同调代数

程福长　编著

广西师范大学出版社

同 调 代 数

程福长　编著

广西师范大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了同调代数的基本理论及其在环论中的应用，全书共八章，其内容分别是：模，范畴，函子，函子 Hom 与$\otimes$，模范畴的等价性与对偶性，导出函子，群的同调和上同调，局部同调代数.

本书可作为大学数学专业学生的选修课教材和研究生教材，也可供数学工作者参考.

同 调 代 数

程福长 编著

☆

广西师范大学出版社出版

广西新华书店发行

核工业中南310印刷厂印刷

•

开本787 ×1092 1/32 印张11 字数247 千字

1989 年6 月第1 版 1989 年6 月第1 次印刷

印数：0001 —2000 册

ISBN 7－5633－0167－4/O·004

定价：（平）4.50 元（精）6.50 元

序 言

同调代数是继代数拓扑发展而形成的一门新的代数理论，它不仅在群、环、李代数等代数学其它分支有着非常重要的作用，而且也是解决数学其它领域中的问题的有力工具.因此，国外许多新出版的近世代数教材中,包含同调代数的一些基本知识.

本书是在1980年自编同调代数讲义基础上，结合多年讲授同调代数教学实践，根据适用于自学和教学需要，经过多次修改与增删而成书.本书系统地介绍了同调代数的基本理论及其在环论中的应用，全书共分八章，其内容分别是:模，范畴，函子，函子Hom与⊗，模范畴的等价性与对偶性，导出函子，群的同调和上同调，局部同调代数.前五章主要讨论模的一些基本概念和基本理论，应用范畴和函子的方法来处理模论中的一些问题.这部分内容可以作为近世代数课程参考教材，或数学专业选修课教材，每周四节课一学期可以讲完.第六章导出函子是同调代数的核心部分.第七章介绍群的同调与上同调的最基本的概念与理论.第八章局部同调代数，主要是应用同调维数来研究局部环和半局部环的结构和分类，目的是为本科生或研究生进一步掌握同调代数专门理论打下基础.这三章每周三节课一学期可以讲完.本书每节末都配有一定数量的习题，书后附有参考书目.

北京师范大学数学系刘绍学教授，一直鼓励我编写一本

关于同调代数的书,对选材和编写提出了宝贵意见，在此表示感谢.

由于水平有限，书中一定会有不足之处，敬请读者批评指正.

作　者

1988年9月于广西师范大学

目　　录

第一章　模

环模的理论是近世代数的一个重要部分。在这一章里，我们主要介绍模的一些基本概念，并讨论几种常见的重要的模的基本性质．

1.1　模的概念

定义1　设Γ是一个有单位元1的环，A是加法群，如果还有一个运算$\Gamma \times A \to A$，运算结果记作 $\gamma\alpha$（$\forall\ \gamma \in \Gamma$，$\alpha \in A$），称为$\gamma$与$\alpha$的模积，且它满足以下条件：

（i）　$\gamma(a+b)=\gamma a+\gamma b$；

（ii）　$(\gamma+\lambda)a=\gamma a+\lambda a$；

（iii）　$(\gamma\lambda)a=\gamma(\lambda a)$；　　$\forall \gamma,\lambda \in \Gamma, a,b \in A$.

（iv）　$1a=a$

则我们称A为Γ上的左模，又称左Γ－模．

类似地，我们可以定义右Γ－模．

例1　设$\Gamma=\mathbf{Z}$（整数环），A是加法群．对$n \in \mathbf{Z}$和$a \in A$，na 就是元素a 的倍数，则A是左$\mathbf{Z}$－模．

例2　域K上每个向量空间V是一个左K－模．

例3　环Γ本身是左Γ－模，记作${}_{\Gamma}\Gamma$．

例4　设A是环Γ的左理想，则A是左Γ－模．

直接从定义可以得到左Γ－模A的一些简单性质：

1° $0a=0$，$\gamma 0=0$；

2° $\gamma(-a)=-\gamma a$，$(-\gamma)a=-\gamma a$；

3° $\gamma(\sum_{i=1}^{n}a_i)=\sum_{i=1}^{n}\gamma a_i$，$(\sum_{j=1}^{m}\gamma_j)a=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j a$

