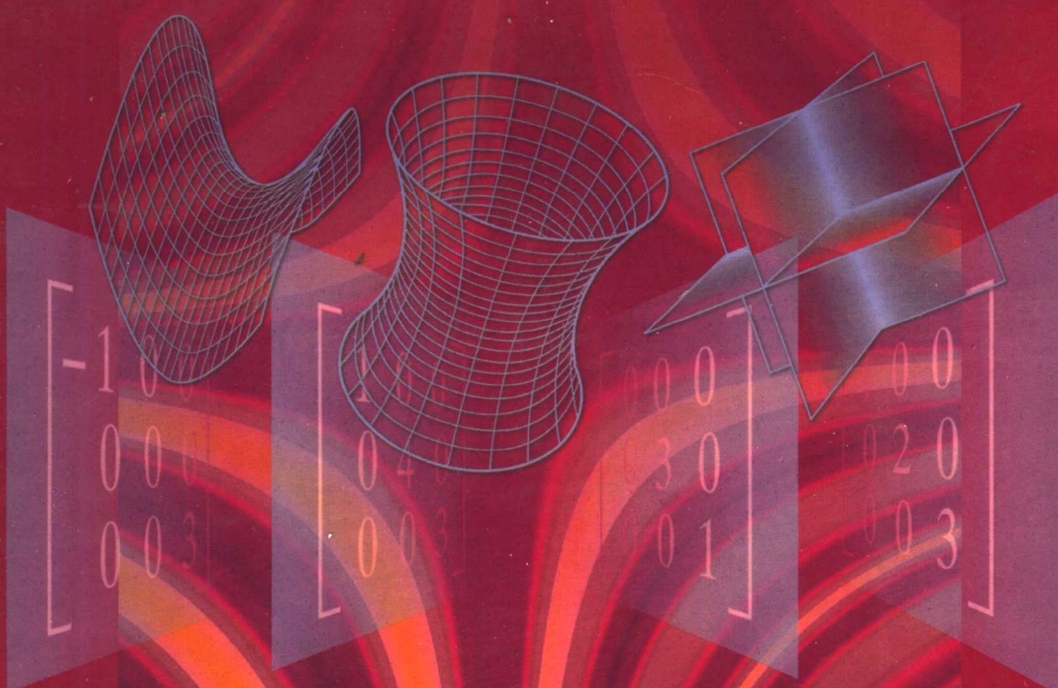
XIANXINGDAISHU YU JIEXIJIHE

线性代数与解析几何

刘春凤 徐秀娟 等 编著



冶金工业出版社

线性代数与解析几何

主　编　　刘春凤　徐秀娟
副主编　　米翠兰　李向东　万星火
　　　　　肖继先　田立平
主　审　　刘保相

北　京
冶　金　工　业　出　版　社
2000

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与解析几何/刘春凤等编著. —北京：
冶金工业出版社，2000.11
ISBN 7-5024-2702-3

Ⅰ.线… Ⅱ.刘… Ⅲ.①线性代数②解析几何
Ⅳ.①0151.2②0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 59290 号

出版人　卿启云（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）
责任编辑　谭学余　美术编辑　熊晓梅　责任校对　王永欣　责任印制　牛晓波
北京源海印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
2000 年 11 月第 1 版，2000 年 11 月第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16；12 印张；288 千字；184 页；1-7600 册
20.50 元
冶金工业出版社发行部　电话：（010）64044283　传真：（010）64027893
冶金书店　地址：北京东四西大街 46 号（100711）　电话：（010）65289081
（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

培养适应 21 世纪我国社会主义现代化建设需要的高质量专业人才，必需加强基础课中的数学，因为数学是各专业的重要基础课之一。不断改进、更新高等院校数学课程的教材势在必行。为了适应工科院校数学改革的需要，我们在阅读了国内外一些《线性代数》教材的基础上，结合高等工科院校线性代数教学基本要求和长期教学实践积累的经验，编写了这本教材。

