导公式。

(1) $z=\phi(u,v)$，$u=u(x)$，$v=v(x,y)$；

(2) $u=f(x,y,z)$，$x=x$，$y=y(x)$，$z=z(x,y)$。

11. 设$z=f(u,v)$而$u=\phi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$，在推导公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

时，函数$z=f(x,y)$及$u=\phi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$分别应满足什么条件？为什么？

12. 试推出隐函数$F(x,y)=0$，$F(x,y,z)=0$的求导公式。

*13. 设方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$确定$x,y$为$u,v$的函数$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，应如何求$\frac{\partial x}{\partial u}$、$\frac{\partial x}{\partial v}$、$\frac{\partial y}{\partial u}$、$\frac{\partial y}{\partial v}$。

14. 空间曲线的切线与法平面方程、空间曲面的切平面与法线方程是如何推导出来的？

15. 二元函数极值存在的必要条件与充分条件各是什么？

16. 驻点与极值点之间有什么关系？下面说法对吗？若不对，请举例说明，并指出应如何修改。

（1）极值点必为驻点。

（2）函数在驻点处一定取得极值。

17. 什么是条件极值的拉格朗日乘数法？在实际问题中，如何求多元函数的最值？

【练习题】

1. 求下列函数：

（1）$z=x+y+f(x-y)$且当 $y=0$ 时 $z=x^3$，求函数 z；

（2）设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{e^x}{e^y\ln x^x}$，求 $f(x,y)$。

2. 求下列函数的定义域，并将定义域用图形表示：

（1）$z=\ln[x\cdot\ln(y-x)]$

（2）$z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

3. 两曲面 $z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$ 和 $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ 与平面 $y=2$ 相交的曲线成什么角度？

4. 计算下列各题：

（1）$z=\dfrac{e^{xy}}{e^x+e^y}$ 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（2）$z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$ 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（3）$z=y^x\ln(x+y)$ 求 dz 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

5. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}$$

6．设 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$，验证$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

7．计算下列各题：

(1) 设 $z=x\sin y+x^2F(u)$，$u=\sin y+\cos y$，其中 F 为可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

(2) 设 $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

(3) 设 $u=f(x,ye^z,x\sin y)$，其中 f 为可微函数，求 du。

8．设 $u=f(x,y)$，$x=e^s\cos t$，$y=e^s\sin t$，其中 f 为二次可微函数，求证$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$。

9．设 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+(x-1)y\ln x$，其中 f 是任意的二次可微函数，求证

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x+1)y$$

10．设 $z=f(x+\phi(y))$，其中 ϕ 为可微函数，f 是二次可微函数，求证：$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

11．计算下列各题：

(1) 设 u 是 x、y、z 的函数，由方程 $u^2+z^2+y^2-x=0$ 决定，其中，$z=xy^2+y\ln y-y$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

(2) 设 $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$，求 du。

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $z=y+x\phi(z)$所确定，其中ϕ为二次可微函数，且$1-x\phi'(z)\neq 0$，求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\phi^2(z)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}。$$

12. 设函数 $z=z(x,y)$由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},\ y+\frac{z}{x}\right)=0$给出，其中 F为可微函数，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$。

13. 证明方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$（F是可微函数）所定义的函数 $z=z(x,y)$满足关系式：

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay。$$

14. 设 $F(x-y,\ y-z,\ z-x)=0$，其中F 为可微函数，求 dz。

*15. 证明当 $\xi=\frac{y}{x}$，$\eta=y$ 时，方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{2x\partial y}=0$$

可以化为标准形 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$，其中 u 具有二阶连续偏导数。

16. 求数量场 $u=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$在点$M_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在此点的内法线方向上的方向导数。

17. 试求曲面 $xy+yz+xz-1=0$ 在点(3, -1, 2)上的切平面与法线方程。

*18. 试求两曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2x^2-3y^2+1$ 的交线在 (2, 1, 6) 点处的切线方程。

19. 证明曲面 $z=x+f(y-z)$ 在任意点 (x,y,z) 处的切平面与直线 $x=y=z$ 平行。

20. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点 (-1, -2, 3) 处的交角。

21. 过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程。

22. 证明两曲面 $F(x,y,z)=0$ 及 $G(x,y,z)=0$ 在其交点 (x_0,y_0,z_0) 处正交条件为：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0=0$$

