

考研辅导系列

GAODENG SHUXUE
JIETIFA FENLUN

□ 阎英骥 著

高等数学 解题法分论

思路 · 方法 · 技巧

 云南民族出版社

GAODENG SHUXUE
JIETIFA FENLUN

□ 阎英骥 著

高等数学 解题法分论

思路 · 方法 · 技巧

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学解题法分论/阎英骥著. —昆明: 云南民族出版社, 2005. 9

ISBN 7-5367-3240-6

I. 高... II. 阎... III. 高等数学—高等学校—解
题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 112958 号

责任编辑	王时炜
出版发行	云南民族出版社 (昆明市大观路 94 号 邮编: 650032) http://www.ynbook.com ynbook@vip.163.com
印 制	云南师范大学印刷厂
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	59
字 数	1357 千字
版 次	2005 年 12 月第 1 版
印 次	2005 年 12 月第 1 次
印 数	0001—1000 册
定 价	78.00 元
书 号	ISBN 7-5367-3240-6/O·2

前言

这是一部专门按题型讲解题法的著作,作者的编撰理念是:

- 学会一种方法,胜做一百个题.
- 给人一篓鱼,不如送人一张网.
- 思路、方法、技巧是网,题型是纲,纲举目张.

本书根据全国硕士研究生入学考试《数学考试大纲》的要求及常考题型,结合作者 17 年考研辅导的经验,将高等数学(含微积分)的主要内容浓缩成 78 个专题,分别进行了解题法讨论,其中数学一 76 个专题,数学二 55 个专题,数学三 62 个专题,数学四 53 个专题.

每一个专题由方法、例题、练习题三部份构成.方法是每一个专题的灵魂,作者力求方法详尽,技巧独到;例题是用来示范方法的,从逼真性考虑,例题多数选自考研真题;练习题是供读者模拟练习的,通过演练读者可以达到掌握方法的目的.全书共精选例题 899 题;配备练习题 1116 题;同时每一章后收录数一、数二、数三、数四 1987—2005 年全部考研真题,并附有参考答案.

在编写中作者追求:

实用性:理论实践合二为一,知识能力相得益彰.

科学性:考点重点无所不包,难点疑点无所不容.

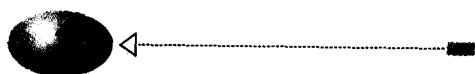
仿真性:逼近考研原汁原味,力求题题形神俱佳.

本书的初稿曾在考研辅导班试用四年,同时根据考生的意见修改过四次.本次出版前,罗兆富教授审阅了全稿并提出许多宝贵意见.在排版过程中,我的学生王苗锋、文金花、喻 兰、石可争、代修弘、肖庆

金、陈红涛、杨琳红、夏文常、阎婷婷、A 南罕、蔡红林、蒋桂林、廖才文、董 饶、杨荣丽、冯金梅、杨春敏、杨文霞、赵良丽曾先后 6 次校对全稿，他们的出色工作为本书增色不少，在此一并表示感谢。作者本人对全书的例题进行了重解，以此方式进行最后一次校对。虽然如此，错漏之处在所难免，请读者予以指正。

作者

2005 年 12 月



目 录

第一章 函数 · 极限 · 连续

§ 1.1	关于函数概念与性质的几点评注	(1)
§ 1.2	关于极限概念的几点评注	(14)
§ 1.3	如何求 $\frac{0}{0}$ 型极限	(18)
§ 1.4	如何求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(34)
§ 1.5	如何求 $\infty - \infty$ 型极限	(39)
§ 1.6	如何求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(44)
§ 1.7	如何求 1^∞ 型极限	(49)
§ 1.8	如何求 $0^0, \infty^0$ 型极限	(58)
§ 1.9	如何确定极限式中的常数	(61)
§ 1.10	如何确定无穷小的阶	(74)
§ 1.11	如何求含参变量代数式的极限	(79)
§ 1.12	如何由已知极限式求另一极限	(87)
§ 1.13	如何求 n 项和式与 n 项积式的极限	(94)
§ 1.14	如何求由递推式确定的数列的极限	(104)
§ 1.15	如何判断函数间断点的类型及讨论函数的连续性	(109)

