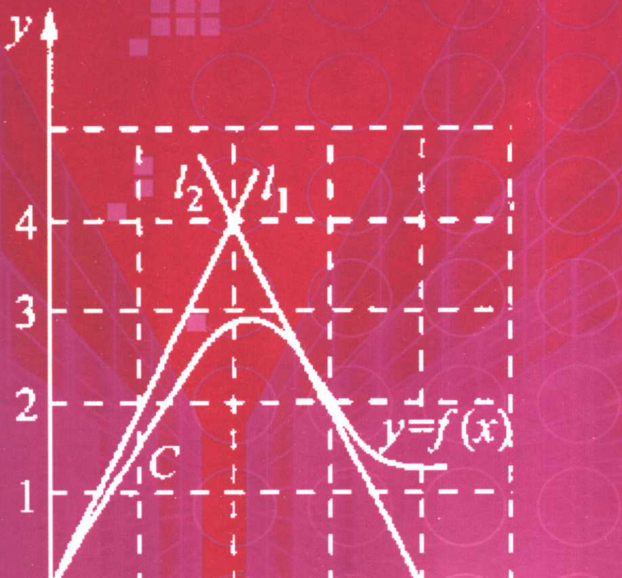
大学数学考研辅导系列

大学数学考研

试卷剖析

上海交通大学数学系 编



上海交通大学出版社

● 大学数学考研辅导系列

大学数学考研试卷剖析

上海交通大学数学系　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内容提要

本书是由上海交通大学数学系具有丰富考研辅导经验和对考研数学研究多年的教授编写的一本考研数学辅导书。书中汇集了自2000年到2005年共6年的全国硕士研究生入学考试数学试题(含工科类数学一、二和经济类数学三、四)。编者对每道试题均给出了精辟透彻的分析、准确详细的解答和精练独到的点评,以帮助广大考生“研究试题,掌握规律;学习解题,把握思路;复习重点,攻克难关”。

本书的读者主要是报考工科、经济类高等院校硕士研究生的考生,也可供一般本科生、大学数学教师学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学考研试卷剖析/上海交通大学数学系编.
上海:上海交通大学出版社,2005
(大学数学考研辅导系列)
ISBN 7-313-04142-X

Ⅰ.大… Ⅱ.上… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第099472号

大学数学考研试卷剖析

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

立信会计出版社常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销

开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:12.75 字数:362千字

2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷

印数:1—4 050

ISBN 7-313-04142-X/O·183 定价:20.00元

前　言

上海交通大学是我国“211 工程”和“985 工程”重点投资建设的百年高等学府，又是国家 6 个工科数学教学基地之一。“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”是上海交通大学的办学传统。多年来，学校注重本科教学，狠抓教学质量，对学生数学基础的要求和数学素质的培养在逐年提高。尤其引以自豪的是，自恢复高考后，在全国工科硕士研究生入学考试中，上海交通大学的考生(其中相当数量是上海交通大学的学生)的数学平均成绩，年年名列前茅。这些成绩的取得与上海交大数学系的名师参与，不落俗套、创新思路的教学是分不开的。

面对激烈竞争的考研形势，上海交通大学出版社组织数学系具有丰富考研辅导经验和对考研数学研究多年的教师，编撰了“大学数学考研辅导系列丛书”，其中《大学数学总复习》(共 2 册)偏重数学基础复习，本书则汇编了自 2000 年到 2005 年共 6 年的全国硕士研究生入学考试的全部数学试题(含工科类数学一、二和经济类数学三、四)。这些试题揭示出《考试大纲》对大学数学的知识基础、能力水平的测试要求，展现了命题构思、试卷结构和试题特色，蕴涵着大学数学的考点、重点、难点以及命题规律和近年的变化趋势。无论客观题还是主观题，本书对每道试题均给出了精辟透彻的分析、准确详细的解答和精练独到的点评，对大学数学的相关内容进行了深入的分析和归纳，力求揭示考研应试的技巧和规律。

编者对所有试题均作详细的解答，有的还给出了一题多解；不仅分析了试题的考查要求和相关的知识点，以帮助考生掌握如何复习，如何着手解题，而且归纳总结了试题的类型和基本解法；最后给出简洁扼要