并验证曲面 $x^2+y^2+z^2=ax$ 和 $x^2+y^2+z^2=by$ 互相正交。

（注：$(\ )_0$ 表示 $(\ )$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的值）。

23. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值。

24. 一帐幕下部为圆柱形，上部盖以圆锥形的篷顶，设帐幕的容积 v 为一定数 k，今要使幕布最少，试证幕布尺度之间应有关系式：$R=\sqrt{5}H$，$h=2H$（R、H 各为圆柱形的底半径和高，h 为圆锥形的高）。

25. 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点，使它与点 $A(1,1,1)$ 和点 $B(2,3,4)$ 的距离平方之和为最小。

26. 求内接于半轴为 a、b、c 的椭球体内的最大直角平行六面体的体积。

27. 已知两平面曲线 $f(x,y)=0$、$\phi(x,y)=0$，又 (α, β) 和 (ξ, η) 分别为两曲线上的点，试求如果这两点是这两曲线上相距最近或最远的点，则下列关系式必成立：

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x(\alpha,\beta)}{f_y(\alpha,\beta)}=\frac{\phi_x(\xi,\eta)}{\phi_y(\xi,\eta)}$$

28. 在第一卦限过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上一点作切平面 π，欲使 π 与三坐标面构成的体积最小，求这点坐标。

*29. 证明：$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点 (0,0) 邻域内，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$存在，它们在点 (0,0) 不连续，且在点 (0,0)点的任何邻域内，$f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$无界，但 $f(x,y)$在点(0,0)处可微。

自我测验题

1. 填充题：

(1) 设函数 $z=f(u,v)$而 $u=\phi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，当 z 对 u，v 的偏导数______________，而 u、v 对 x，y 的偏导数______________时，有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ______________；

(2) 设 $z=f(u)+y$，其中 $u=x^2+y^2$，f 为可微函数，则有 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______________；

(3) 设 $u=f(ax,by,cz)$其中 f 为可微函数，则 $du=$ ______________；

(4) 曲线 $x=t$，$y=-t$，$z=t^2$ 上与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程是______________；

(5) 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内______________，那末，在该区域内有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2．选择题：

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 是函数在该点可微的（　　　）。

(a) 必要但非充分条件；

(b) 充分但非必要条件；

(c) 充分而又必要条件；

(d) 既非充分又非必要条件。

(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处（　　　），则函数 $z=f(x,y)$ 在该点处必连续。

(a) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在；

(b) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微。

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不连续，则在该点处（　　　）。

(a) 可能可微；

(b) 一定不可微。

3．计算下列各题：

(1) 已知 $z=x^y$，求 dz。

(2) $z=e^{xy}$ 而 $x=\sin t, y=\cos s$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}$。

(3) $z=f\left(2x+3y,\ \frac{x}{y}\right)$其中 f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

(4) 设$\frac{x}{z}=e^{y+z}$，求 dz。

(5) 设方程 $z=f(x+y,y+z)$确定隐函数 $z=z(x,y)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）。

4．证明下列各题：

(1) 若 $u(x,y)$的二阶偏导数连续，则 $u(x,y)=f(x)\times g(y)$成立的必要条件是 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$

(2) 函数 $z=z(x,y)$由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$给出，其中 f 为可微函数，求证：$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$。

(3) 若函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微，证明函数在该点处连续。

5．求曲面 $z=xy$ 上平行于已知平面 $x+3y+z+9=0$ 的切平面及法线方程。

6．求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定函数 $z=f(x,y)$的极值。

7．一长方体的三面在坐标面上，与原点相对的顶点在平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$上，求长方体的最大体积。

第九章
重 积 分

【基本内容】

二重积分的概念及性质，二重积分的计算（包括直角坐标系和极坐标系），二重积分在几何（立体体积、曲面面积）与物理（如质量、重心、引力、转动惯量*等）中的应用。

三重积分的概念与性质，三重积分的计算（包括直角坐标系、柱面坐标系、球面坐标系），三重积分在几何及物理中的应用。

【重点】

二重积分的概念，二、三重积分的计算。

【难点】

化重积分为累次积分的定限问题。

【基本要求】

1. 理解二重积分与三重积分的概念。

2. 知道重积分的性质。

3. 熟练掌握二重积分的计算方法（直角坐标系与极坐标系）。

4. 掌握三重积的计算方法（直角坐标系，柱面坐标系及球面坐标系）。

5. 能用二重积分、三重积分表达一些几何量与物理量（如体积、质量、重心等）。