§ 1.16	如何求二元函数的极限	(117)
附录	研究生入学考试试题	(131)
	参考答案及提示	(140)

第二章

微分学及其应用

§ 2.1	如何讨论一元函数的可导性	(143)
§ 2.2	如何求一元抽象函数的导数	(157)
§ 2.3	如何求一元分段函数中的参数	(165)
§ 2.4	如何求一元复合函数的导数	(173)
§ 2.5	如何求一元隐函数的导数	(179)
§ 2.6	如何求由参数方程确定的函数的导数	(184)
§ 2.7	如何求高阶导数	(188)
§ 2.8	如何求解平面曲线的切线问题	(195)
§ 2.9	如何求平面曲线的渐近线	(201)
§ 2.10	如何讨论函数的单调性、极值点、曲线的凸凹性及拐点问题	(204)
§ 2.11	如何由 $y = f'(x)$ ($y = f(x)$) 的图形判断 $y = f(x)$ ($y = f'(x)$) 的图形	(219)
§ 2.12	如何求显函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数	(223)
§ 2.13	如何求多元复合函数的偏导数	(226)
§ 2.14	如何判断隐函数的存在性及求隐函数的偏导数	(237)
§ 2.15	如何求解变量替换下微分方程的变形问题(数二、三、四可略)	(251)
§ 2.16	如何求解方向导数与梯度、散度与旋度、曲面的切平面与曲线的切线问题(数二、三、四可略)	(260)
§ 2.17	如何求函数的极值与最值	(279)
§ 2.18	如何求解经济问题(数一、二可略)	(295)
附录	研究生入学考试试题	(307)
	参考答案及提示	(327)

第三章 积分学及其应用

§ 3.1	求不定积分 —— 如何使用第一换元法	(333)
§ 3.2	求不定积分 —— 如何使用分部积分法	(353)
§ 3.3	求不定积分 —— 如何使用第二换元法	(364)
§ 3.4	求不定积分 —— 几种常见积分的积分法	(374)
§ 3.5	定积分的性质及简单应用	(384)
§ 3.6	如何计算定积分	(390)
§ 3.7	几种特殊形式定积分的计算	(408)
§ 3.8	变限积分及其应用	(427)
§ 3.9	如何计算广义积分	(455)
§ 3.10	定积分的应用	(463)
§ 3.11	如何计算二重积分	(499)
§ 3.12	如何计算三重积分(数二、三、四可略)	(534)
§ 3.13	如何交换积分次序	(554)
§ 3.14	如何比较积分值的大小	(566)
§ 3.15	如何计算第一型曲线积分(数二、三、四可略)	(572)
§ 3.16	如何计算第一型曲面积分(数二、三、四可略)	(583)
§ 3.17	如何计算第二型曲线积分(数二、三、四可略)	(600)
§ 3.18	如何计算第二型曲面积分(数二、三、四可略)	(619)
§ 3.19	多元函数积分学的应用(数二、三、四可略)	(634)
附录	研究生入学考试试题	(647)
	参考答案及提示	(670)

第四章 重要定理及其应用

§ 4.1	如何证明代数不等式	(677)
§ 4.2	如何证明积分不等式	(692)
§ 4.3	如何讨论方程的根	(705)
§ 4.4	如何证明含 $f(\xi)$ 的等式	(715)

§ 4.5	如何证明含 $f^{(n)}(\xi)$ 的等式	(722)
§ 4.6	如何证明含 $f'(\xi)$ 及 $f'(\eta)$ 的等式	(735)
附录	研究生入学考试试题	(743)
	参考答案及提示	(748)

第五章 微分方程与差分方程

§ 5.1	如何求解一阶微分方程	(752)
§ 5.2	可降阶的二阶微分方程(数三、四可略)	(772)
§ 5.3	二阶线性微分方程(数四可略)	(774)
§ 5.4	n 阶常系数线性微分方程与欧拉方程(数三、四可略)	(786)
§ 5.5	如何列微分方程解应用问题	(797)
§ 5.6	如何求解差分方程(数一、二、四可略)	(807)
附录	研究生入学考试试题	(810)
	参考答案及提示	(817)

