考研辅导系列

GAODENG SHUXUE
JIETIFA FENLUN

阎英骥 著

高等数学解题法分论

思路·方法·技巧

云南民族出版社

GAODENG SHUXUE
JIETIFA FENLUN

阎英骥 著

高等数学解题法分论

思路 · 方法 · 技巧

图书在版编目（CIP）数据

高等数学解题法分论/阎英骥著．—昆明：云南民族出版社，2005.9

ISBN 7－5367－3240－6

Ⅰ.高… Ⅱ.阎… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 112958 号

责任编辑	王时炜
出版发行	云南民族出版社 （昆明市大观路 94 号　邮编：650032） http://www.ynbook.com ynbook@vip.163.com
印　　制	云南师范大学印刷厂
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	59
字　　数	1357 千字
版　　次	2005 年 12 月第 1 版
印　　次	2005 年 12 月第 1 次
印　　数	0001－1000 册
定　　价	78.00 元
书　　号	ISBN 7－5367－3240－6/O·2

前　言

这是一部专门按题型讲解题法的著作，作者的编撰理念是：

- **学会一种方法，胜做一百个题．**
- **给人一篓鱼，不如送人一张网．**
- **思路、方法、技巧是网，题型是纲，纲举目张．**

本书根据全国硕士研究生入学考试《数学考试大纲》的要求及常考题型，结合作者17年考研辅导的经验，将高等数学（含微积分）的主要内容浓缩成78个专题，分别进行了解题法讨论，其中数学一76个专题，数学二55个专题，数学三62个专题，数学四53个专题．

每一个专题由方法、例题、练习题三部份构成．方法是每一个专题的灵魂，作者力求方法详尽，技巧独到；例题是用来示范方法的，从逼真性考虑，例题多数选自考研真题；练习题是供读者模拟练习的，通过演练读者可以达到掌握方法的目的．全书共精选例题899题；配备练习题1116题；同时每一章后收录数一、数二、数三、数四1987－2005年全部考研真题，并附有参考答案．

在编写中作者追求：

实用性：理论实践合二为一，知识能力相得益彰．

科学性：考点重点无所不包，难点疑点无所不容．

仿真性：逼近考研原汁原味，力求题题形神俱佳．

本书的初稿曾在考研辅导班试用四年，同时根据考生的意见修改过四次．本次出版前，罗兆富教授审阅了全稿并提出许多宝贵意见．在排版过程中，我的学生王苗锋、文金花、喻　兰、石可争、代修弘、肖庆

金、陈红涛、杨琳红、夏文常、阎婷婷、A 南罕、蔡红林、蒋桂林、廖才文、董　娆、杨荣丽、冯金梅、杨春敏、杨文霞、赵良丽曾先后6次校对全稿，他们的出色工作为本书增色不少，在此一并表示感谢. 作者本人对全书的例题进行了重解，以此方式进行最后一次校对. 虽然如此，错漏之处再所难免，请读者予以指正.

作者

2005 年 12 月

目　录

第一章　函数・极限・连续

第二章　微分学及其应用

目录

第三章　积分学及其应用

第四章　重要定理及其应用

第五章　微分方程与差分方程

第六章　无穷级数(数二、四可略)

第七章　向量代数与空间解析几何(数二、三、四可略)

第一章　函数·极限·连续

函数、极限、连续是进一步学习高等数学(微积分)的重要基础,也是各类考试的必考内容,因此,它们所涉及的题目也是五彩缤纷,出神入化.

本章根据研究生入学考试《数学考试大纲》的要求,把函数、极限、连续的主要内容浓缩成16个专题,分别进行了解题法讨论,有些方法是经典的,有些方法是读者很少见过的.

§1.1　关于函数概念与性质的几点评注

一、函数的概念

【定义1】　设D是一个非空实数集,如果存在一个对应规则f,使得对每一个$x \in D$,都能由f惟一地确定一个实数y,则称对应规则f为定义在实数集D上的一个函数,称D为函数f的定义域,全体函数值的集合称为函数的值域.

