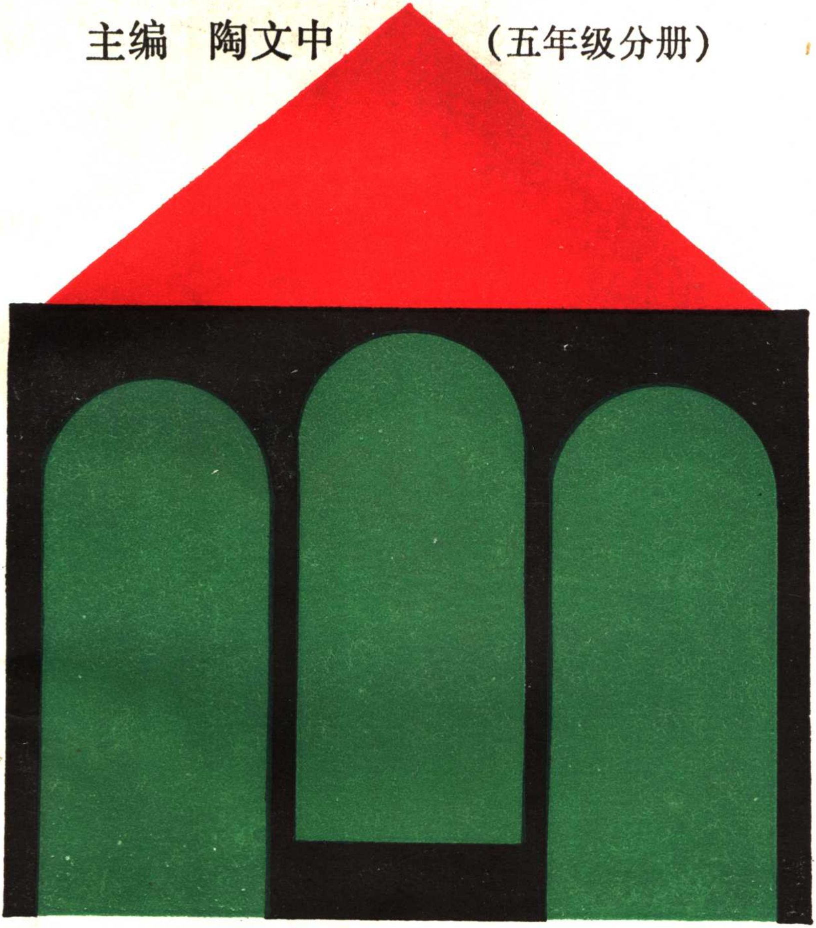
小学数学奥林匹克讲座及解题技巧

主编　陶文中

（五年级分册）



经济日报出版社

小学数学奥林匹克讲座及解题技巧

（五年级分册）

主　编　陶文中

副主编　揭　英　段　鹏

撰稿人　陶文中　于广兴　丁　捷

金宝铮　邓三慧　郎荣海

经济日报出版社

（京）新登字102号
责任编辑：王含

小学数学奥林匹克讲座及解题技巧
（五年级分册）
XIAO XUE SHU XUE AO LIN PI KE
JIANG ZUO JI JIE TI JI QIAO

陶文中　　主编
经济日报出版社出版
（北京市宣武区虎坊桥福州馆前街6号）
新华书店总店科技发行所发行
北京仰山印刷厂印刷
开本：787×1092毫米 1/32　6.875印张　120千字
1991年9月第一版　　1992年11月第二次印刷
印数：20001-46000册
ISBN7-80036-552-2/2G.132　定价：2.80元

前　言

近几年来，中小学数学奥林匹克热方兴未艾。从1986年开始的全国“华罗庚金杯”少年数学竞赛，已举办了三届，吸引了全国百余万中小学生参加。规模之大令人瞩目。一年一度的全国初中数学联赛和高中数学联赛，已成为衡量我国中学生数学奥林匹克竞赛水平的权威性考试。从小爱数学，从小赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助中小学生的数学奥林匹克学习，在今后的数学竞赛中取得更好的成绩，我们结合多年数学奥校辅导的经验，在整理竞赛辅导讲义的基础上，编写了《数学奥林匹克讲座及解题技巧》及《中学数学奥林匹克讲座及解题技巧》这两套课外读物。这两套丛书共六册，其中小学三册（四、五、六年级各一册），中学三册（初一、初二、初三各一册）。各册书紧密配合本年级的教学进度，选择基础性强、应用性广的重点教学内容作为专题。同时又根据数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型，新颖，注意广度和深度。例题讲解富有启发性，注重从方法上，从能力培养的角度上多方探究解题思路。每讲最后都有小结，便于读者掌握要领。同时还配备了一定数量的练习，并附提示与解答。