第六章 无穷级数(数二、四可略)

§ 6.1	如何判断正项级数的敛散性	(820)
§ 6.2	如何判断任意项级数的敛散性	(832)
§ 6.3	如何判断抽象级数的敛散性	(840)
§ 6.4	幂级数收敛的特性	(853)
§ 6.5	如何求函数的幂级数展开式	(859)
§ 6.6	如何求幂级数的和函数	(868)
§ 6.7	如何求数值级数的和	(879)
§ 6.8	傅里叶级数(数三可略)	(884)
附录	研究生入学考试试题	(892)
	参考答案及提示	(897)

第七章 向量代数与空间解析几何 (数二、三、四可略)

§ 7.1	向量的概念与运算	(899)
§ 7.2	如何求平面方程	(908)
§ 7.3	如何求直线方程	(917)
§ 7.4	如何确定点、直线、平面间的位置关系	(923)
§ 7.5	如何求旋转面的方程	(927)
附录	研究生入学考试试题	(933)
	参考答案及提示	(934)

第一章

函数 · 极限 · 连续

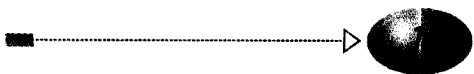
函数、极限、连续是进一步学习高等数学(微积分)的重要基础,也是各类考试的必考内容,因此,它们所涉及题目也是五彩缤纷,出神入化.

本章根据研究生入学考试《数学考试大纲》的要求,把函数、极限、连续的主要内容浓缩成16个专题,分别进行了解题法讨论,有些方法是经典的,有些方法是读者很少见过的.

§ 1.1 关于函数概念与性质的几点评注

一、函数的概念

【定义1】 设 D 是一个非空实数集,如果存在一个对应规则 f ,使得对每一个 $x \in D$,都能由 f 唯一地确定一个实数 y ,则称对应规则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数,称 D 为函数 f 的定义域,全体函数值的集合称为函数的值域.



评注 1 : 两个函数相同 $\Leftrightarrow$ 它们的定义域和对应关系都相同.

由此可知: 函数只与定义域和对应关系有关, 而与用何字母表示自变量无关, 这一结论称为“函数表示法与字母无关性”. 此结论在求函数的表达式时经常用到.

【例 1】 已知 $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$, 求 $f(x)$ ($0 < x < 1$).

【解】 将表达式右边用 $\sin^2 x$ 表示有:

$$\begin{aligned} f(\sin^2 x) &= 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ &= -2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x}. \end{aligned}$$

再令 $t = \sin^2 x$ 有:

$$f(t) = -2t + \frac{1}{1-t} = \frac{2t^2 - 2t + 1}{1-t}.$$

于是, 根据函数表示法与字母无关性得:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{1-x}.$$

【例 2】 设 $f(\frac{x+1}{2x-1}) = 2f(x) + x$, 求 $f(x)$.

【解】 作变换 $t = \frac{x+1}{2x-1}$, 得 $x = \frac{t+1}{2t-1}$, 代入已知等式有

$$f(t) = 2f(\frac{t+1}{2t-1}) + \frac{t+1}{2t-1}.$$

再根据函数表示法与字母无关性有:

$$f(x) = 2f(\frac{x+1}{2x-1}) + \frac{x+1}{2x-1}.$$

最后, 联立已知等式解方程组得:

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{3 - 6x}.$$

二、复合函数

【定义 2】 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D , 函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z , 如 $D \cap Z \neq \emptyset$, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数.

评注 2 : 复合函数 $f[\varphi(x)] =$ 在函数 $f(x)$ 的表达式中, 把自变量 x 换成 $\varphi(x)$.

例如: 如果 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 则 $f(e^x) = \frac{1}{1+e^x}$, $f(1-x) = \frac{1}{2-x}$,
 $f[f(x)] = \frac{1}{1+f(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}$, $f[\varphi(x)] = \frac{1}{1+\varphi(x)}$.

