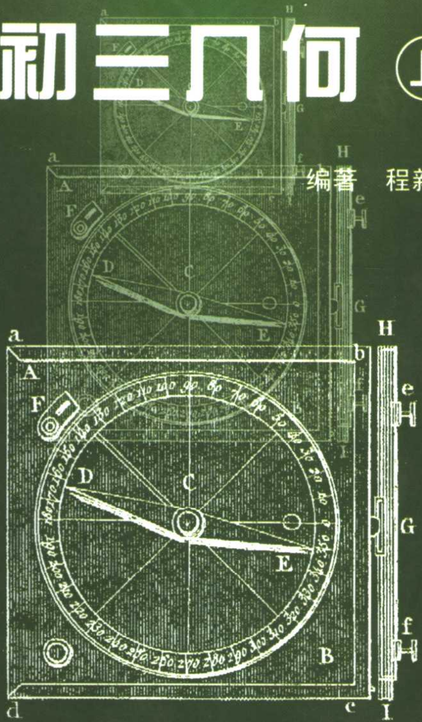
XINJINGJIANG

新精讲

NEW XINJINGJIANG 新理念·新设计·新形象

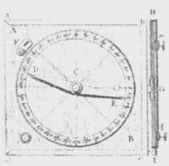
初三几何（上）

编著　程新林



JIHE

江苏教育出版社



新精讲

初三几何（上）

江苏教育出版社

编著 程新林

图书在版编目(CIP)数据

新精讲.初三几何.上/程新林编著.—南京:江苏教育出版社,2002.5

ISBN 7-5343-4428-X

Ⅰ.新... Ⅱ.程... Ⅲ.几何课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 030086 号

书　　名	**新精讲·初三几何(上)**
编　　著	程新林
责任编辑	杨光雄
出版发行	江苏教育出版社
地　　址	南京市马家街 31 号(邮编 210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京理工排版校对有限公司
印　　刷	丹阳教育印刷厂
厂　　址	丹阳市西门外(邮编 212300)
开　　本	880×1240 毫米　1/32
印　　张	4.875
插　　页	1
字　　数	130 000
版　　次	2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	1-9 000 册
书　　号	ISBN 7-5343-4428-X/G·4123
定　　价	6.40 元
邮购电话	025-5400774,8008289797
批发电话	025-3303538,3300420
盗版举报	025-3300952,6635549

说　明

在过去十年的教辅图书市场，我社的“精讲”丛书是一个闻名遐迩的品牌。这套丛书之所以成功，关键在于它文如其名，把“精”和“讲”作为最重要的两个特色。所谓“精”，是指它的作者队伍由一批江苏省著名特级教师组成，代表了教育大省江苏的最高教学水平；所谓“讲”，是指“精讲”借助于自己高水平的作者队伍，高屋建瓴，精心讲解，帮助学生消化、理解教学内容，提高自身能力。事实证明，这对学生是非常有好处的，学生称赞“课堂里听课搞不懂的问题，看精讲就能解决”，“买一本精讲，就像把特级教师请回家”。

进入新世纪，教育改革呈现日新月异的局面，现代化教育的理念日益深入人心。与以往相比，初、高中各学科的教学内容、教学要求都有了很大变化。根据这个情况，我社推出了“新精讲”丛书。同样文如其名，“新精讲”保留了老“精讲”丛书“精”和“讲”的特色，同时更加突出“新”。

对于这个“新”字，可以更具体地阐释为“新理念、新设计、新形象”9个字，这也是“新精讲”丛书最重要的特色。

“新精讲”诞生于新世纪之初。新世纪之初，教育改革正以前所未有的力度向前推进，而我们，包括我们最主要的读者——广大教师、学生，正身处一个日新月异的时代，不断地体验着新事物、新思想、新观点的冲击。因此，“新精讲”必须与现代化教育的要求接轨，与日新月异的时代接轨，这正是我们对“新精讲”丛书所持有的新理念。

在新理念的指导下，我们对整套丛书有了全新的设计。首先，我们有意识地对作者队伍进行了调整，选择了一批活跃在教学第一线，熟悉教育改革趋势的优秀中青年教师。为了找到最好的作者，语文、数学、化学学科还采取了公开登报招聘作者的方式。在丛书的内容设置方面，与以往相比，突出培养学生的创新能力和研究问题的能力，同时给学生尽可能多的练习机会。对于整套丛书的封面、版式、印制，我们也做了精心的设计，希望“精讲”这个老品牌能够有一副新面孔，能够吸引住新世纪读者的“眼球”。