定义2 设A是左Γ-模，B是A的一个非空子集．如果

(i) $b_1+b_2\in B$，$\forall b_1, b_2\in B$；

(ii) $\gamma b\in B$，$\forall \gamma\in\Gamma$，$b\in B$．

则称B是A的一个**子模**

若B是左Γ-模A的子模，易知$b\in B$时,则$-b\in B$,因此B是加法群A的子群，从而B也是左Γ-模．反过来，若B是左Γ-模A的加法子群，且$\gamma b\in B$（$\forall\gamma\in\Gamma$，$b\in B$），显然，B是一个左Γ-模，同时，它也适合定义2中的两个条件，故B也是左Γ-模A的一个子模．

设$\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$是左$\Gamma$-模$A$的子模的族，即$\forall\alpha\in I$，$A_\alpha$是$A$的子模，这里指标集$I$可以是无限集，则$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$也是$A$的子模．若$X$是左$\Gamma$-模$A$的一个非空子集，则$A$的包含$X$的子模中必有一个最小子模，记作$\langle X\rangle$．这样便知$\langle X\rangle$是$A$的子模和$X\subseteq\langle X\rangle$，并且，若$B$是$A$的任一包含$X$的子模，必有$\langle X\rangle\subseteq B$．我们易知$\langle X\rangle=\bigcap A_\alpha$，这里$A_\alpha$是$A$的任一包含$X$的子模．同时，也不难证明

$\langle X\rangle=\{\sum^{f}\gamma_i x_i \mid x_i\in X,\ \gamma_i\in\Gamma\}$，$\Sigma$上的$f$表示有限和．

如果$\langle X\rangle=A$，则称A是由X生成的，而把X叫做A的一个**生成集**．如果X是有限的，且$\langle X\rangle=A$，则称A是**有限生成的**．如果A是由一个元素生成的，则称A为**循环模**．当A是循环模时，必有$A=\langle X\rangle=\Gamma x=\{\gamma x \mid \gamma\in\Gamma\}$，$x$是$A$的生成元．如果$X=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，$A_\alpha$是左$\Gamma$-模$A$的子

模，这时 $<X>$ 通常记为 $\Sigma_{\alpha\in I}A_\alpha$，把它叫做 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 的和。如果只是左 Γ－模 A 的有限个子模 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，我们记 $\Sigma_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$，易知 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \mid x_i \in A_i\}$．

设 A 是左 Γ－模，B 是 A 的一个子模．令 $\bar{A}=A/B$ 是加法群 A 关于子群 B 的商群．它的元素是陪集 $\bar{a} = a+B = \{a+b \mid b\in B\}$，两个元素相加 $(a_1+B)+(a_2+B)=(a_1+a_2)+B$，零元素为 B，而 $-(a+B)=(-a)+B$．若 $\gamma\in\Gamma$，我们规定

$$\gamma\bar{a}=\gamma(a+B)=\gamma a+B=\overline{\gamma a}, \tag{1}$$

则(1)是 $\Gamma\times\bar{A}\to\bar{A}$ 的一个运算，并且商群 $\bar{A}=A/B$ 连同运算(1)是一个左 Γ－模．我们把 A/B 称为左 Γ－模 A 关于子模 B 的商模，简称左 Γ－模 A 的商模．

最后，我们介绍双模的概念，这里谈到的模可以是左模，也可以是右模．

定义3　设 A 是 Λ－模又是 Γ－模，如果用 Λ 的任一元素作乘法（乘 A 的任一元素），与用 Γ 的任一元素一起作乘法时始终是可换的，则称 A 是 (Λ, Γ)－双模．

比如，A 是左 Λ－模又是右 Γ－模，且有

$$(\lambda a)\gamma=\lambda(a\gamma),\ \forall\lambda\in\Lambda, \gamma\in\Gamma, a\in A.$$

那么 A 是一个 (Λ, Γ)－双模，用 ${}_\Lambda A_\Gamma$ 表示它．

例5　每个 Γ－模皆是 $(\Gamma, \mathbf{Z})$－双模．

例6　设 Λ 是环 Γ 的中心，那么每个 Γ－模 A 皆是 (Γ, Λ)－双模．

例7　设 Γ 是一个环，令 $A=\Gamma$，则 A 是左 Γ－模又是右 Γ－模，且有

$$(\lambda a)\gamma = \lambda(\alpha\gamma), \quad \forall \lambda, \gamma, a \in \Gamma.$$

