

///

● 谈庆明 著

量纲分析

*Dimensional
Analysis*

Dimensional Analysis

中国科学技术大学出版社

量纲分析

谈庆明 著

中国科学技术大学出版社

2005·合肥

内容简介

量纲分析是一门非常值得研究和学习的知识，它是探讨科学规律，解决科学和工程的一个有效的工具。熟练掌握量纲分析应当是科学和技术工作者应有的基本训练。

本书内容包括：量纲分析的基本概念；量纲分析在熟知的力学现象中的应用；量纲分析在某些经典的力学问题中的应用以及郑哲敏先生的研究集体近三四十年中在爆炸力学诸多的应用实例等几个部分。

图书在版编目（CIP）数据

量纲分析/谈庆明著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2005.8
ISBN7-312-01803-3

I. 量… II. 谈… III. 量纲分析 IV. O303

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 066871 号

中国科学技术大学出版社 出版发行

（安徽省合肥市金寨路 96 号，邮政编码：230026）

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本：850×1168/32 印张：6.125 字数：150 千

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—3000 册

ISBN7-312-01803-3/O·310

定价：15.00 元

序

谈庆明研究员的专著今天由中国科学技术大学出版社出版了。这将是一本会受广大读者欢迎的专著，也是对我国科技教育文献的一个重要补充。

量纲分析是一门值得提倡的知识，因为正如作者所说的那样，它是探讨科学规律，解决科学和工程问题的一个有效的工具。熟练掌握量纲分析应当是科学和技术工作者应有的基本训练。因此，我认为出版这本书是很有意义和及时的。

本书突出的特点之一是列举而且详细介绍了量纲分析在力学领域里多方面的应用。从形式上看，量纲分析的原理和方法似乎很简单，其实不然，因为量纲分析实际上是一种观察和思考问题的观点。需要了解充分的实例并经过自身的实践才能真正掌握它。

在讲述量纲分析时，作者采用了以自变量表述因变量的途径，突出了物理现象的因果关系，也是很有特色的。许多介绍量纲分析的书，往往不区分自变量和因变量而径直地使用量纲分析。这样做原则上并不错，但是由于物理图像不够清楚，量纲分析给出一堆无量纲参数，往往使人不得要领。因变量和自变量选择和识别需要一定的物理思考和判断，这是做好量纲分析的重要前提。量纲分析方法的创造性运用源于对事物本质的深刻理解。

谈庆明先生多年来，以量纲分析为题，在中国科学院力学研

究所、中国科学技术大学、北京大学、北京理工大学等多次为研究生开课，受到了同学们的好评。所以说这本书的内容是经过作者锤炼的。作者又是量纲分析理论和应用的实践者，书中一些例子来自他本人的科学研究，他的亲身体会给了这本书特有的深度。

我十分高兴，这本书现在出版了。我愿意把它推荐给力学领域的研究生和科技工作者，相信大家会从中受益。

郑 哲 敏

2005年4月

写在前面

在大学的最后一年，我的导师林鸿荪先生特地告诉我们班的同学，说量纲分析这一分析方法非常有用。可惜，我们虽然是新中国成立后的第一个力学专业的学生，老师并没有给我们较完整地讲授过量纲分析的内容，只是在讲到粘性流体力学的内容时，简单地提到一个与之有关的无量纲数——雷诺数。

走上工作岗位后不久，量纲分析逐渐成为我研究工作须臾离不开的分析问题的方法。特别是面临复杂问题，不知道数学模型和方程的时候，只能从解剖问题的基本物理出发，用量纲分析判断问题的性质及其控制参数，设计实验，在反复实验的过程中，整理出反映主要物理量之间的定量关系，从而解决实际问题。

尽管量纲分析十分有用，但是环顾我国的大学和研究生院的课程设置，很少院校把它当作一门课程来开设，更缺乏一本可作为大学高年级和研究生学习用的教科书。这也许值得当今高等教育改革深思和改进的一个问题。

20 世纪 70 年代，当时的第一机械工业部部长沈鸿先生下了很大决心，组织了大批资深教授和工程师，编写了大型工具书《机械工程手册》，约请郑哲敏先生主编该手册基础卷的第三篇《相似理论与模化》。1996 年出版了手册的第二版，对该篇的内容做了较多增补。当然，手册主要是提供工程技术人员查阅使用，也可以作为学生学习的参考书，但毕竟不是教材。