评注 1：两个函数相同 $\Leftrightarrow$ 它们的定义域和对应关系都相同．

由此可知：函数只与定义域和对应关系有关，而与用何字母表示自变量无关，这一结论称为“函数表示法与字母无关性”．此结论在求函数的表达式时经常用到．

【例 1】 已知 $f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求 $f(x)(0<x<1)$．

【解】 将表达式右边用 $\sin^2 x$ 表示有：

$$f(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-1$$

$$=-2\sin^2 x+\frac{1}{1-\sin^2 x}.$$

再令 $t=\sin^2 x$ 有：

$$f(t)=-2t+\frac{1}{1-t}=\frac{2t^2-2t+1}{1-t}.$$

于是，根据函数表示法与字母无关性得：

$$f(x)=\frac{2x^2-2x+1}{1-x}.$$

【例 2】 设 $f(\frac{x+1}{2x-1})=2f(x)+x$，求 $f(x)$．

【解】 作变换 $t=\frac{x+1}{2x-1}$，得 $x=\frac{t+1}{2t-1}$，代入已知等式有

$$f(t)=2f(\frac{t+1}{2t-1})+\frac{t+1}{2t-1}.$$

再根据函数表示法与字母无关性有：

$$f(x)=2f(\frac{x+1}{2x-1})+\frac{x+1}{2x-1}.$$

最后，联立已知等式解方程组得：

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{3-6x}.$$

二、复合函数

【定义 2】 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z，如 $D\cap Z\neq\Phi$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数.

评注 2：复合函数 $f[\varphi(x)]=$ 在函数 $f(x)$ 的表达式中，把自变量 x 换成 $\varphi(x)$.

例如：如果 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，则 $f(e^x)=\dfrac{1}{1+e^x}$，$f(1-x)=\dfrac{1}{2-x}$，$f[f(x)]=\dfrac{1}{1+f(x)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{1+x}{2+x}$，$f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{1+\varphi(x)}$.

【例 3】 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】 因为 $f(x)=e^{x^2}$，所以

$$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}.$$

又因 $f[\varphi(x)]=1-x$，所以可得关于 $\varphi(x)$ 的等式：

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x,$$

解得

$$\varphi(x)=\sqrt{ln(1-x)}.$$

最后：由 $\begin{cases}ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}$，得 $\varphi(x)$ 的定义域：$x\leqslant 0$.

【例 4】 设 $f(x^2-1)=ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=lnx$，求 $\varphi(x)$.

【分析】 欲求 $\varphi(x)$ 需知 $f[\varphi(x)]$，而要知 $f[\varphi(x)]$ 又需知 $f(x)$，但

$f(x)$ 可由 $f(x^2-1)=ln\frac{x^2}{x^2-2}$ 得到.

【解】 令 $t=x^2-1$,则有

$$f(t)=f(x^2-1)=ln\frac{x^2}{x^2-2}=ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}=ln\frac{t+1}{t-1}.$$

于是

$$f[\varphi(x)]=ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}.$$

再由 $f[\varphi(x)]=lnx$,有

$$ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=lnx\ ,$$

解得

$$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

【例 5】 设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a](a>0)$,求 $f(x)$ 的定义域.

【分析】 解决本题的关键是正确理解题意,题设中 $f(x-1)$ 的定义域是指复合函数 $f(u)=f(x+1)$ 的直接变量 x 的取值范围,而结论中要求的 $f(x)$ 的定义域是求 $f(u)$ 的定义域,即中间变量 u 的取值范围.

【解】 因 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$,所以有 $0\leqslant x\leqslant a$,于是又有 $-1\leqslant x-1\leqslant a-1$,也即 $-1\leqslant u\leqslant a-1$,所以 $f(u)$ 也即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$.

【例 6】 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$,而 $\varphi(x)=1-lnx$,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

【分析】 本题中,所求的复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是指求直接变量 x 的取值范围,而条件中给定的 $f(x)$ 的定义域或 $f(u)$ 的定义域是指中间变量 $u(=\varphi(x))$ 的取值范围.

【解】 令 $u=1-lnx$,由于 $0<u\leqslant 1$,所以有:$0<1-lnx\leqslant 1$,解得 $1\leqslant x<e$. 即 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[1,e)$.

评注 3：分段函数的复合函数的求法.

设有 $f(x)=\begin{cases}f_1(x), x\leqslant a,\\ f_2(x), x>a,\end{cases}$ 及 $\varphi(x)$，求复合函数 $f[\varphi(x)]$.

将 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$ 的表达式有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}f_1[\varphi(x)], & \varphi(x)\leqslant a,\\ f_2[\varphi(x)], & \varphi(x)>a.\end{cases}$$

因此，要正确写出 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，关键要确定：当 x 取何值时 $\varphi(x)\leqslant a$；x 取何值时，$\varphi(x)>a$. 下面介绍两种方法.

方法 1　**解析法.**

(1) 若 $\varphi(x)$ 不是分段函数，则分别解不等式 $\varphi(x)\leqslant a$，与 $\varphi(x)>a$ 即得相应的 x 取值范围.