有了新理念、新设计，我们相信，展现在广大读者眼前的“新精讲”会是一种全新的形象：它是由全国教育强省江苏省的一流名师倾力编写，全国名牌出版社江苏教育出版社精心打造，紧密切合新时代，体现现代化教育理念的精品教辅。这是我们的希望，更是我们近一年来辛勤工作、孜孜以求的目标！

江苏教育出版社

2002 年 6 月

目　录

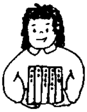
第六章　解直角三角形

第七章　圆

第六章 解直角三角形

一 锐角三角函数

6.1 正弦和余弦



理一理——学习目标

正弦和余弦的概念是本章的起点，是全章知识的基础，对今后的学习和工作都十分重要. 通过本小节的学习，我们要达到以下目标：掌握正弦、余弦的定义及表示法，熟记三个特殊角的正弦、余弦值，领悟从特殊到一般的思想方法.

讲一讲——知识剖析

锐角三角函数的概念贯穿全章，是全章乃至三角学的预备知识，因而它是本小节，也是全章的重点之一.

三角函数概念也是一个难点，因为其中隐含着角度与数值之间的对应关系的函数思想.

三角函数概念还是本小节的关键，因为只有正确理解这些概念，才能正确处理直角三角形中边、角之间的关系，才能正确地解直角三角形.

1. 正弦、余弦的概念

正弦、余弦的概念是对在直角三角形中的锐角而定义的.

如图 6-1，$\sin A = \dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$，$\cos A = \dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$.

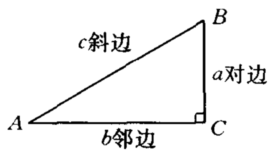


图 6-1

如果不注意这两个定义的前提“在直角三角形中”，就会出现差错.

例 1 在△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的对边分别是 a、b、c，且 $a:b:c=3:4:5$，求证：$\sin A+\cos A=\dfrac{7}{5}$.

我们先看一位同学的证法吧：

证明 设 $a=3k$、$b=4k$、$c=5k$.

$\because \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{3k}{5k}=\dfrac{3}{5}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{4k}{5k}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \sin A+\cos A=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{7}{5}$.

分析 上述证法看似无懈可击，但实际上是不完整的，因为只有当 $\angle C=90^\circ$ 时，才有 $\sin A=\dfrac{a}{c}$ 及 $\cos A=\dfrac{b}{c}$.

正确证法 设 $a=3k$，$b=4k$，$c=5k$，

则 $a^2+b^2=(3k)^2+(4k)^2=25k^2=(5k)^2=c^2$.

$\therefore$ △ABC 是直角三角形，且 $\angle C=90^\circ$.

$\therefore \sin A+\cos A=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{3k+4k}{5k}=\dfrac{7}{5}$.

2. 正弦、余弦值的范围

对于结论“$0<\sin A<1$，$0<\cos A<1$（∠A为锐角）”，我们既要会证，更要会用.

例 2 已知 α 是锐角，化简 $\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1}+\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1}$.

分析 两个被开方式恰好都是完全平方式，可以先去掉根号，然后再利用结论“$0<\sin\alpha<1$（α 为锐角）”去掉绝对值符号进行化简.

解 原式 $=|\sin\alpha-1|+|\sin\alpha+1|$.

$\because 0<\sin\alpha<1$（α 是锐角），$\therefore \sin\alpha-1<0$，$\sin\alpha+1>0$.

$\therefore$ 原式 $=(1-\sin\alpha)+(\sin\alpha+1)=2$.

例 3 已知 α 为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{a+3}{2}$，求实数 a 的取值范围.

分析 根据锐角余弦值的范围，可以列出关于 a 的不等式组，再解这个关于 a 的不等式组即可求出 a 的取值范围.

解 $\because 0<\cos\alpha<1$ (α 为锐角)，

$\therefore 0<\frac{a+3}{2}<1$，即 $\begin{cases}\frac{1}{2}(a+3)>0, \\ \frac{1}{2}(a+3)<1.\end{cases}$

解这个关于 a 的一元一次不等式组，得

$$-3<a<-1.$$

3. 特殊角的正弦值和余弦值

如图 6-2，借助一副三角板，根据锐角正弦、余弦的定义可以轻松地推算出特殊角的正弦值和余弦值.