我们希望这两套丛书能为提高中小学生数学能力水平有所裨益。书中如有疏漏或错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1991年6月

目 录

第一讲　分数简算

回忆我们所进行的数的运算，主要依据两部分知识：一是数的运算法则，二是数的运算律。因此，数的运算过程，实际上就是数的推理过程。和其它推理相比，数的运算是一种最简单明了的推理。数的运算律，不但整数加法和乘法适用，到了分数加法和乘法同样也适用，以后数进一步扩张，也同样适用。因此，数的运算率是数运算中普遍具有的性质，我们把它叫做数的运算通性。进行数的运算，不但要算得对，而且还要算法简便，合理，这样才能算得快。能不能用简便合理的方法正确进行数的运算是衡量一个人的运算能力强不强的重要标志。下面我们将着重讲一讲如何用数的运算通性简算分数运算。简化思想是数学的基本思想。

一　分数的基本性质和运算律

1.　分数及其基本性质

分数的含义与特点

在小学数学里，我们已经知道，小数都可以化成分数，而且遇到两个自然数相除但除不尽时，商数就可以用一个分数表示出来，如：

$$6.5=\frac{65}{10}；\ 0.25=\frac{25}{100}；\ 3\div5=\frac{3}{5}\text{等等。}$$

并且，任一个分数，如$\frac{3}{5}$，$\frac{22}{7}$，$\frac{355}{113}$，$\frac{1}{2}$等，从形式

上，都是表示成两个自然数的比。因此，任意一个分数，我们都可以用字母的形式表示为

$$\frac{a}{b}\ \text{（或}\frac{c}{d}\text{，或}\frac{m}{n}\text{等。）}$$

其中，字母a、b、c、d、m、n等都表示任一自然数，$\frac{a}{b}$读作“b分之a”。

对于分数的含义和特点，我们作以下详细的分析：

$\frac{1}{2}$的特征性质就是$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}=1$；

$\frac{1}{3}$的特征性质就是$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=3\times\frac{1}{3}=1$；

$\frac{1}{4}$的特征性质就是$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{4}=1$；

以此类推，$\frac{1}{5}$，…，$\frac{1}{10}$，…，$\frac{1}{n}$的特征性质就是$5\times\frac{1}{5}=1$，…，$10\times\frac{1}{10}=1$，…，$n\times\frac{1}{n}=1$。

一般来说，对于任给的自然数a，b，（b>1），分数$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$的特征性质应该是：

$$\boxed{b\times\frac{a}{b}=b\times\left(a\times\frac{1}{b}\right)=a\times\left(b\times\frac{1}{b}\right)=a\times1=a}$$

例如，分数$\frac{3}{5}$，$\frac{12}{10}$，$\frac{17}{4}$的特征性质分别是：$5\times\frac{3}{5}=3$；$10\times\frac{12}{10}=12$；$4\times\frac{17}{4}=17$。

这就是说，分数$\frac{a}{b}$的特征性质是它与数b的乘积，正好等于a，换句话说，它是$b\times(\ ?\ )=a$的唯一答数。

从上面分数$\frac{a}{b}$的特征性质出发，我们可以进一步分析，得出下列几个常用的基本事实：

1. 对于任一个自然数或零m，可利用数1的特殊性，把m写成$\frac{m}{1}$。这时，也应有

$$1\times\frac{m}{1}=m$$

可见，自然数或零m就是满足分数$\frac{m}{1}$的特征性质$1\times\frac{m}{1}=m$的那个数。

因此，自然数和零可以说是分数的特例。

2. 对于任一个分数$\frac{a}{b}$，和另一个分数$\frac{ma}{mb}$，由于$\frac{a}{b}$也满足$\frac{ma}{mb}$的特征性质。

$$mb\times\left(\frac{a}{b}\right)=m\times\left(b\times\frac{a}{b}\right)=ma,$$

所以，

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}\quad(m\neq0)}$$

例如 $\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{3\times4}=\frac{9}{12}$。

同理，可以有

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\div n}{b\div n}\quad(n\neq 0)}$$