(2) 若 $\varphi(x)$ 是分段函数，$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), x\leqslant b,\\ \varphi_2(x), x>b.\end{cases}$ 则需分两种情况考虑.

① 由不等式 $\varphi(x)\leqslant a$ 得两个不等式组：

$$\begin{cases}\varphi(x)=\varphi_1(x)\leqslant a,\\ \text{满足 } x\leqslant b,\end{cases}\text{及}\begin{cases}\varphi(x)=\varphi_2(x)\leqslant a,\\ \text{满足 } x>b.\end{cases}$$

分别求解即得 x 的取值范围及与之对应的 $\varphi(x)$.

② 同理，由不等式 $\varphi(x)>a$，得两个不等式组：

$$\begin{cases}\varphi(x)=\varphi_1(x)>a,\\ \text{满足 } x\leqslant b,\end{cases}\text{及}\begin{cases}\varphi(x)=\varphi_2(x)>a,\\ \text{满足 } x>b\end{cases}.$$

分别求解，即得 x 的取值范围及与之对应的 $\varphi(x)$.

方法 2　**图像法.**

步骤：(1) 记 $u=\varphi(x)$，在 xou 平面上画出 $u=\varphi(x)$ 的图像.

(2) 在 u 轴上找出 $f(u)$ 的分段点 $u=a$,并过此分段点作 x 轴的平行线.

(3) 求出该平行线与 $u=\varphi(x)$ 的图形交点的横坐标,横坐标就是复合函数的一个分段点.

(4) 观察图形写出分段的复合函数.

【例7】 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ 1-x, & x>1, \end{cases}$ $\varphi(x)=lnx$,求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 将 $\varphi(x)=lnx$ 代入 $f(x)$ 有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\leqslant 1, \\ 1-\varphi(x), & \varphi(x)>1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ln^2x, & lnx\leqslant 1, \\ 1-lnx, & lnx>1. \end{cases}$$

所以下面只需确定:x 取何值时,$lnx\leqslant 1$;x 取何值时,$lnx>1$.

方法1:用解析法. 由不等式 $lnx\leqslant 1$ 及 $lnx>1$,易知当 $0<x\leqslant e$ 时,$lnx\leqslant 1$;当 $x>e$ 时,$lnx>1$,于是所求复合函数为

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} ln^2x, & 0<x\leqslant e, \\ 1-lnx, & x>e. \end{cases}$$

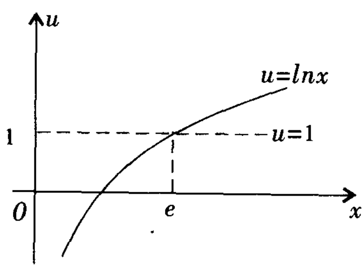

图 1.1

方法2:用图像法. 如图 1.1 在 xou 平面上作出 $u=lnx$ 的图形,过 u 轴上 $u=1$ 的点,作 x 轴平行线 $u=1$,此平行线与 $u=lnx$ 图形交点的横坐标为 $x=e$.

从图中可以看出:当 $0<x\leqslant e$ 时,$lnx\leqslant 1$,当 $x>e$ 时,$lnx>1$,

从而所求复合函数为

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}ln^2x, & 0<x\leqslant e,\\1-lnx, & x>e.\end{cases}$$

【例 8】 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 1,\\x+2, x>1,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\-x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

【解】 将 $f(x)$ 代入 $g(x)$ 的表达式有

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 1,\\f(x)+2, & f(x)>1.\end{cases}$$

所以以下的关键问题是确定：当 x 取何值时，$f(x)\leqslant 1$；x 取何值时 $f(x)>1$.

方法 1：用解析法. 根据 $f(x)$ 的表达式，① 若 $f(x)\leqslant 1$，则有不等式组

$$\begin{cases}f(x)=x^2\leqslant 1,\\\text{满足 } x<0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(x)=-x\leqslant 1,\\\text{满足 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

前者的解为 $-1\leqslant x<0$，于是知：当 $-1\leqslant x<0$ 时

$$g[f(x)]=2-x^2,$$

后者的解为 $x\geqslant 0$，于是知：当 $x\geqslant 0$ 时

$$g[f(x)]=2-(-x)=2+x.$$

② 若 $f(x)>1$，则有不等式组

$$\begin{cases}f(x)=x^2>1,\\\text{满足 } x<0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(x)=-x>1,\\\text{满足 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

后者无解，而前者的解是 $x<-1$，于是知：当 $x<-1$ 时

$$g[f(x)]=x^2+2.$$

综上知所求复合函数为