《解析几何》的研究对象是用代数方法解决几何问题，而《线性代数》讨论的有限维线性空间源于二维、三维空间中的向量代数，又进一步抽象推广出来的。代数的诸多基础概念和方法都有很强的几何背景，所以《线性代数》和《解析几何》有着紧密的联系。该书将《线性代数》的基本内容和《解析几何》的主要内容有机地结合起来，目的是想通过它们之间的联系，使读者更好地掌握用代数方法和几何方法解决实际问题。

本教材的编写努力体现以下特点：引进概念力求自然，叙述概念力求深入浅出，清晰准确，定理的证明力求严谨而又简明易懂，选择例题力求典型，语言力求流畅，各章后都配有足够数量的习题，力求使读者更好地掌握解题的基本方法和技巧，培养他们应用数学工具解决实际问题的能力。

本教材按 48~56 学时编写，共分七章，可作为高等工科院校工程数学《线性代数》课程的试用教材或教学参考书。

由于我们水平有限，不妥或谬误之处，恳请读者批评指正。

编者

2000 年 5 月

目　录

第一章 行 列 式

行列式是由于解方程组的需要而建立起来的一个重要的数学工具。在初等代数中，为解二元、三元线性方程组，我们曾引入了二阶、三阶行列式。而实际问题中经常遇到求解更多变量的方程组 —— n 元线性方程组，为此我们在二阶、三阶行列式的基础上引进 n 阶行列式。本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及克莱姆法则。

第一节 排列和逆序数

为了定义 n 阶行列式，我们先介绍排列的概念和性质。

一、排列和逆序数

定义 1.1 把 n 个不同元素排成一列称为这 n 个元素的全排列（简称排列）。用 P_n 表示所有排列的种数。

例如，三个元素 1，2，3 组成六种排列 123，132，213，231，312，321。

即 $P_3=3\times2\times1=3\,!=6$。

一般地，把 n 个不同元素排成一列有几种不同排法？

从 n 个元素中取定一个放在第一个位置上有 n 种放法，又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上有 $n-1$ 种放法，如此下去，直到最后一个元素放在第 n 个位置上只有 1 种放法。即 $P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$。

为方便，将 n 个元素看成 n 个自然数，我们称在 $n!$ 种排列中从小到大次序的那个排列为自然排列（或标准排列），即 $12\cdots n$ 为自然排列。

定义 1.2 在一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数构成一个逆序。一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数。以后用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

例 1.1 排列 312 有 2 个逆序，即 31；32，所以 $\tau(312)=2$。

下面我们给出逆序数的计算方法：

在一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，设排在 j_i 前面比它大的数有 t_i 个，则称 j_i 的逆序数为 t_i，则这个排列的逆序总数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\sum_{i=1}^{n}t_i$。

例 1.2 计算 25314 的逆序数。

解 排在 2 前面且比它大的数为 0，因此 2 的逆序数为 0；5 的逆序数为 0；3 的逆序数为 1；1 的逆序数为 3；4 的逆序数为 1，所以 $\tau(25314)=0+0+1+3+1=5$。

定义 1.3 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。例 1.2

中排列 25314 为奇排列。

二、对换

定义 1.4 在排列中，将任意两个元素对调，其他元素不动，这种做出新排列的手续叫做对换。将相邻两个元素对换，称为相邻对换。

例 1.3 排列 25314 经过 2，3 对换变成排列 35214，容易计算$\tau(35214)=6$。

关于对换对排列奇偶性的影响有下面定理：

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性。即经过一次对换奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

证 （1）先证相邻对换情形。设排列$a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换$a$和$b$变为$a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然$a_1\cdots a_l$，$b_1\cdots b_m$在此对换下逆序数不变，故只需考虑$a$和$b$。若$a>b$，对换后$a$的逆序数不变，$b$的逆序数减少 1；若$a<b$，对换后$a$的逆序数增加一个，$b$的逆序数不变，所以排列$a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$与排列$a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$的奇偶性不同。

（2）一般情形。设排列$a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$把它做 m 次相邻对换后调成排列$a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换调成排列$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，总之，经过 $2m+1$ 次相邻对换排列$a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$调成排列$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反。

定理 1.2 任意一个n阶排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作的对换次数的奇偶性与排列的奇偶性相同。