的点评，力图起到画龙点睛、触类旁通、令你“茅塞顿开”的效果。

广大考生在复习迎考中可遵循这样的要领：研究试题，掌握规律；学习解题，把握思路；复习重点，攻克难关。熟悉考试内容和题型是考生考研成功的基础。本书的出版，为广大考生深入了解考研数学的题型、内容、要求、重点和难点提供了方便，有利于考生掌握实用有效的解题方法和思路，并可帮助考生全面领会数学考试的精髓和命题走势，把握复习要领。

本书由贺才兴教授主编并撰写了客观题部分内容，王铭和王纪林两位副教授分别撰写了微积分部分和线性代数、概率统计部分内容，于洁静、胡芬兰和李舰等同志也参加了编撰工作。本书不仅适用于数学考研，而且对广大本科生和大学数学教师，也能起到很好的指导作用。笔者希望本书的出版能确实给读者以帮助，真诚地祝愿广大考生“学习、突破、成功”。

因时间紧迫，本书难免有错误和疏漏之处，编者在此诚恳地希望广大读者提出宝贵的意见。

编　者

2005 年 8 月

于上海交通大学

目　录

2000 年全国硕士研究生入学考试数学试题

2001 年全国硕士研究生入学考试数学试题

2002 年全国硕士研究生入学考试数学试题

2003 年全国硕士研究生入学考试数学试题

2004 年全国硕士研究生入学考试数学试题

2005 年全国硕士研究生入学考试数学试题

2000 年全国硕士研究生入学考试数学试题

数学一试题(2000 年)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x =$ ________.

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为 ________.

(3) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为________.

(4) 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解,则 $a=$ ________.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)=$________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)$,$g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有 ( )

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

(2) 设 S: $x^2+y^2+z^2=a^2\,(z\geqslant 0)$,$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分,则有 ( )

(A) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S$.　　(B) $\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S$.

(C) $\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S$.　　　　(D) $\iint\limits_{S} xyz\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} xyz\,\mathrm{d}S$.

(3) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下列必收敛的级数为　　（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{u_n}{n}$.　　　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.　　　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

(4) 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\,(m < n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为　　（　　）

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 等价.

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为　　（　　）

(A) $E(X) = E(Y)$.

(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$.

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$.

(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$.

三、(本题满分 5 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

四、(本题满分 5 分)

设 $z = f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分 $I = \oint_L \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$，其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心、R 为半径的圆周 $(R > 1)$，取逆时针方向.

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间 $x>0$ 内任意光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

其中函数 $f(x)$在$(0, +\infty)$内具有连续的一阶导数，且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \text{求 } f(x).$$

七、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的敛散性.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体的重心位置.

九、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$在$[0, \pi]$上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$，$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0$，试证：在$(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

十、(本题满分 6 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，且

$$\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{E},$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

十一、(本题满分 8 分)

某试验性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，

然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工. 设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n和 y_n，记成向量 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{y}_n \end{bmatrix}$.

(1) 求 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{n+1} \\ \boldsymbol{y}_{n+1} \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{y}_n \end{bmatrix}$的关系式并写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{n+1} \\ \boldsymbol{y}_{n+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{y}_n \end{bmatrix};$$

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$时，求$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{n+1} \\ \boldsymbol{y}_{n+1} \end{bmatrix}$.

十二、(本题满分 8 分)

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0 < p < 1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$和方差 $D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)} & (x > \theta), \\ 0 & (x \leqslant \theta), \end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数. 又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

数学一试题分析、解答与点评(2000年)

一、填空题

(1) $\dfrac{\pi}{4}$.

分析 本题考查简单无理根式的定积分，只须利用换元积分法消去被积函数中的根号，即可求得结果.

解法一 令 $1-x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=-\cos t\,\mathrm{d}t$，得

$$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(1-x)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

解法二 令 $x=t^2$，则 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，得

$$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2t^2\sqrt{2-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{t=\sqrt{2}\sin u}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 u\cdot 2\cos^2 u\,\mathrm{d}u=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 u-\sin^4 u)\mathrm{d}u$$

$$=4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

点评 本题由定积分的几何意义可直接得到结果：

$y=\sqrt{2x-x^2}\,(0<x<1)$ 表示以 $(1,0)$ 为中心、1 为半径的上半圆周的左半部分，它与 $x=1$ 及 x 轴所围成部分的面积为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$.

分析 本题考查曲面的切平面和法线的概念，只须利用切平面的法线向量即可.