例如 $\frac{6}{8}=\frac{6\div 2}{8\div 2}=\frac{3}{4}$。

因此，分数有一个重要的基本性质：一个分数的分子、分母同时乘以或除以一个不为零的数，分数的值不变。

例如$\frac{6}{8}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$等。

分数的这个重要性质，是进行通分、约分及运算的主要依据。

3. 同分母的两个分数，只有在分子相等时，这两个分数才能相等。因为，在分子不相等时，这样两个分数的特征性质是各不相容的。例如，分数$\frac{3}{4}$不能满足$\frac{2}{4}$的特征性质：

$$4\times\left(\frac{3}{4}\right)=3\neq 2。$$

4. 当$m\times b=n\times a$时，$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$；反之，当$m\times b\neq n\times a$时，$\frac{a}{b}\neq\frac{m}{n}$。

这是由于：由$m\times b=n\times a$及事实2可得

$$\frac{a}{b}=\frac{n\times a}{n\times b}\neq\frac{m\times b}{n\times b}=\frac{m}{n}。$$

例如：

由于$2\times 7=14\times 1$，因而$\frac{1}{7}=\frac{2}{14}$；

由于$2\times7\neq3\times6$，因而$\frac{6}{7}\neq\frac{2}{3}$。

这就是说，只有当$m\times b=n\times a$时，$\frac{a}{b}$和$\frac{m}{n}$才是同一个分数的两种表达方式。

2. 分数的运算律

分数的四则运算，实质上都是归结为自然数的运算来进行的。但也要注意在分数运算中的特殊性，就是：应用基本性质进行通分，化为同分母（相同分数单位）的分数，才能进行加、减法。而且，四则运算的结果又必须应用基本性质进行约分，得到最简分数——分子，分母互质为止。

现在，用字母的算式把分数的运算法则总结如下：

加、减法

$$\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}}$$

如$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$，

$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$等。

乘法

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

如$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

除法

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$

如$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$。

分数运算，既然都是归结为自然数的运算，因此，不难说明分数运算也是满足运算律的。

例如：

分数加法的交换律是$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$。

说明：因为

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab + bc}{bd} \qquad \text{(分数加法法则)}$$

$$= \frac{bc + ad}{bd} \qquad \text{(自然数加法交换律)}$$

$$= \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd}$$

$$= \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \qquad \text{(分数的基本性质)}$$

所以$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{a} + \frac{a}{b}$

同样，分数运算中，加法结合律、乘法结合律、交换律以及乘法对加法的分配律、指数运算律都是正确的。

对运算律，要会顺用和逆用，尤其是乘法分配律，更应熟悉它的原表达式和逆表达式：

$$m(a + b + c) = ma + mb + mc$$

$$ma + mb + mc = m(a + b + c)$$

二　分数简算

1. 加法中的简算

分数加减法中，有一类计算常常出现几个分数的和恰为整数，这样我们依据加法运算律，把它们结合起来，先相加，得到整数，使运算得以简化，

例1　计算 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

这样想：观察算术特点，1分别减去$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$。而$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$，而1是一个整数，根据减法法则，一个数减去几个数的和等于这个数分别减去每一个加数，反过来，一个数分别减去几个数，等于这个数减去这几个减数的和。因为三个减数的和恰为整数，所以逆用减法法则较为简便。

解　$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$　　（减法法则）

$=1-\frac{3+2+1}{6}$　　（分数加法法则）

$=0$

也可以这样想：直接通分，化为同分母，分数相减。

解　$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

$=\frac{6-3-2-1}{6}$

$=0$

例 2　不求值比较$1991\frac{1989}{1990}+1990\frac{1988}{1991}$

和$1992\frac{1989}{1990}+1989\frac{1988}{1991}$的大小。

这样想，比较两个数a、b的大小，常用比较法。也就是作a、b两数的差（或商）如果$a-b>0$，那么说明$a>b$，如果$a-b=0$，那么，说明$a=b$。观察前后两个和中的分数的整数部分和分数部分。

解：
$$\left(1991\frac{1989}{1990}+1990\frac{1988}{1991}\right)-\left(1992\frac{1988}{1991}+1989+\frac{1989}{1990}\right)$$
$$=\left(1991+\frac{1989}{1990}+1990+\frac{1988}{1991}\right)-\left(1992+\frac{1988}{1991}+1989+\frac{1989}{1990}\right)$$
$$=\left[1991+1990-(1992+1989)\right]-\left[\frac{1989}{1990}+\frac{1988}{1991}-\left(\frac{1988}{1991}+\frac{1989}{1990}\right)\right]$$
$$=0$$

所以　$1991\frac{1989}{1990}+1990\frac{1988}{1991}=1992\frac{1989}{1990}+1989\frac{1988}{1991}$。

