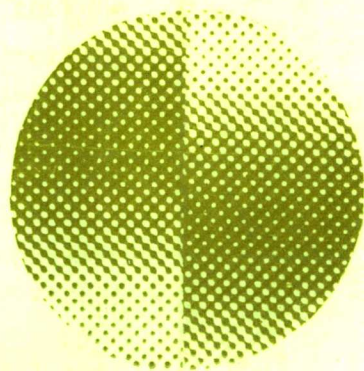


应用数学模型丛书

微分方程模型

[美] WILLIAM F. LUCAS 主编



■ 朱煜民 周宇虹 译 沙基昌 校
■ 国防科技大学出版社

应用数学模型丛书

WEIFEN FANGCHENG MOXING

微分方程模型

[美] WILLIAM F. LUCAS 主编

朱煜民 周宇虹 译 沙基昌 校

国防科技大学出版社

原 序

这套四卷本丛书的编写目的是为大学师生提供一批能用于本科教学的、关于数学实际应用的重要例子。我们希望通过这些例子，能够说明现代数学是如何被实际应用于解决当代有关问题的。虽然这些章节是为公共数学教师而写的，但是，它们对于许多应用领域的学生、教师和科学研究工作者也将是有益的。每章都提供了所需先行知识以及对教师的提示。许多章节在不同的班级中试验过，所有章节亦都经过广泛的审查和修订。多数章节还有例题和练习。有些单元可在一学时内完成，而另一些单元则需要几周才能讲完。

第一卷的23章与微分方程有关，而其中最后四章涉及偏微分方程。其应用问题来自医学、生物、交通系统和一些其他领域。第二卷的14章主要研究政治科学中发生的问题，但是也涉及到社会学与生态学方面的问题。包括选举系统、带权选举、比例代表制、联盟值和委员会问题等。第三卷14章的重点是离散数学模型，例如图论、组合论和网络理论中的问题。这些技术可用于研究经济、交通理论、运筹学、决策理论以及其他领域，第四卷的12章讨论生命科学中的数学模型。其中包括群体增长和行为、生物医学（流行病学、遗传学与生物工程）以及生态学等方面的问题。

这套丛书是美国数学协会（MAA）两个教育计划实施的结果，它们还部分地受到国家科学基金（NSF）的资助。这两个计划的目的是编写本科教育的教材。第一个计划由MAA的本科数学大纲委员会（CUPM）负责，对本科高年级学生应用数学教学所需的素材和事例进行研究。它得到NSF自1972年9

月1日到1977年5月31日的资助 (SED72—07370)。这个计划在 Donal Bushaw 的指导下完成了。在此期间, Bushaw 和 William Lucas 担任 CUPM 的主席, 而 George Pedtrick 是 CUPM 的执行负责人。该计划的成果是 1976 年末发表的由 Maynard Thompson 编辑的报告, 题为“应用数学中的事例研究”。其中包括了11位作者编写的9章以及一章绪论与该材料课堂试用的报告。

第二个计划由 MAA 的学会和专题研究委员会 (CIW) 发起, 这就是 1967 年在康奈尔 (Cornell) 大学举行的为期四周的夏季“应用数学模型”专题研究。1975年5月1日至1978年9月30日它得到 NSF 的 SED75—00713 资助以及 SED77—07482 的一小部分补充资助。在专题研究小组工作期间, 威廉·F. 卢卡斯担任 CIW 的主席和这个计划的负责人。这项活动的成果是产生了由37位作者编写的60个用于教学的模型。

这套丛书共有63章, 其中包括“应用数学中的事例研究”的11章中的9章和应用数学模型专题研究小组60个模型中的52个—这些都已作了必要的修订, 以及后添的二章(第二卷第七章和第十四章)。Steven Brams 所写的与1976年 MAA 的专题研究小组有关的第二卷第三章的最初版本标题为“一个人, n 张选票”, 而这里提供的扩充了的版本与美国政治科学协会 (APSA) 的教材革新计划有关, 该计划由 Sheilah K. Mann 负责, 部分地由 NSF 的 SED77—18486 资助。该单元标题为“比较选举制”, 原来是作为单行本发表的, 供教师和学生课堂上试用。这一章的版权属于 APSA, 1978, 此处是经允许后采用的。

由 Edwin Beckenbaeh, Leonard Gillman, William Lucas, David Roselle 和 Alfred Willcox 组成的 MAA 的一个专门委员会负责管理出版工作以及某些需要得到 NSF 批准