近几年来，笔者在中国科学院力学研究所、中国科学技术大学、北京大学和北京理工大学讲授“量纲分析”一课，引起听众的强烈兴趣，许多学生和老师热切希望笔者将讲授内容写书出版。

特别是，最受我尊敬的李佩和郑哲敏两位先生多次督促和鼓励我写成教科书。于是，笔者在讲稿的基础上，勉力试笔，写成此书。鉴于笔者的经验和水平有限，缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

本书的内容包括：量纲分析的基本概念；在熟知的力学现象中的应用；在某些经典的力学问题中的应用；以及郑哲敏先生的研究集体在近三、四十年中在爆炸力学诸多方面的应用等几个部分。

讨论采用案例分析的方法。通过对类型广泛的问题的分析，说明方法的实质，换句话说，就是：在对问题进行中肯的物理分析的基础上，对因果关系作出恰当的量纲分析，达到对问题的规律性的认识。讨论只涉及和求助于最基本的物理知识，不需要高深的数学。本书的对象是物理和工程专业的学生以及相关的科学和工程技术人员。

阅读本书建议参考以下两本书，作者从中获益良多：

1. Седов Л И . Метод Подобия и Размерности в Механике.
Москва: Наука, 1965
2. Lin C C, Segel L A. Mathematics Applied to Deterministic Problems in Natural Sciences. New York: Macmillan Publ. Co., Inc., 1974

谈庆明

2005年4月

目 录

序	(I)
写在前面	(III)
第 1 章 绪 论	(1)
1.1 量纲分析是分析和研究问题的有力手段和方法	(1)
1.2 物理量的度量	(2)
1.3 量纲: 有量纲量和无量纲量	(3)
1.4 基本量和导出量	(3)
1.5 单 摆	(4)
1.6 量纲分析的实质	(6)
1.7 量纲分析的简史	(7)
第 2 章 基本原理	(9)
2.1 量纲的幂次表示	(9)
2.2 Π 定理	(12)
2.3 自变量和基本量的选择	(14)
2.4 相似律	(17)
2.5 运用 Π 定理的注意点	(18)
第 3 章 流体力学问题	(20)
3.1 典型流动	(20)
3.2 流体力学问题中的相似准数 ^[13]	(39)
3.3 其他相似准数	(41)
3.4 流体运动的分类	(43)
第 4 章 固体力学问题	(45)

4.1	弹性体的应力分析和简单结构的稳定性分析.....	(45)
4.2	弹性体的振动和波动	(54)
4.3	弹塑性体的应力分析	(59)
4.4	固体的拉伸断裂	(70)
第 5 章	固体中的热传导与热应力	(75)
5.1	固体中的热传导	(75)
5.2	弹性体内的热应力	(79)
第 6 章	流固耦合问题	(84)
6.1	水 击	(84)
6.2	弹性轴承	(88)
6.3	机翼的颤振	(90)
6.4	热交换器的气激振动	(91)
第 7 章	流体弹塑性体模型	(93)
7.1	流体弹塑性体模型	(94)
7.2	化学炸药的爆炸效应问题中的相似参数.....	(96)
7.3	高速冲击问题中的相似参数	(97)
第 8 章	爆炸相似律	(99)
8.1	空中爆炸波和水中爆炸波	(100)
8.2	爆炸加工	(110)
8.3	爆 破	(120)
第 9 章	冲击相似律	(130)
9.1	杆式穿甲弹	(130)
9.2	破甲——聚能射流的形成及其对装甲的侵彻.....	(132)
9.3	碎甲层裂	(138)
9.4	超高速冲击	(139)
9.5	金属射流与薄板的高速扩张断裂.....	(141)
9.6	煤与瓦斯突出——两相耦合介质动力学现象.....	(145)

第 10 章 数学模拟规整化	(152)
10.1 函数的规整化	(152)
10.2 代数方程的规整化	(155)
10.3 常微分方程的规整化	(157)
10.4 偏微分方程的规整化	(160)
参考文献	(168)
主题索引	(172)
外国人名索引	(185)

第1章 绪论

1.1 量纲分析是分析和研究问题的有力手段和方法

自然现象和工程问题都可用一系列的物理量来进行描述。研究现象或问题的目的是寻求规律。首先，需要把问题所涉及的物理量按属性进行分类；其次，需要找出不同类物理量之间具有什么样的相互联系；进一步找出某些物理量与另外一些物理量之间所存在的因果关系。