【例 3】 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】 因为 $f(x) = e^{x^2}$, 所以

$$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)}.$$

又因 $f[\varphi(x)] = 1-x$, 所以可得关于 $\varphi(x)$ 的等式:

$$e^{\varphi^2(x)} = 1-x,$$

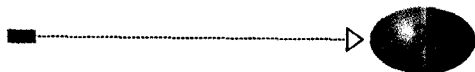
解得

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}.$$

最后: 由 $\begin{cases} \ln(1-x) \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$, 得 $\varphi(x)$ 的定义域: $x \leq 0$.

【例 4】 设 $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\varphi(x)$.

【分析】 欲求 $\varphi(x)$ 需知 $f[\varphi(x)]$, 而要知 $f[\varphi(x)]$ 又需知 $f(x)$, 但



$f(x)$ 可由 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$ 得到.

【解】 令 $t = x^2 - 1$, 则有

$$f(t) = f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2} = \ln \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1 - 1} = \ln \frac{t + 1}{t - 1}.$$

于是

$$f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x) + 1}{\varphi(x) - 1}.$$

再由 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 有

$$\ln \frac{\varphi(x) + 1}{\varphi(x) - 1} = \ln x,$$

解得

$$\varphi(x) = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

【例 5】 设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0, a]$ ($a > 0$), 求 $f(x)$ 的定义域.

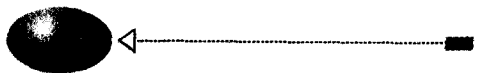
【分析】 解决本题的关键是正确理解题意, 题设中 $f(x-1)$ 的定义域是指复合函数 $f(u) = f(x-1)$ 的直接变量 x 的取值范围, 而结论中要求的 $f(x)$ 的定义域是求 $f(u)$ 的定义域, 即中间变量 u 的取值范围.

【解】 因 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0, a]$, 所以有 $0 \leq x \leq a$, 于是又有 $-1 \leq x-1 \leq a-1$, 也即 $-1 \leq u \leq a-1$, 所以 $f(u)$ 也即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, a-1]$.

【例 6】 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, 而 $\varphi(x) = 1 - \ln x$, 求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

【分析】 本题中, 所求的复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是指求直接变量 x 的取值范围, 而条件中给定的 $f(x)$ 的定义域或 $f(u)$ 的定义域是指中间变量 $u (= \varphi(x))$ 的取值范围.

【解】 令 $u = 1 - \ln x$, 由于 $0 < u \leq 1$, 所以有: $0 < 1 - \ln x \leq 1$, 解得 $1 \leq x < e$. 即 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[1, e)$.



评注 3 : 分段函数的复合函数的求法.

设有 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq a, \\ f_2(x), & x > a, \end{cases}$ 及 $\varphi(x)$, 求复合函数 $f[\varphi(x)]$.

将 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$ 的表达式有

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} f_1[\varphi(x)], & \varphi(x) \leq a, \\ f_2[\varphi(x)], & \varphi(x) > a. \end{cases}$$

因此, 要正确写出 $f[\varphi(x)]$ 的表达式, 关键要确定: 当 x 取何值时 $\varphi(x) \leq a$; x 取何值时, $\varphi(x) > a$. 下面介绍两种方法.

方法 1

解析法.

(1) 若 $\varphi(x)$ 不是分段函数, 则分别解不等式 $\varphi(x) \leq a$, 与 $\varphi(x) > a$ 即得相应的 x 取值范围.

(2) 若 $\varphi(x)$ 是分段函数, $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \leq b, \\ \varphi_2(x), & x > b. \end{cases}$ 则需分两种情况考虑.

① 由不等式 $\varphi(x) \leq a$ 得两个不等式组:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \varphi_1(x) \leq a, \\ \text{满足 } x \leq b, \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi_2(x) \leq a, \\ \text{满足 } x > b. \end{cases}$$

分别求解即得 x 的取值范围及与之对应的 $\varphi(x)$.