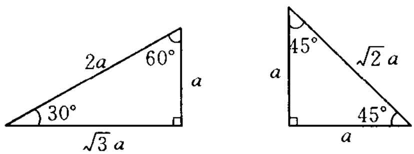


图 6-2

4. 正弦、余弦的本质

在直角三角形中，当锐角固定时，它的对边与斜边的比值以及邻边与斜边的比值也固定了. 因此，正弦、余弦的本质是两条线段的比.

显然，锐角度数与其正弦值、余弦值都形成一一对应关系. 因此，知道锐角的度数可以求出其正弦值或余弦值，反过来，知道一个锐角的正弦值或者余弦值可以求出锐角的度数.

例 4 解方程 $\sqrt{3}\sin 60^\circ+\sin 30^\circ+2x=1-\cos 60^\circ$.

分析 将题中正弦、余弦值代入原方程即得到同学们熟悉的一元一次方程.

解 将 $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ 代入原方程，得

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2x=1-\frac{1}{2}.$$

解这个方程,得 $x=-\frac{3}{4}.$

例 5 若 $4\sin^2\alpha-8\sin\alpha+3=0$,求锐角 α 的度数.

分析 已知等式可看做以 $\sin\alpha$ 为未知数的一元二次方程,因此可以先求出 $\sin\alpha$ 的值,再求锐角 α 的度数.

解 由 $4\sin^2\alpha-8\sin\alpha+3=0$,得

$$(2\sin\alpha-1)(2\sin\alpha-3)=0.$$

$\therefore 2\sin\alpha-1=0$ 或 $2\sin\alpha-3=0.$

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=\frac{3}{2}.$

$\because 0<\sin\alpha<1$, $\therefore \sin\alpha=\frac{3}{2}$ 应当舍去,

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2}$. $\therefore$ 锐角 $\alpha=30°$.

5. 互余两角的正弦、余弦之间的关系

若 α、β 都是锐角,且 $\alpha+\beta=90°$,则 $\sin\alpha=\cos\beta$, $\cos\alpha=\sin\beta$.

用语言可以表述为:任意锐角的正弦值(余弦值)等于它的余角的余弦值(正弦值).

这样,特殊角的余弦值可以化为正弦值去记忆了:$\cos 30°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45°=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2}$,可达到事半功倍的效果.

例 6 求 $\dfrac{1-\frac{1}{2}\sin 60°}{2-\cos 30°}$ 的值.

分析 因 $\cos 30°=\sin 60°$,所以可先将 $\cos 30°$ 换成 $\sin 60°$ 来寻求解题捷径.

解 原式 $=\dfrac{1-\frac{1}{2}\sin 60°}{2-\sin 60°}=\dfrac{2-\sin 60°}{2(2-\sin 60°)}=\dfrac{1}{2}.$

说明 将题中的两个特殊角换成互余的两个角，结果仍为$\frac{1}{2}$. 如

$$\frac{1-\frac{1}{2}\sin 20^\circ}{2-\cos 70^\circ}=\frac{1}{2}.$$

6. 同角(锐角)正弦、余弦之间的关系

同角(锐角)正弦、余弦之间存在着重要关系式：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1\ (A\text{ 为锐角}).$$

这就为我们计算、证明提供了方便.

例 7 如图 6-3，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，求证：$\sin^2 A+\sin^2 B=\sqrt{2}\sin\frac{A+B}{2}$.

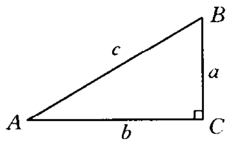


图 6-3

分析 $\sqrt{2}\sin\frac{A+B}{2}=\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ=1$，$\sin B=\cos A$，因此，利用同角正弦、余弦之间的重要关系式即可解决问题.

证明 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B=90^\circ$，

$\therefore \sin B=\cos A$.

$\because$ 左边 $=\sin^2 A+\cos^2 A=1$，

右边 $=\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，

$\therefore$ 左边 $=$ 右边，

$\therefore$ 原式成立.

点一点 思路方法

1. 构造法在本小节及今后的学习中大有其用武之地

所谓构造法就是根据题设条件和题目的要求的特点构造适当的数学模型，去解决数学问题的方法.

例 8 已知$\angle A$为锐角，且 $\sin A=\frac{2}{3}$，求 $\cos A$ 的值.

分析 构造一个直角三角形,使$\angle A$为其一个内角即可以求出$\cos A$的值.

解 如图 6-4,构造一个 Rt$\triangle ABC$,使$\angle C = 90^\circ$, $BC : AB = 2 : 3$.