证 对排列的阶数作数学归纳法：

当$n=1$ 显然，设对$n-1$阶排列结论成立，现考虑n阶排列的情形，设$a_1a_2\cdots a_n$是一个n阶排列，若$a_n=n$，则$a_1a_2\cdots a_{n-1}$是一个$n-1$阶排列，由假设它可经过一系列对换变成自然排列，因而$a_1a_2\cdots a_n$ 可经过一系列对换变成自然排列；若$a_n\neq n$，则在排列$a_1a_2\cdots a_n$中先对换a_n与 n，使$a_1a_2\cdots a_n$变成$a_1'a_2'\cdots a_{n-1}'n$这就归结为前面的情况，由前面结论可知排列$a_1a_2\cdots a_n$可经过一系列对换变成自然排列，由归纳原理，对任意的自然数结论成立。

由于$12\cdots n$是偶排列,且对换改变排列的奇偶性， 所以将一个偶(奇)排列$a_1a_2\cdots a_n$变成自然排列需要作偶(奇)次对换,既将$a_1a_2\cdots a_n$变成自然排列所作的对换次数的奇偶性与排列$a_1a_2\cdots a_n$的奇偶性相同。

第二节 n阶行列式

在讨论n阶行列式之前,我们先回顾一下二阶和三阶行列式的定义和结构。

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

我们看到二阶行列式和三阶行列式都是一些项的代数和,下面以三阶行列式为例来看一下这些代数和中各项的构成以及各项所带符号的确定有什么规律。容易看出:

（1）在（1）式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行，不同的列。

（2）在（1）式右边的正号项，负号项各占一半。（1）式的一般项可写成

$$a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3} \qquad (2)$$

这里第一个下标（行标）排成自然排列，第二个下标（列标）排成 $j_1j_2j_3$，它是 1，2，3 的一个排列，共有 6 种，对应（1）式右端 6 项。当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，（2）式前面带正号；当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，（2）式前面带负号。因此各项所带正负号可以写成 $(-1)^t$，其中 t 为 $j_1j_2j_3$ 的逆序数。总之 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1j_2j_3}(-1)^t\, a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3}$，这里 Σ 表示对 1，2，3 的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和。

通过以上对三阶行列式的分析，我们引入 n 阶行列式定义。

定义 1.5　设 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$，作出不同的行不同的列的 n 个数的乘积，并冠以 $(-1)^t$ 得到形如

$$(-1)^t\, a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (3)$$

的项，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 1，2，3，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数。这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如（3）式的项共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和 $\sum(-1)^t\, a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 n 阶行列式。记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为 $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^t a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$，所以 n 阶行列式还可以定义为：

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^t a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \tag{4}$$

其中 $t=\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$，$i_1 i_2\cdots i_n$ 是自然数 1，2，3，…，n 的一个排列，式中把列标排成一个自然排列。

例 1.4 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 由定义 1.5 知 $\sum (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的 a_{ij} 其下标应有 $j_1\leqslant 1, j_2\leqslant 2,\cdots,j_n\leqslant n$，所有排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 中能满足上述关系的只有一个排列 $123\cdots n$。所以 D 中只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为零，但 $t=\tau(123\cdots n)=0$，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

同理，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特殊地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

第三节 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，如果不利用数学软件计算行列式是很繁琐的。当行列式的阶数较大时，用定义计算行列式几乎是不太可能的事情。为了简化计算，需要讨论行列式的性质。

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为 D 的转置行列式。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

证 设 $D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，则 $b_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$。按行列式的定义，

$D^T=\sum(-1)^t b_{1j_1}b_{2j_2}\dots b_{nj_n}=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^t a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$。由定义 1.5 的等价定义知 $D^T=D$。

性质 1 说明，在行列式中，行与列的地位是一样的，对行成立的性质，对列也同样成立. 所以下面只讨论行列式关于行的性质。

性质 2 行列式的某一行中所有元素都乘以同一个数，等于用此数乘以这个行列式。或者说行列式的某一行有公因子可提到行列式符号的外面：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左端$=\sum (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=k\sum (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=$右端