因此，A 是（Γ，Γ）-双模，即Γ本身是(Γ,Γ)-双模．

习　题

1　设A是左Γ-模，f是环Λ到Γ的一个同态．证明：若规定 $\lambda a = f(\lambda)a$　（$\lambda \in \Lambda$，$a \in A$），则A是左Λ-模．

2　设A是左Γ-模，$\Lambda = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma a = 0, \forall a \in A\}$．证明：

（i）　Λ是Γ的一个理想；

（ii）　若Δ是Γ的一个理想，$\Delta \subseteq \Lambda$，规定$(\gamma + \Delta)a = \gamma a$，则$A$是左$\Gamma/\Delta$-模．

3　设A是一个加法群．证明：只有一种方法能使A成为一个左$\mathbf{Z}$-模．

4　设A是左Γ-模，Λ是Γ的一个左理想，令$\Lambda A = \{\sum^{f} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \Lambda, a_i \in A\}$．证明：$\Lambda A$是$A$的子模．

5　设σ是环Γ到加法群A的自同态环End A的一个环同态．证明：若规定$\gamma a = \sigma(\gamma)(a)$　$(\forall \gamma \in \Gamma, a \in A)$，则$A$是左$\Gamma$-模．反之，设$A$是左$\Gamma$-模，$\gamma \in \Gamma$，证明映射$\gamma_L$：$a \mapsto \gamma a$　$(\forall a \in A)$是加法群A的自同态，而映射σ：$\gamma \mapsto \gamma_L$是环Γ到环End A里的同态．

6　设A是一个有限加法群，且$A \neq 0$，而$\mathbf{Q}$是全体有理数组成的数环，A能否构成一个左$\mathbf{Q}$-模？

1.2　模的同态

定义1　设A和B都是左Γ-模，σ是A到B内的一个映

射，且它满足以下条件:

（i） $\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$ ，$\forall a\in A, b\in B$；

（ii） $\sigma(\gamma a)=\gamma\sigma(a)$ ，　　　$\forall\gamma\in\Gamma, a\in A$.

则称σ 为A 到B 的一个**左Γ－模同态**,也称A 到B 的**Γ－同态**，记作σ ：$A\to B$ ，或$A\xrightarrow{\sigma}B$.

设σ 是A 到B 的Γ－同态,令$\mathrm{Ker}\sigma=\{a\in A\mid\sigma(a)=0\}$，把它叫做$\sigma$ **的核**；集合$\mathrm{Im}\sigma=\{\sigma(a)\mid\forall a\in A\}$称为$\sigma$ 的象. 我们易知$\mathrm{Ker}\sigma$ 与$\mathrm{Im}\sigma$ 分别为A与B 的子模，因而$B/\mathrm{Im}\sigma$ 和$A/\mathrm{Ker}\sigma$ 都是商模. 记$\mathrm{Coker}\sigma=B/\mathrm{Im}\sigma$ ，把它称为σ **的上核**；记$\mathrm{Coim}\sigma=A/\mathrm{Ker}\sigma$ ，把它称为σ 的上象.

定义 2　设σ 是A 到B 的Γ－同态,若$\mathrm{Ker}\sigma=0$，则称σ 为**Γ－单同态**；若 $\mathrm{Im}\sigma=B$ ，则称σ 为**Γ－满同态**，此时记作$A\sim B$ ，并称B 为A 的**同态象**；若σ 是满同态又是单同态，则称σ 为**Γ－同构**，此时记作$A\cong B$.

例 1　设B 是左Γ－模A 的一个子模,对任意$a\in A$，命π ：$a\mapsto a+B$ ，易知π 是A 到A/B 的Γ－满同态. 称这个同态为**左Γ－模A到其商模A/B 的自然Γ－同态**. 因此，A的商模是A 的同态象.