例 3 计算　$9.75-\left(5\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$

这样想：观察算式特点，减数有三项，其中$3\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

$=3\frac{3}{4}=3.75$。利用加法结合律、交换律可以简算。

解　$9.75-\left(5\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$

$=9.75-\left[5\frac{1}{3}+\left(3\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]$　（加法结合律）

$=9.75-\left(5\frac{1}{3}+3\frac{3}{4}\right)$　（分数加法法则）

$=9.75-\left(3\frac{3}{4}+5\frac{1}{3}\right)$　（加法交换律）

$=9.75-3\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}$

$=6-5\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{3}$。

例4　计算　$\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)$

解　$\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)$

$=1\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$

$=1\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\right)$

$=1\frac{1}{2}-1+0=\frac{1}{2}$

说明：我们在解例3、例4两题中，运算过程都写得很详细，把每一步变形都写出来了。实际上，如果我们运算熟练了，注意到算式的特点后，便可以直接写出结果，使计算时间大大缩短，提高运算速度。

2. 分数四则运算中的简算

例5 计算 $625\times379\times\left(\frac{4}{25}\times0.01\right)$

这样想：观察算式特点，625是$\frac{4}{25}$中分母25的倍数，依据分数乘法交换律和结合律，立刻可以得到积为整数100，这样运算就变得十分简便了。

解 $625\times379\times\left(\frac{4}{25}\times0.01\right)$

$=\left(625\times\frac{4}{25}\right)\times379\times0.01$（乘法交换律和结合律）

$=100\times379\times0.01$

$=(100\times0.01)\times379$ （乘法交换律和结合律）

$=379$

例6 $\left(\frac{11}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\times48$

这样想：观察算式特点，括号内有三个分数相加减，括号外的因数48，恰好是括号内三个分数的分母12，6，4的公倍数。这样依据乘法分配律用48分别与$\frac{11}{12}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{3}{4}$相乘，就可以化分数为整数了，比起先做括号内分数的加减法，要简便多了。

解　$\left(\frac{11}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\times 48$

$=\frac{11}{12}\times 48-\frac{5}{6}\times 48+\frac{3}{4}\times 48$

$=44-40+36$

$=40$

例 7 计算 $\left(\frac{11}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{48}$

这样想：观察算式特点，根据除法法则，除以一个数，等于乘以它的倒数，可以把除法运算转化为乘法运算，这道题实际上与例 6 相同。

解　$\left(\frac{11}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{48}$

$=\left(\frac{11}{12}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)\times 48$

$=44-40+36$

$=40$

例 8　$\left(1\frac{11}{24}-\frac{5}{6}+1\frac{3}{4}\right)\div 2\frac{1}{24}-1$

$=\left(\frac{35}{24}-\frac{5}{6}+\frac{7}{4}\right)\div\frac{49}{24}-1$

$=\left(\frac{35}{24}-\frac{5}{6}+\frac{7}{4}\right)\times\frac{24}{49}-1$

$=\frac{35}{24}\times\frac{24}{49}-\frac{5}{6}\times\frac{24}{49}+\frac{7}{4}\times\frac{24}{49}-1$

$=\frac{5}{7}-\frac{20}{49}+\frac{6}{7}-1$

$$=\left(\frac{5}{7}+\frac{6}{7}-1\right)-\frac{20}{49}=\frac{4}{7}-\frac{20}{49}=\frac{8}{49}$$

例9 计算 $4\frac{1}{5}\times\left(5\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}\right)\times\frac{15}{16}$

这样想：$4\frac{1}{5}$与$\frac{15}{16}$分母5与分子15可以相约化简，因此先做$4\frac{1}{5}\times\frac{15}{16}$。

解： $4\frac{1}{5}\times\left(5\frac{1}{3}-3\frac{1}{5}\right)\times\frac{15}{16}$

$$=\frac{21}{5}\times\frac{15}{16}\times\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{5}\right)$$

$$=\frac{63}{16}\times\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{5}\right)$$

$$=21-\frac{63}{5}$$

$$=8\frac{2}{5}。$$

例10 计算 $8\frac{1}{7}\times1\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times8\frac{1}{7}-8\frac{1}{7}$

这样想：算式中的三项中，都含有公因数$8\frac{1}{7}$，所以逆用乘法分配律，可以减少分数乘法的次数。同时，又注意到另一个因数有两个分母为8的同分母分数相加恰为整数2，这样运算就变得简捷了。

解： $8\frac{1}{7}\times1\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times8\frac{1}{7}-8\frac{1}{7}$