推论 若行列式的某一行元素全为零，则行列式等于零。

性质 3 互换行列式的两行，行列式变号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左端$=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$。显然上式中每一项也是右端行列式中的项，因而左、右两端的行列式的展开式有相同的项。现在来看$a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$作为右端展开式的项，前面应带的符号，$a_{pj_p}$在右端行列式中位于第$q$行，$a_{qj_q}$在右端行列式中位于第$p$行，所以$a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$作为右端的项，它的行指标和列指标所成的排列是$1\cdots q\cdots p\cdots n$ 和$j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n$。于是它的前面应带的符号是$(-1)^{\tau(1\cdots q\cdots p\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$。所以，左端=右端。

推论 如果行列式有两行完全相同，则此行列式为零。

性质 4 如果行列式有两行成比例，则此行列式为零。

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\cdot 0=0$$

性质 5 若行列式的某一行的元素等于两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 左端$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$

=右端

性质 6 把行列式的某一行的各元素乘以同一个数然后加到另一行对应元素上去，行列式不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 由性质 4 和性质 5 可得：

$$
\text{左端}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+0=\text{右端}
$$

下面通过例子说明如何应用行列式的性质计算行列式。

例 1.5 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}
$$

解

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}\overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \end{vmatrix}=33
$$

为了注明每一步所作的变换，用 r_i 表示第 i 行，用 c_j 表示第 j 列，r_2+r_1 表示把第一行的各元素加到第二行对应元素上去。$r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换 r_i，r_j 两行，r_i+kr_j 表示把第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去。

注：在此例中，利用性质 2 和性质 6 将行列式化为上三角行列式来计算的方法，是计算数字行列式的基本方法。由于这个方法的计算过程完全规格化，故可在机上完成。对于阶数较高的数字行列式可利用计算机来完成。

例 1.6　计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

解　这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 $a+3$,今把第 2、3、4 行都加到第 1 行，提出公因子 $a+3$，然后各行减去第一行。

$$D=\begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)(a-1)^3$$

例 1.7　证明 $\begin{vmatrix} \alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ \alpha a_4+\beta b_4+\gamma c_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=0$

证　左端 $=\begin{vmatrix} \alpha a_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha a_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha a_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ \alpha a_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \beta b_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ \beta b_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \gamma c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ \gamma c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma c_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ \gamma c_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=0$

例 1.8　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}，\text{其中 } a_i\neq 0$$

解　从第二行开始作变换 $r_i\times\frac{1}{a_i}$，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \frac{c_1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{c_2}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c_n}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\ (a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i})$$

第四节 行列式按行（列）展开

一般来说，行列式的阶数越低越容易计算。因此，我们自然会想到能否把行列式化为一些阶数较低的行列式来计算？答案是肯定的。为此，我们引进余子式和代数余子式的概念。

定义 1.6 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列，由剩下的元素按原来的次序构成的 $n-1$ 阶行列式叫元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

例 1.9 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 A_{12},A_{23}。

解 $M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-3$

$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-3$

$M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}=-35$

$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-35$

引理 如果 n 阶行列式中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零（记作 B_{ij}），则这行列式等于 a_{ij} 与其代数余子式的乘积，即 $B_{ij}=a_{ij}\ A_{ij}$。

证 先看 $i,j=1$ 的情形，此时 $B_{11}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。由行列式的定义，当 $j_1 \neq 1$ 时，$a_{1j_1}=0$，故 $B_{11}=\sum(-1)^t a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{11}\sum(-1)^t a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，$t$ 为排列 $j_2j_3\cdots j_n$ 的逆序数。又 $\sum(-1)^t a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=M_{11}$ 且 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，从而 $B_{11}=a_{11}A_{11}$。

再看一般情形，此时 $B_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。将 B_{ij} 的第 i 行，与前（$i-1$）行依次对调，再将其第 j 列与前 $(j-1)$ 依次对调，得

$$B_{ij}=(-1)^{i-1+j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

定理 1.3 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于它的任意一行的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和。即 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$。

证 由行列式的性质 5 及引理，有 $D=B_{i1}+B_{i2}+\cdots+B_{in}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$，其中 $i=1,2,\cdots,n$；B_{ij} 的意义与引理中的相同。