例 2　设Γx是一个循环模,$\Gamma=\Gamma 1$也是循环模. 对任意$\gamma\in\Gamma$，令 σ_x：$\gamma\mapsto\gamma x$ ，显然 σ_x是Γ 到Γx的一个满射，且

$$\sigma_x(\gamma_1+\gamma_2)=(\gamma_1+\gamma_2)x=\gamma_1 x+\gamma_2 x=\sigma_x(\gamma_1)+\sigma_x(\gamma_2) ,$$

$$\sigma_x(\lambda\gamma)=(\lambda\gamma)x=\lambda(\gamma x)=\lambda\sigma_x(\gamma),$$

这里λ ，γ ，γ_1 ，$\gamma_2\in\Gamma$. 因此，σ_x 是Γ 到Γx的Γ－满

同态．这时 $\operatorname{Ker}\sigma_x=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma x=0\}$，它是$\Gamma$的一个子模，也是$\Gamma$的一个左理想．我们称 $\operatorname{Ker}\sigma_x$ 为x 在Γ 内的零化子，用$\operatorname{Ann} x$ 表示它．

设 $\sigma_1: A\to B$，$\sigma_2: B\to C$ 是两个Γ- 同态(可以记为$A\xrightarrow{\sigma_1}B\xrightarrow{\sigma_2}C$)．对于任意 $a\in A$，因 $\sigma_2\sigma_1(a)=\sigma_2(\sigma_1(a))$ 是C 中唯一确定的元素，故 $\sigma_2\sigma_1$ 是A 到C 的映射．又有

$$\begin{aligned}\sigma_2\sigma_1(a_1+a_2)&=\sigma_2(\sigma_1(a_1+a_2))\\&=\sigma_2(\sigma_1(a_1)+\sigma_1(a_2))=\sigma_2(\sigma_1(a_1))\\&\quad+\sigma_2(\sigma_1(a_2))=\sigma_2\sigma_1(a_1)+\sigma_2\sigma_1(a_2),\\\sigma_2\sigma_1(\gamma a)&=\sigma_2(\sigma_1(\gamma a))=\sigma_2(\gamma\sigma_1(a))\\&=\gamma\sigma_2(\sigma_1(a))=\gamma\sigma_2\sigma_1(a),\end{aligned}$$

这里 $\gamma\in\Gamma$，$a,a_1,a_2\in A$．因此，$\sigma_2\sigma_1: A\to C$ 是左Γ- 同态，称它为$A\xrightarrow{\sigma_1}B$ 与$B\xrightarrow{\sigma_2}C$ 的合成，也称为 σ_2 与 σ_1 之积．可以直观地用右图来表示：把这个图称为一个**交换图**．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma_1"] \arrow[dr, "\sigma_2\sigma_1"'] & & B \arrow[dl, "\sigma_2"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

类似地，称由左Γ - 模和Γ- 同态组成的图 是**交换的**，如果$A\to B\to D$ 的合成与$A\to C\to D$ 的合成相等．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

一般来讲，一个由左Γ - 模和Γ- 同态组成的若干不同的方形和三角形的图叫做一个**交换图**，如果每个方形和三角形分支是交换的．

设A 与B 都是左Γ- 模，用$\operatorname{Hom}_\Gamma(A,B)$ 表示由A 到B 的所有Γ- 同态组成的集合．设$f,g\in\operatorname{Hom}_\Gamma(A,B)$，规定

$(f+g)(a)=f(a)+g(a)$，则$\mathrm{Hom}_\Gamma(A,B)$ 构成一个加法群．若Γ是交换环，且 $\gamma\in\Gamma$，规定$(\gamma f)(a)=\gamma(f(a))$，则$\mathrm{Hom}_\Gamma(A,B)$ 构成一个左Γ-模．

定理1 设$A_1\xrightarrow{\sigma}A_2$是$\Gamma$-满同态，$A_1'$是$A_1$的子模，且$A_1'\subseteq\mathrm{Ker}\,\sigma$，则存在唯一的$A_1/A_1'\xrightarrow{\bar\sigma}A_2$的$\Gamma$-满同态，使得$\sigma=\bar\sigma\cdot\pi$，这里$\pi$是$A_1$到商模$A_1/A_1'$的自然$\Gamma$-同态．

当且仅当$\mathrm{Ker}\,\sigma=A_1'$时，$\bar\sigma$是$A_1/A_1'$到$A_2$的$\Gamma$-同构．

证明 设 $a_1\in A_1$，命$\bar\sigma$：$\bar a_1=a_1+A_1'\mapsto\sigma(a_1)$．若$\bar a_1=\bar a_2$，则$a_2=a_1+a_1'$，$a_1'\in A_1'$．

$$\therefore\quad\bar\sigma(\bar a_2)=\bar\sigma(\overline{a_1+a_1'})=\sigma(a_1+a_1')$$
$$=\sigma(a_1)+\sigma(a_1')．$$

