高等学校数学学习辅导教材

高等数学
习题全解

（下册）

同济·高等数学（三、四版）

陈小柱 陈敬佳 编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学习题全解

（下册）

同济高等数学（三版、四版）

陈小柱　陈敬佳　编著
姜乃斌　主审

大连理工大学出版社

策划　刘杰

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解(下册)/陈小柱,陈敬佳编著．—大连:大连理工大学出版社,1998.12

ISBN 7-5611-1520-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．①陈…②陈…　Ⅲ．高等数学-解题
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 20937 号

大连理工大学出版社出版发行
(大连市凌水河　邮政编码 116024)
大连业发印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米　1/32　字数:330 千字　印张:11.625
印数:8001—20000 册
1998 年 12 月第 1 版　　1999 年 4 月第 2 次印刷

责任编辑:刘　杰　　责任校对:清　伶
封面设计:孙宝福

定价:12.00 元(上、下册共 24.00 元)

卷首赠言

著名教育家钱令希院士指出:“学习如同在硬木头上钻螺丝钉,开头先要搞正方向,锤它几下,然后拧起来就顺利了。否则钉子站得不稳不正,拧起来必然歪歪扭扭,连劲也使不上。求学之道慎起步啊!”

——摘自《中国科学院院士自述》

著名数学家北大教授姜伯驹院士指出:“高等数学最重要的概念是什么,有相当一部分同志对这个问题看法是:高等数学这个课程中最重要、最基本的概念是极限,我不是太赞成这个看法”,“你要说高等数学,那首先是微分、积分这些概念弄清楚,并且会用,我觉得高等数学的重点首先应该是这个”

——摘自《数学的实践与认识》1997.4

前言

高等数学课的重要性是众所周知的。在高等数学的教学过程中，正面临着一个无法回避却日益突出的矛盾：一方面，高等数学课的学时普遍减少，另一方面，期末考试、后续专业课程及考研对学生学习这门课又有较高的要求。

正是为了解决这一问题，我们编写了这本具有工具书性质的《高等数学习题全解》。

对于想更进一步学好高等数学这门课程的学生是大有益处的。

由于同济四版教材只对三版教材每章末增加了总习题，其它习题基本上沿用了第三版，故本书既适合三版的读者，也适合四版的读者。每道题我们都选用了较好的解题思路，但限于篇幅，一题多解的工作只好留给读者。

为了给尽可能多的读者提供便利，本书分上、下册。下册内容为：同济大学主编《高等数学》(下册)第三版习题全解、第四版下册总习题全解及考研资料。

本书由姜乃斌教授担任主审，参加审稿的有刘晓东教授及王志平副教授。

限于编者水平，加之时间仓促，不妥之处一定存在，希望广大读者提出批评和指正。

编　者

1998 年 10 月

目　录

第一部分

第二部分

总习题全解(同济四版)

第三部分

第八章　多元函数微分法及其应用

人生成功的秘诀是当机会来到时，你已经准备好了。

——迪斯累里

习题 8-1

1. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$。

解　$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-tx\cdot ty\cdot\operatorname{tg}\dfrac{tx}{ty}$

$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y)$$

2. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式：

$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$。

证明　$F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)$

$$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$$
$$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$$
$$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$$

3. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$。

解　$f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$

$$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$$

4. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；

(4) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

(5) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

(6) $z = \ln(y - x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

(7) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}$

$(R > r > 0)$;

(8) $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

解 (1) $y^2 - 2x + 1 > 0$,即函数的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}$$

(2) $x + y > 0,\quad x - y > 0$,即函数的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid x + y > 0,\quad x - y > 0\}$$

(3) 当 $4x - y^2 \geqslant 0$ 和 $1 - x^2 - y^2 > 0$ 且

$1 - x^2 - y^2 \neq 1$ 时函数才有定义,解得

$$D = \{(x,y) \mid y^2 \leqslant 4x,\quad 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

(4) 该函数的定义域为:

$$D = \{(x,y,z) \mid x > 0,\quad y > 0,\quad z > 0\}$$

(5) $y \geqslant 0,\quad x - \sqrt{y} \geqslant 0$ 即 $x \geqslant \sqrt{y}$,

亦即 $x \geqslant 0$ 且 $x^2 \geqslant y$, 函数定义域为

$$D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\quad y \geqslant 0,\quad x^2 \geqslant y\}$$

(6) **解** $y - x > 0,\quad x \geqslant 0,\quad 1 - x^2 - y^2 > 0$,函数的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid y - x > 0, x \geqslant 0,\quad x^2 + y^2 < 1\}$$

(7) **解** $R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$

$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 > 0$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 > r^2$