的以这种形式出版的更广泛的尝试。必须提到 Willcox 博士自始至终所作的重要贡献。George Springer 也作了关键性的努力。然而必须强调指出，本书中任何意见和建议都属于各位作者本人，而未反映 NSF、MAA、编者或者这个计划的任何参与者的观点。

许多人以各种方式为这四卷书的出版作出了他们的努力，在此无法一一提及。然而，除了作者、编者以及上面提到的名字以外，还有二个人为这几卷书的出版作出了特殊贡献，应该得到真正的荣誉。Katherine B. Magann 在 CUPM 办公室关闭前几年一直在 CUPM 工作，完成了报告——“应用数学中的事例研究”。Carolyn D. Lucas 协助管理 1976 年 MAA 的专题研究小组，负责六十个模型的完成以及担任这四卷书的责任编辑。没有她坚持不懈的努力，或许就不能有这一庞大计划的最后完成。

W. F. 卢卡斯

1982年7月

中文版序

编辑这套四卷本丛书的目的是为了提供一大批令人信服的例子，来说明在解决当今世界各种实际问题时数学的巨大威力，同时也是为了纠正数学教学中普遍存在的两种极端倾向。

第一，我们已习惯于将数学作为古已有之的经典教条来教学，而不是象物理学或生物学一样作为活生生的发展着的学科。学生们倾向于将数学视为历史悠久而值得尊重的学科，而数学也确实是理解许多其他现代科学的重要预备知识。学生们习惯于用练习和记诵的方式学习数学，至于因学习数学今后能否得到个人和社会的报偿对于他们来说是无所谓的。

第二个极端是近几十年来对纯粹数学的过分强调，而数学教学中坚持理论与应用相结合将会更恰当些。我们常以过分简单的“二元论”方式看待事物，把数学或者数学家分为纯粹的和应用的，连续的和离散的，或者研究人员和教师。在这些极端之间一些人观察事物忽略了中间情况。伟大的英国分析学家 G. H. Hardy 在《一个数学家的自白》(*A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940) 中认为纯粹数学是更为自我满足和依靠内在动力的学科。

相反地，美国著名的拓扑学家 Raymond L. Wilder 在《数学概念的演变》(*Evolution of Mathematical Concepts*, Halstead Press, John Wiley and Sons, 1968) 中论述了数学的发展与同时期大社会之间的许多密切的内在联系。事实上，许多数学内容都是因社会需要而产生的，如果没有数学，现代技术世界中的绝大部分是不可能存在的。但是，60年代，包括美国在内的西方世界却是纯粹数学的观点支配了数学教

育。有意义的纯粹学科,如逻辑、近世代数等都有了超越过去世纪的巨大发展,并且完全变成了这个时期的“新数学”。而其它二十来种有意义的、重要的、但不太抽象的数学分支则被忽略了。

70年代美国产生了一个相反的运动。曾经有一个在大学水平的课程中安排讲授较为现代的课题以及当代应用的计划。许多人都感到用较为平衡的观点来看待纯粹数学与应用数学、古典数学和现代的数学更好些。这既不需要在美妙与有用之间,也不需要在新与旧之间发生任何冲突。这四卷书就是这种尝试的一个结果。它们是来自美国数学协会指导下的两个计划的成果,并且得到美国国家科学基金的资助。具有类似目标的其他计划和书籍亦已问世,而且有几家大学已经着手引进关于“数学构模”的独立的新课程,以便强调这一数学中的重要组成部分。不少人会认为关于建模(或关于数学的历史与文化)的单独的课程并非最适当,如果能在整个课程安排中使数学的所有这些风采各异的不同方面成为一个整体将是最理想的。无论如何,插入这样的新的建模课程对于在整个课程中恢复纯粹数学与应用数学之间的平衡是必要的(也许仅仅是暂时的)措施。

在《应用数学模型》一书中选用的63篇文章的作者们高兴地听到了他们的著作即将在中国出版。我们衷心希望读到这本书的学生和教师会发现它们既有趣又有用。

W.F. 卢卡斯

1987年10月1日

译者序

近半个世纪以来,数学的形象有了很大的变化。数学已不再单纯是数学家和少数物理学家、天文学家、力学家等人手中的神秘武器,它越来越深入地应用到各行各业之中了。几乎在人类社会生活的每个角落都在展示它的无穷威力。这一点尤其表现在生物、政治、经济、军事等数学应用的非传统领域。

与这种发展相比,目前我国高等教育中如何运用数学工具解决实际问题就显得过于薄弱,同时也缺乏合适的教材,以至不少数学工作者缺乏从实际问题中提炼数学模型的能力。同时,各行各业的不少实际工作者更缺乏运用数学工具以建立模型处理问题的能力,这与我国社会、政治、经济发展的要求极不相适应。