因$a_1'\in A_1'\subseteq\mathrm{Ker}\,\sigma$，故$\sigma(a_1')=0$．代入上式，得

$$\bar\sigma(\bar a_2)=\sigma(a_1)=\bar\sigma(\bar a_1)．$$

故$\bar\sigma$与陪集$\bar a_1$的代表元素的选择无关，从而$\bar\sigma$是A_1/A_1'到A_2的一个映射，易知$\mathrm{Im}\bar\sigma=A_2$．

其次 $\forall\ \gamma\in\Gamma$，$\bar a$，$\bar b\in A_1/A_1$，必有

$$\bar\sigma(\bar a+\bar b)=\bar\sigma(\overline{a+b})=\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$$
$$=\bar\sigma(\bar a)+\bar\sigma(\bar b)，$$
$$\bar\sigma(\gamma\bar a)=\bar\sigma(\overline{\gamma a})=\sigma(\gamma a)=\gamma\sigma(a)=\gamma\bar\sigma(\bar a)．$$

故$\bar\sigma$是A_1/A_1'到A_2的Γ-满同态．

任取$a\in A_1$，则有

$$\bar\sigma\cdot\pi(a)=\bar\sigma(\pi(a))=\bar\sigma(\bar a)=\sigma(a)，$$

因此 $\bar\sigma\cdot\pi=\sigma$．

现在，证$\bar\sigma$的唯一性．若存在另一个由A_1/A_1'到A_2的Γ-同态$\bar f$，使得$\bar f\cdot\pi=\sigma$且$\bar f\neq\bar\sigma$．那么至少存在一个元素 $a_1\in A_1$，使得$\bar f(\bar a_1)\neq\bar\sigma(\bar a_1)$．令$\sigma(a_1)=a_2$，则

$\bar{\sigma}\cdot\pi(a_1)=\sigma(a_1)=a_2$，而$\bar{f}\cdot\pi(a_1)=\bar{f}(\bar{a}_1)\neq$ $\bar{\sigma}(\bar{a}_1)=a_2$，这与$\bar{f}\cdot\pi=\sigma$矛盾.因此，$\sigma=\bar{\sigma}\cdot\pi$中的$\bar{\sigma}$是唯一的.

最后，若$A_1'=\mathrm{Ker}\,\sigma$，因$\bar{\sigma}(\bar{a})=\sigma(a)(a\in A_1)$，故$\bar{a}\in\mathrm{Ker}\,\bar{\sigma}\Leftrightarrow a\in\mathrm{Ker}\,\sigma=A_1'$，从而$\mathrm{Ker}\,\bar{\sigma}=0$，故$\bar{\sigma}$是$A_1/A_1'$到$A_2$的$\Gamma$-同构.

反之，若$\bar{\sigma}$是A_1/A_1'到A_2的Γ-同构，故$\mathrm{Ker}\,\bar{\sigma}=0$.任取$a\in\mathrm{Ker}\,\sigma$，则$\sigma(a)=0$.因此$\bar{\sigma}(\bar{a})=\sigma(a)=0$，故$\bar{a}\in\mathrm{Ker}\,\bar{\sigma}$，从而$\bar{a}=0$，所以$a\in A_1'$，于是$\mathrm{Ker}\,\sigma\subseteq A_1'$.但题设$A_1'\subseteq\mathrm{Ker}\,\sigma$，故$A_1'=\mathrm{Ker}\,\sigma$.

定理 2（同态基本定理） 设A是左Γ-模，则A的任一商模都是A的同态象. 反之，A的每个同态象A'都与A的一个商模是Γ-同构的.

证明 定理的前一半在本节例 1.中已经证明，而后一半，由于A'是A的同态象，即存在一个由A到A'的Γ-满同态，设为σ. 应用定理 1，则有$A/\mathrm{Ker}\,\sigma\cong A_1'$.

例 3 由本节例 2 知$\Gamma\xrightarrow{\sigma_x}\Gamma x$是一个$\Gamma$-满同态，且$\mathrm{Ker}\,\sigma_x=\mathrm{Ann}\,x$.由同态基本定理，$\Gamma x\cong\Gamma/\mathrm{Ann}\,x$. 若$\mathrm{Ann}\,x=0$，则$\Gamma x\cong\Gamma$.