函数的定义域为

$$D = \{(x,y,z) \mid r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$$

(8) $x^2 + y^2 \neq 0$, 即 x, y 不同时为零,

且 $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leqslant 1$, 即 $z^2 \leqslant x^2 + y^2$,所以函数定义域为

$$D = \{(x,y,z) \mid z^2 \leqslant x^2 + y^2,\quad x^2 + y^2 \neq 0\}$$

5. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

解　(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)}$$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2$$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot 0=0$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty$$

6. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

证明 $\because x^2+y^2\geqslant 2|xy|$， 即 $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

$$\therefore \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}。$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，

当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时就有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$。

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(1) **证明** 如果动点 $P(x,y)$ 沿 $y=2x$ 趋向 $(0,0)$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x}{x-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{-x}=-3$

如果动点 $P(x,y)$ 沿 $x=2y$ 趋向 $(0,0)$

则 $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=2y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3y}{y}=3$，

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在。

(2) **证明** 如果动点 $P(x,y)$ 沿 $y=x$ 趋于 $(0,0)$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$；

如果动点 $P(x,y)$ 沿 $y=2x$ 趋向 $(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2}=0$$

所以极限不存在。

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处间断？

解 为使函数表达式有意义，需 $y^2-2x\neq 0$，所以，

在 $y^2-2x=0$ 处，函数

$$z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$$ 间断。

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$；　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$

(5) $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$；　　(6) $z=(1+xy)^y$

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　　(8) $u=\operatorname{arctg}(x-y)^z$

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$

(2) $$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\ln x+\ln y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln x+\ln y}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$$

同理　$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$$

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$$

$$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$$

根据对称性可知：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$$

(5) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{-x}{y^2}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y(1+xy)^{y-1}\cdot y = y^2(1+xy)^{y-1}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)} = e^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy) + y\cdot\frac{x}{1+xy}\right]$$

$$= (1+xy)^y\left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}\right]$$

(7) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{z}x^{(\frac{y}{z}-1)}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x$$

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$;　　$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$$

2. 设 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，　试证 $l\dfrac{\partial T}{\partial l} + g\dfrac{\partial T}{\partial g} = 0$

解　$\dfrac{\partial T}{\partial l} = \pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g\cdot l}}$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi\cdot\sqrt{l}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot g^{-\frac{3}{2}} = -\pi\cdot\frac{\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}$$

$\therefore$　$l\dfrac{\partial T}{\partial l} + g\dfrac{\partial T}{\partial g} = \pi\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}} - \pi\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 0$

3. 设 $z = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，　求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$。

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{x^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{y^2}$

$\therefore$　$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} + e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = 2z$

4. 设 $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，　求 $f_x(x,1)$。

解　$f_x(x,y) = 1 + \dfrac{y-1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}\cdot\dfrac{1}{y}$

$$f_x(x,1) = 1 + 0 = 1$$

5. 曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$，在点(2,4,5)处的切线与正向 x 轴所成的倾角是多

少？

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{4}=\dfrac{x}{2}$，　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=1=\mathrm{tg}\alpha$

故　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$。

6. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；

(2) $z=\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$；　　(3) $z=y^x$

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(4y^3-8x^2y)=-16xy$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$，　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，　求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，　$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$。

解　∵　$f_x=y^2+2xz$，　　$f_{xx}=2z$

$f_z=2yz+x^2$，　　$f_{zz}=2y$，　　$f_y=2xy+z^2$

$f_{xz}=2x$，　　$f_{yz}=2z$，　　$f_{zzx}=0$

∴　$f_{xx}(0,0,1)=2$，　　$f_{xz}(1,0,2)=2$

$$f_{yz}(0,-1,0)=0,\quad f_{zzx}(2,0,1)=0$$

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\dfrac{y}{xy}=\ln(xy)+1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$$

9. 验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$；

(3) $z=\ln(e^x+e^y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)^2=0$；

(4) $u=z\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证明 (1) $\dfrac{\partial y}{\partial t}=e^{-kn^2t}\cdot\sin nx\cdot(-kn^2)=-kn^2e^{-kn^2t}\cdot\sin nx$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2e^{-kn^2t}\cdot\sin nx$$

$$k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx\quad \therefore \frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

由于函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3};\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

因此 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{r^2-x^2}{r^3}+\dfrac{r^2-y^2}{r^3}+\dfrac{r^2-z^2}{r^3}$

$$=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^x(e^x+e^y)-e^x\cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$$

同理 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{2(x+y)}}{(e^x+e^y)^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^x\cdot e^y}{(e^x+e^y)^2}=-\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\frac{e^{2(x+y)}}{(e^x+e^y)^4}$$

所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)^2=0$

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{yz}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{-xz}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\arctan\frac{x}{y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}+0=0$

习题 8-3

1. 求下列函数的全微分。

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$;　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$

(3) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(4) $u=x^{yz}$

解 (1) 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$

所以 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

$$=\left(y+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y$$

(2) $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$