卢卡斯教授主编的这一套应用数学模型丛书从各种实际问题出发,提炼出一系列数学模型,并给出了求解方法。从应用范围看,包括自然科学、工程技术、医学、生物、生态、环境、政治、经济、军事、文化、体育、交通等人类社会生活的许多领域;从方法论看,其启发性很强;从数学内容看,要求适中,具有普通理工科大学数学基础的学生和实际工作者都能看懂。

我们翻译这套书的目的就是希望通过这套书的出版有利于培养各专业大学生建立数学模型的能力,有利于促进数学工作者与实际工作者的相互理解与沟通,有利于推动数学在我国现代化建设的各个领域中的应用。

我们十分感谢卢卡斯教授为翻译出版这套丛书提供的方便和帮助,并为中文版作序。刘德铭教授负责与卢卡斯教

授的联系，并将担任第二卷与第四卷的主要审校。沙基昌副教授负责全书的审校。作为译校人员与出版社联系的桥梁，朱煜民副教授使译稿质量大为增色。全书由许多同志共同努力翻译而成，他们的名字将陆续见于各卷之首。谨向为本书出版付出辛勤劳动的各位人士，特别是责任编辑钟平等同志致以诚挚的谢意。

沙 基 昌

1988年5月1日

于长沙

第一卷的序

第一卷由二十三章组成，它们涉及数学模型以及利用微分方程求解等问题。第一部分的各章论述了建模过程中最初的、通常也是最重要的部分：如何把所给的问题转化为数学问题。Henderson West所写的第一章展示了如何把各种应用题转化为微分方程，而 Frauenthal 所写的第三章讨论了群体增长模型的某种特殊情况，这是当前的热门课题之一。第二章描述了如何分析一个微分方程，并根据此方程得出定性的结论，这一章也是由Henderson West写的。作者们翔实地论述了这三章，写得极透彻，这在一般教科书中是少见的，因此，对于初学建模的学生来说，这三章属“必读”内容。

Braun 所写的第Ⅱ部分中的三章，讨论了三个不同的但都是非常重要的问题，对这些问题均可建立一阶微分方程模型并将其完全解出。有趣的是，这些文章所描述的工作，最初并不是由数学家们做的，而是由化学家、生物学家和社会学家们完成的（事实上，本卷中的许多篇章都是如此）。

第Ⅲ部分基本上是第Ⅱ部分的继续，不同的是，对这部分问题的建模采用的是高阶线性方程和可解的一阶方程组。在Braun、Coleman和 Powers所写的三章中可以看到，微分方程组可用来为十分复杂和深奥的问题建立模型，而且所得到的结果通常是非常令人兴奋的。

在第Ⅳ部分中，Baker 和Drew写的五章叙述了数学在交通理论的某些问题上的应用，它们提供了另一类令人感兴趣的模型。虽然得到的结论并不象前面各章中结论那样有说服力和引

人注目，但是，它们仍然十分重要。因为它们表明了数学如何帮助我们理解复杂的、甚至是不可控制的和无法求解的问题。

在第 V 部分中，Braun 和 Coleman 写的五章叙述了非线性方程组及其在生物学和生态学的重要问题上的应用。借助微分方程定性理论的方法，我们可以获得强有力的结论。有趣的是，人们注意到微分方程的定性理论最初是从物理学和天文学问题中引伸出来的。同样地，这些方法在生物科学中也有过重要的应用。确实，这样一种强有力的和完善的理论之存在，曾激发了许多数学家去研究生物学和生态学中的某些著名问题。

第 VI 部分中的各章论述了运用偏微分方程建模的系统，这是数学分析中比较困难的领域之一。Borrelli 的文章是这部分的基础，它仔细地叙述了这方面的理论以及实际的模型。Drew、Meyer 和 Porsching 所写的其余三章论述了现实生活中的一些重要而具体的应用问题。

Martin Braun

Courtney S. Coleman

Donald A. Drew

1982. 7

单位缩写一览表

单位符号	英文名称	中文名称	备注
BTU	British thermal unit	英国热量单位	1BTU=252cal
C	celsius	摄氏	
cal	calorie	卡[路里]	
cm	centimetre	厘米	
D	day	天	
deg	degree	度	
dis	distance	距离	
F	Fahrenheit	华氏	$F = (9/5)C + 32$
fortnight		双周	
ft	foot	呎	1ft=30.48cm
furlong		浪	1furlong =0.201125km
g	gram	克	
gal	gallon	加仑	1gal=4.546 l
h	hour	小时	
in	inch	吋	1in=2.54cm