例 4 设$A\xrightarrow{\sigma}A'$是Γ-满同态，A_1'是A'的子模，$A_1=\sigma^{-1}(A_1')=\{a\in A\mid\sigma(a)\in A_1'\}$，则$A_1$是$A$的子模，且$A/A_1\cong A'/A_1'$.

事实上，令$\pi:A'\to A'/A_1'$是自然Γ-同态，则$f=\pi\cdot\sigma$必是A到A'/A_1'的Γ-满同态.其次，设$a_1\in A_1$，由于$f(a_1)=\pi\sigma(a_1)=\pi(\sigma(a_1))=\overline{\sigma(a_1)}$，而$\sigma(a_1)\in A_1'$，故$f(a_1)=0$.因此，$a_1\in\mathrm{Ker}\,f$，即$A_1\subseteq\mathrm{Ker}\,f$.反之，设$a_1\in\mathrm{Ker}\,f$，

则$0=f(a_1)=\pi\sigma(a_1)=\pi(\sigma(a_1))$，故$\sigma(a_1)\in A_1'$，因此$a_1\in A_1$，即$\mathrm{Ker}\,f\subseteq A_1$．所以$A_1=\mathrm{Ker}\,f$．由同态基本定理，得$A/A_1\cong A'/A_1'$．

定理3 设$A\xrightarrow{\sigma}A'$是Γ-满同态，$A_1=\mathrm{Ker}\ \sigma$，B是A的子模，且$B\supseteq A_1$，则$B'=\{\sigma(b)\mid b\in B\}$是$A'$的子模，且$A/B\cong A'/B'$．

证明 显然B'是A'的非空子集．其次，设$\sigma(b_1)$，$\sigma(b_2)\in B'$，$\gamma\in\Gamma$，由于$\sigma(b_1)+\sigma(b_2)=\sigma(b_1+b_2)$，而$b_1+b_2\in B$，故$\sigma(b_1)+\sigma(b_2)\in B'$．又有$\gamma\sigma(b_1)=\sigma(\gamma b_1)$，而$\gamma b_1\in B$，故$\gamma\sigma(b_1)\in B'$．因此，$B'$是$A'$的子模．

其次，又由自然Γ-同态$A'\xrightarrow{\pi}A'/B'$和Γ-满同态$A\xrightarrow{\sigma}A'$，便知$A\xrightarrow{\pi\sigma}A'/B'$是$\Gamma$-满同态．令$\overline{\sigma}=\pi\sigma$，易证$B=\mathrm{Ker}\ \overline{\sigma}$．由同态基本定理，得$A/B\cong A'/B'$．

定理4 设A_1，A_2是左Γ-模A的两个子模，则$A_1+A_2/A_2\cong A_1/A_1\cap A_2$．

证明 对任意$a_1+a_2\in A_1+A_2$，令σ: $a_1+a_2\mapsto\overline{a}_1=a_1+A_1\cap A_2$．不难验证$\sigma$是由$A_1+A_2$到$A_1/A_1\cap A_2$的一个左$\Gamma$-满同态．若$a_1+a_2\in\mathrm{Ker}\sigma$，即$\sigma(a_1+a_2)=\overline{a_1}=0$，则$a_1\in A_1\cap A_2$，因此$a_1+a_2\in A_2$，于是$\mathrm{Ker}\sigma\subseteq A_2$．反之，若$a_2\in A_2$，则$\sigma(a_2)=\overline{0}=0$，故$a_2\in\mathrm{Ker}\sigma$，即$A_2\subseteq\mathrm{Ker}\sigma$．所以$A_2=\mathrm{Ker}\sigma$．由同态基本定理，得$A_1+A_2/A_2\cong A_1/A_1\cap A_2$．

定理5 设A_1，A_2，A_3是左Γ-模A的子模，且$A_1\supseteq A_2\supseteq A_3$，则$(A_1/A_3)/(A_2/A_3)\cong A_1/A_2$．

证明 对任意$a_1+A_3\in A_1/A_3$，令σ: $a_1+A_3\mapsto a_1+A_2$．不难验证σ是由A_1/A_3到A_1/A_2的一个左Γ-满同态，且$\mathrm{Ker}\sigma=A_2/A_3$．由同态基本定理，得$(A_1/A_3)/$