解法一 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则由

$$F_x = 2x,\ F_y = 4y,\ F_z = 6z$$

可得

$$F_x(1, -2, 2) = 2,\ F_y = (1, -2, 2) = -8,$$
$$F_z(1, -2, 2) = 12,$$

故所求法线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z-2}{12},$$

即

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}.$$

解法二 利用隐函数求导：

$$2x + 6z \cdot z_x = 0,\ 4y + 6z \cdot z_y = 0,$$

得

$$z_x = -\frac{x}{3z},\ z_y = -\frac{2y}{3z},$$

于是

$$z_x(1, -2, 2) = -\frac{1}{6},\ z_y = (1, -2, 2) = \frac{2}{3},$$

故所求法线方程为

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{6}} = \frac{y+2}{\frac{2}{3}} = \frac{z-2}{-1},$$

即

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}.$$

点评 多元微分学在几何中的应用主要是空间曲线的切线和法平面以及曲面的切平面和法线，必须掌握相关的概念及求法.

(3) $y = C_1 + \dfrac{C_2}{x^2}$.

分析 本题考查特殊的二阶微分方程通解的求法，即用降阶法化

为一阶方程来求解.

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，于是原方程化为

$$p'+\frac{3}{x}p=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{3}{x}\mathrm{d}x,$$

解得

$$y'=p=\frac{C_2'}{x^3},$$

故原方程的通解为

$$y=C_1+\frac{C_2}{x^2}.$$

点评 应熟练掌握三类可降阶微分方程：

$$y''=f(x),\ y''=f(x,y'),\ y''=f(y,y')$$

的特定的解法.

(4) -1.

分析 本题考查非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 解的判定问题：设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，若 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=n$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

若 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=\mathrm{r}<n$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

若 $\mathrm{r}(A)\neq\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解.

解 对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换，得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a+1)(a-3)&a-3\end{array}\right].$$

当 $a=-1$ 时，$\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，故方程组无解.

点评 这类方程组解的讨论问题若用 $|\boldsymbol{A}|$ 来进行，则容易出错，读者必须注意.

(5) $\frac{2}{3}$.

分析 本题考查随机事件的独立性及对立事件等概念.

解法一 由题意可知

$$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B),\ P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9},$$

得

$$P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B),\ P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9},$$

即

$$P(A)[1-P(B)]=[1-P(A)]P(B),$$

于是

$$P(A)=P(B),\ P(\overline{A})=P(\overline{B}),$$

故由 $P(\overline{A})=P(\overline{B})=\frac{1}{3}$，得 $P(A)=\frac{2}{3}$.

解法二 因为 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，即

$$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB),$$

所以 $P(A)=P(B)$，于是由

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=-P(A\cup B)=\frac{1}{9}$$

可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{8}{9},$$

即

$$[P(A)]^2-2P(A)+\frac{8}{9}=0,$$

得

$$P(A)=\frac{2}{3},\ P(A)=\frac{4}{3}\text{（舍去）}.$$

点评 A 与 B 相互独立等价地有 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B 及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均相互独立. 特别地，不能由 A 与 B 相互独立推导出 A 与 B 互斥. 事实上，当 A 与 B 相互独立时一定是相容的.

二、选择题

(1) A.

分析 本题考查利用导数判断函数单调性的概念.

解 因为

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$$

所以在 $[a, b]$ 内，$f(x)$ 单调递减，即当 $a<x<b$ 时，有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)},$$

即

$$f(x)g(b)>f(b)g(x).$$

点评 商的求导公式在本题的求解中是至关重要的.

(2) C.

分析 本题考查第一类曲面积分的对称性质：当被积函数关于某个变量具有奇偶性，且积分曲面对称于某一坐标平面时，第一类曲面积分具有对称性.

解 因为 x 是关于 x 的奇函数，曲面 S 对称于 $x=0$，所以 $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}S=0$；因为 y 是关于 y 的奇函数，曲面 S 对称于 $y=0$，所以 $\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S=0$；因为 xyz 是关于 x 的奇函数，曲面 S 对称于 $x=0$，所以

$$\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S=0.$$

而 $\iint\limits_{S_1} x\,\mathrm{d}S>0$，$\iint\limits_{S_1} xyz\,\mathrm{d}S>0$，故选项 A，B，D 均不成立.

因为 z 是关于 x 的偶函数；曲面 S 对称于 $x=0$，所以