② 同理, 由不等式 $\varphi(x) > a$, 得两个不等式组:

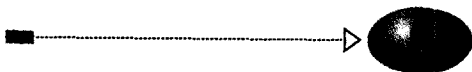
$$\begin{cases} \varphi(x) = \varphi_1(x) > a, \\ \text{满足 } x \leq b, \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi_2(x) > a, \\ \text{满足 } x > b. \end{cases}$$

分别求解, 即得 x 的取值范围及与之对应的 $\varphi(x)$.

方法 2

图像法.

步骤: (1) 记 $u = \varphi(x)$, 在 xou 平面上画出 $u = \varphi(x)$ 的图像.



(2) 在 u 轴上找出 $f(u)$ 的分段点 $u=a$, 并过此分段点作 x 轴的平行线.

(3) 求出该平行线与 $u = \varphi(x)$ 的图形交点的横坐标, 横坐标就是复合函数的一个分段点.

(4) 观察图形写出分段的复合函数.

【例 7】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 1-x, & x > 1, \end{cases} \varphi(x) = \ln x$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 将 $\varphi(x) = \ln x$ 代入 $f(x)$ 有

$$\begin{aligned} f[\varphi(x)] &= \begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x) \leq 1, \\ 1 - \varphi(x), & \varphi(x) > 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \ln^2 x, & \ln x \leq 1, \\ 1 - \ln x, & \ln x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

所以下面只需确定: x 取何值时, $\ln x \leq 1$; x 取何值时, $\ln x > 1$.

方法 1: 用解析法. 由不等式 $\ln x \leq 1$ 及 $\ln x > 1$, 易知当 $0 < x \leq e$ 时, $\ln x \leq 1$; 当 $x > e$ 时, $\ln x > 1$, 于是所求复合函数为

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} \ln^2 x, & 0 < x \leq e, \\ 1 - \ln x, & x > e. \end{cases}$$

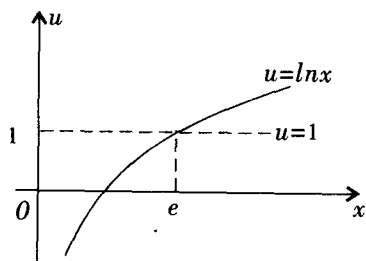


图 1.1

方法 2: 用图像法. 如图 1.1 在 xou 平面上作出 $u = \ln x$ 的图形, 过 u 轴上 $u = 1$ 的点, 作 x 轴平行线 $u = 1$, 此平行线与 $u = \ln x$ 图形交点的横坐标为 $x = e$.

从图中可以看出: 当 $0 < x \leq e$ 时, $\ln x \leq 1$, 当 $x > e$ 时, $\ln x > 1$,

从而所求复合函数为

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} \ln^2 x, & 0 < x \leq e, \\ 1 - \ln x, & x > e. \end{cases}$$

【例 8】 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 1, \\ x+2, & x > 1, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

【解】 将 $f(x)$ 代入 $g(x)$ 的表达式有

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leq 1, \\ f(x) + 2, & f(x) > 1. \end{cases}$$

所以以下的关键问题是确定:当 x 取何值时, $f(x) \leq 1$; x 取何值时 $f(x) > 1$.

方法 1: 用解析法. 根据 $f(x)$ 的表达式, ① 若 $f(x) \leq 1$, 则有不等式组

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \leq 1, \\ \text{满足 } x < 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x) = -x \leq 1, \\ \text{满足 } x \geq 0. \end{cases}$$

前者的解为 $-1 \leq x < 0$, 于是知: 当 $-1 \leq x < 0$ 时

$$g[f(x)] = 2 - x^2,$$

后者的解为 $x \geq 0$, 于是知: 当 $x \geq 0$ 时

$$g[f(x)] = 2 - (-x) = 2 + x.$$

② 若 $f(x) > 1$, 则有不等式组

$$\begin{cases} f(x) = x^2 > 1, \\ \text{满足 } x < 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x) = -x > 1, \\ \text{满足 } x \geq 0. \end{cases}$$

后者无解, 而前者的解是 $x < -1$, 于是知: 当 $x < -1$ 时

$$g[f(x)] = x^2 + 2.$$

综上知所求复合函数为