单位符号	英 文 名 称	中文名称	备 注
kg	kilogram	公斤	
km	kilometre	公里	
l	litre	升	
lb	pound	磅	$1\text{lb}=0.454\text{kg}$
mg	milligram	毫克	
mi	mile	哩	$1\text{mi}=1.609\text{km}$
min	minute	分	
ml	millitre	毫升	
mo	month	月	
N	Newton	牛[顿]	
oz	ounce	盎司	$1\text{oz}=28.35\text{g}$
pdl	poundal	磅达	$1\text{pdl}=0.138255\text{N}$
S	second	秒	
T	ton	吨	
veh	vehicle	辆	
yr	year	年	

目 录

第 I 部分 微分方程, 模型, 及其应用	1
第 1 章 由应用题建立一阶微分方程	2
1. 引言	2
2. 若干准则	5
3. 举 例	8
练 习	17
解 答	20
教师参考	29
第 2 章 一阶微分方程定性解的图示	31
1. 引 言	31
2. 方向场	32
3. 关于唯一性定理	34
4. 解的图示	35
5. 平衡与稳定性的讨论	41
6. 一个比较困难的例子	42
练 习	45
解 答	49
教师参考	55
第 3 章 差分与微分方程群体增长模型	58
1. 引 言	58
2. 差分方程的解	59
3. 微分方程的解	60
4. 线性稳定性分析	62
5. 结果说明	67
6. 最后的注解	68
7. 附录: 基本模型	68
练 习	71
解 答	72

参考文献	75
教师参考	75
第II部分 生长和衰变模型：一阶微分方程	77
第4章 Van Meegeren 的艺术伪造品	78
练习	86
参考文献	88
教师参考	89
第5章 单一群体模型	90
练习	99
参考文献	101
教师参考	101
第6章 技术革新的推广	102
练习	109
参考文献	109
教师参考	109
第III部分 高阶线性模型	111
第7章 关于糖尿病检测的一个模型	112
练习	120
参考文献	121
教师参考	121
第8章 作战模型	122
1. 引言	122
2. 三个Lanchester 战斗模型	122
3. 常规战斗：平方律	127
4. 游击战：线性律	130
5. 越南：抛物律	131
6. 硫黄岛战斗	136
7. 战斗的数学模型：建模的阴暗面	143
练习	144
方案	144
参考文献	147

教师参考	149
第9章 用频率响应的方法建立线性系统的模型	150
1. 引言	150
2. 建立操作人员模型	152
3. 频率响应模型的性质和技术	153
4. 设计: 操作人员实验数据	169
5. 更深一步的论题	172
参考文献	173
教师参考	174
第IV部分 交通模型	177
第10章 交通管理色灯中黄灯应亮多长时间?	178
1. 问题与模型	178
2. 求解	180
练习	181
参考文献	182
教师参考	182
第11章 利用流量理论研究交通管理色灯处的车队长度	183
1. 问题: 一个简单模型	183
2. 一个更好的模型	185
练习	187
参考文献	188
教师参考	189
第12章 顺序汽车模型	190
1. 引言	190
2. 实际顺序汽车情况的复杂性; 顺序汽车模型的简化	191
3. Pipes 模型	192
4. 有延迟的线性顺序汽车 [11,4]	198
5. 将Pipes模型并入线性顺序汽车	202
6. 线性顺序汽车理论的稳定性	203
7. 非线性顺序汽车规律	205
8. 稳定状态流	207
9. 结论	210

10. 附 录	211
练 习	219
参考文献	222
教师参考	223
第13章 平衡速度分布	225
1. 速度分布	225
2. 追 赶	227
3. 超 车	230
4. 平衡分布	231
练 习	232
参考文献	233
教师参考	234
第14章 交通流理论	235
1. 基本方程	235
2. 干扰的传播	238
3. 冲 撞	240
练 习	244
参考文献	245
教师参考	246
第V部分 相互制约类: 非线性系统的稳定态	247
第15章 在第一次世界大战期间, 为什么地中海的鲨鱼被 捕获的百分比惊人地上升	248
练 习	256
参考文献	257
教师参考	258
第16章 二次总数模型: 几乎没有任何循环性	259
1. 二次总数模型	259
2. 平衡的总数: 无循环	263
3. D'Ancona-Volterra模型: 完全循环	267
4. 稳定性	269
5. 哪一个模型?	270
练 习	272