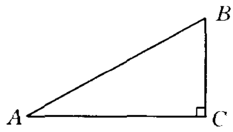


图 6-4

则 $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2}{3}$.

设 $BC = 2k$, $AB = 3k$, 则 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5}k$.

$\therefore \cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}k}{3k} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

说明 利用结论"$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ (A 为锐角)"也可以求出$\cos A$的值.

例 9 如图 6-5,在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, D 为 AC 的中点,求 $\sin\angle ABD$ 的值.

分析 $\angle ABD$ 所在的$\triangle ABD$不是直角三角形中,因此需要构造直角三角形,使$\angle ABD$为其一个内角.考虑到D为AC中点这一条件,过点D作AB的垂线为好.

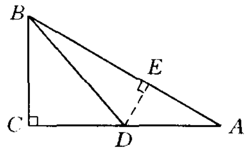


图 6-5

解 过 D 点作 $DE \perp AB$, 垂足为 E.

设 $CD = DA = a$. $\because \angle A = 30^\circ$, $\therefore DE = \dfrac{1}{2}a$.

$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\because$ Rt$\triangle AED \backsim$ Rt$\triangle ACB$,

$\therefore \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$, $\therefore BC = \dfrac{DE \cdot AC}{AE} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}a$.

$\therefore$ 在 Rt$\triangle BDE$ 中,可得 $\sin\angle ABD = \dfrac{DE}{DB} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

说明 构造法再一次显示了它的魅力.若过 A 点作 AB 的垂线与 BD 的延长线相交或过 A 点作 BD 的垂线与 BD 的延长线相交也

能求出 $\sin\angle ABD$ 的值.

2. 锐角的正弦、余弦作为工具还能为解决几何证明题作出贡献

例 10 已知:如图 6-6,CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 边上的高.

求证:$BC^2 = AB \cdot BD$.

分析 这是初二几何第 243 页的练习题.当时是通过证三角形相似的办法得出结论的.

下面的证法简单明了.

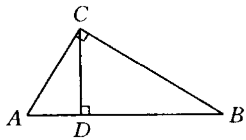


图 6-6

证明 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\cos B = \dfrac{BC}{AB}$,

在 Rt$\triangle BCD$ 中,$\cos B = \dfrac{BD}{BC}$.

$\therefore \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BD}{BC}$,$\therefore BC^2 = AB \cdot BD$.

A 组

1. 在$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$. 若 $2a = \sqrt{3}c$,那么$\angle A$ 等于 ( )

   (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

2. 下列式子中不成立的是 ( )

   (A) $\sqrt{2}\cos 45° = 2\sin 30°$ (B) $\sin 30° \cdot \cos 60° = \dfrac{1}{2}\sin^2 45°$

   (C) $\cos 45° - \sin 45° = 0$ (D) $\sin 60° = \sin 30° + \sin 30°$

3. 若 Rt$\triangle ABC$ 的三边都扩大到原来的 5 倍,则锐角 B 的正弦值和余弦值 ( )

   (A) 都扩大到原来的 5 倍 (B) 都保持不变

   (C) 不能确定大小 (D) 都是原来的$\dfrac{1}{5}$

4. 已知 a、b、c 是 Rt$\triangle ABC$ 的三边，c 为斜边，a、b 是方程 $x^2-7x+12=0$ 的两个根，则 $\sin A\cdot\sin B$ 的值为 (　　)

(A) $\frac{25}{12}$　　(B) $\frac{12}{25}$　　(C) $\frac{1}{12}$　　(D) $\frac{1}{7}$

5. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\cos B=\frac{4}{5}$，则 $AC:BC:AB$ 等于 (　　)

(A) $3:4:5$　(B) $4:3:5$　(C) $3:5:4$　(D) $5:3:4$

6. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，

(1) $\angle A$ 的对边是____，$\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{(\quad)}{AB}=\frac{1}{(\quad)}$；

(2) 若 $BC=4$ cm，则 $AB=$__ cm，$\frac{BC}{AB}=$__，$\sin A=$__；

(3) 若 $AC=\sqrt{3}$ cm，则 $BC=$__ cm，$\frac{BC}{AB}=$__，$\sin A=$__.

7. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\frac{BC}{AB}$叫做$\angle A$ 的______，记作______. $\frac{AC}{AB}$叫做$\angle A$ 的________，记作________. $\cos A$ 的取值范围是________，$\sin A$ 的取值范围是________.

8. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=\sqrt{5}$，$AC=1$，则 $\sin A=$____，$\cos B=$____，$\cos A=$____，$\sin B=$____.

9. 计算：

(1) $\frac{1-\cos 60°}{\sin 60°}\cdot\frac{\cos 30°}{\sin 30°}$；　　(2) $\frac{\cos 60°}{1+\cos 45°}-\frac{\cos 60°}{\cos 45°}$；

(3) $2\cos 30°-4\cos 45°+6\sin 60°$；

(4) $2\sin^2 45°-\cos 30°\cdot\sin 60°$.

10. 求锐角 α：

(1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $2\cos\alpha=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^0$；

(3) $\cos\alpha=\sin 60°$；　　(4) $\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$.

11. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c，且 $a:c:b$

$=5:13:12$，求 $\sin A$ 及 $\cos B$ 的值.

12. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$AC=8$，求$\triangle ABC$ 的周长和面积.

13. Rt$\triangle ABC$ 的周长为 12，一个锐角的余弦值为$\dfrac{3}{5}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

14. 一个角的余角比它的补角的一半小 15°，求这个角的余弦值.

15. 关于 x 的方程 $x^2-\cos\alpha\cdot x+\dfrac{1}{8}=0$ (α 为锐角)有两个相等的实数根，求 α 的大小.

B 组

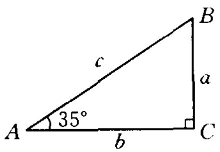
16. 已知 Rt$\triangle ABC$ 的两条边的长是方程 $x^2-7x+12=0$ 的根，则 Rt$\triangle ABC$ 中较小内角的正弦值为 (　　)

(A) $\dfrac{3}{5}$　　(B) $\dfrac{4}{5}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　(D) $\dfrac{3}{5}$或$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

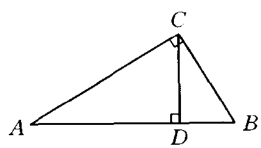
17. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=35^\circ$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别是 a、b、c，则下列式子中错误的是 (　　)

(A) $a=c\cdot\sin 35^\circ$　　(B) $b=c\cdot\sin 55^\circ$

(C) $a=c\cdot\cos 35^\circ$　　(D) $b=c\cdot\cos 35^\circ$



(第 17 题)



(第 18 题)

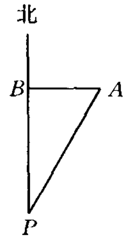
18. 如图，CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 边上的高，则 $\sin A=\dfrac{(\quad)}{(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{(\quad)}$.

19. 已知 α 为锐角，求证：

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$;

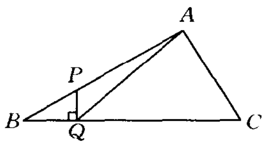
(2) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$.

20. 如图,一只船以每小时 16 海里的速度自东向西航行,上午 8 点到达灯塔 P 的北偏东 30° 的 A 处,10 点钟到达灯塔的正北方 B 处,求这时船到灯塔的距离.

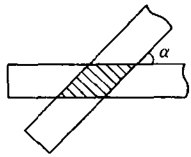


(第 20 题)

21. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=30^\circ$,P 为 AB 上一点,且 $BP:PA=1:2$,$PQ\perp BC$ 于 Q,连结 AQ,求 $\cos\angle AQC$ 的值.



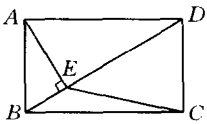
(第 21 题)



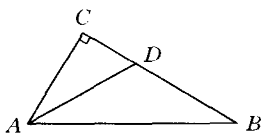
(第 22 题)

22. 如图,两个宽度为 1 的纸条交叉重叠在一起,若交角为 α,求图中阴影部分的面积.

23. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$BC=2$,$AE\perp BD$ 于 E,$\angle BAE=30^\circ$,求 $\triangle ECD$ 的面积.



(第 23 题)



(第 24 题)

24. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$AC=2\sqrt{5}$,$\angle CAB$ 的平分线交 BC 于 D 点,且 $AD=\frac{4}{3}\sqrt{15}$,求 $\angle B$ 的正弦值和余弦值.

25. 在 $\triangle ABC$ 中,a、b、c 分别是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边,且 $c=5\sqrt{3}$. 若关于 x 的方程 $(5\sqrt{3}+b)x^2+2ax+5\sqrt{3}-b=0$ 有两个相等的实数根,方程 $2x^2-(10\sin A)x+5\sin A=0$ 的两实数