特别是在研究新现象或新问题的时候，需要对现象和问题中蕴涵的物理环节、关系和过程进行初步的中肯的分析，运用物理学中的基本规律，明确有哪些参数对现象或问题起到控制作用，分析这些参数的作用孰轻孰重，并注意到只有同类的物理量才能比较大小。在上述前提下，进一步分析讨论和确定因果关系，从而在数学上给出尽量明确的函数关系。

有些现象或问题的研究，可以借助或采用现成的物理和数学模型和方程；然而，更多的复杂现象或问题，无法利用现成的数学方程来表述，这时，更有需要采用量纲分析的方法来分析问题，设计合适的模型实验来暴露和揭示问题的物理实质，从而明确因果联系。我国的知名科学家钱学森先生，在1980年出版的《土岩爆破文集》“写在前面”^[1]中，有这样的一段话：“由于爆炸力学要处理的问题远比经典的固体力学或流体力学要复杂，似乎不宜一下子想从力学基本原理出发，构筑爆炸力学理论。近期还是靠小

尺寸模型实验，但要用比较严格的无量纲分析，从实验结果总结出经验规律。这也是过去半个多世纪行之有效的力学研究方法。”他的这段话，不但适用于爆炸力学的问题，同样适用于所有其他领域的复杂问题。

应该指出，运用量纲分析方法必须和对问题的基本物理内涵的中肯分析结合起来。分析越深入，结论越有用。这就需要研究者具有较为丰富的经验以及适当的机敏。当然，也需要进行多次试探和修正，最终得到符合实际的满意的结果。

1.2 物理量的度量

物理规律是通过实验或理论，对有关物理量的数据进行分析 and 综合得到的。它的正确性则由它的推论是否符合实验或观测而求得验证。

在对规律的认识过程中始终离不开对物理量的度量。度量某一个物理量，就意味着以一定方式将该量与一个取作单位的同类量相比较。例如，在度量某一物体的长度 L 时，我们可取另一个长度 L_0 作为单位，加以比照，得到某物的长度 L 的量值 l ，可以记为 $L/L_0=l$ ，或 $L=lL_0$ 。显然，任何度量都不可能绝对精确，都具有一定的误差。度量的精度取决于采用什么样的度量技术和工具，以及度量者度量时的仔细程度。一般，可以估计出误差的大小 Δl （习惯取正值）。

对于任何一个物理量 A ，如取单位为 U ，度量得到的量值为 a ，而其实际量值为 a_0 ，误差为 Δa (>0)，则可以表示为

$$A = aU,$$

而且有

$$a = a_0 \pm \Delta a \quad \text{和} \quad a/a_0 = 1 \pm \Delta a/a_0。$$

如果需要对两个量值 a 和 b 进行四则运算，而且已知

$$b = b_0 \pm \Delta b \quad \text{和} \quad b/b_0 = 1 \pm \Delta b/b_0,$$

则有

$$\begin{aligned} a+b &= (a_0+b_0) \pm (\Delta a + \Delta b) \quad \text{和} \quad (a+b)/(a_0+b_0) = 1 \pm (\Delta a + \Delta b)/(a_0+b_0), \\ a-b &= (a_0-b_0) \pm (\Delta a + \Delta b) \quad \text{和} \quad (a-b)/(a_0-b_0) = 1 \pm (\Delta a + \Delta b)/(a_0-b_0), \\ a \cdot b &= (a_0 \cdot b_0) \pm (|a_0| \Delta b + |b_0| \Delta a) \quad \text{和} \quad (a \cdot b)/(a_0 \cdot b_0) = 1 \pm (\Delta a/|a_0| + \Delta b/|b_0|), \\ a/b &= (a_0/b_0) \pm (|a_0| \Delta b + |b_0| \Delta a)/b_0^2 \quad \text{和} \quad (a/b)/(a_0/b_0) = 1 \pm (\Delta a/|a_0| + \Delta b/|b_0|). \end{aligned}$$

1.3 量纲：有量纲量和无量纲量

为了辨识某类物理量和区分不同类物理量的方便起见，人们采用“量纲”这个术语来表示物理量的基本属性。例如长度、时间、质量显然具有不同的属性，因此它们具有不同的量纲。物理量总可以按照其属性分为两类。一类物理量的大小与度量时所选用的单位有关，称之为有量纲量，例如长度、时间、质量、速度、加速度、力、动能、功等就是常见的有量纲量；另一类物理量的大小与度量时所选用的单位无关，则称之为无量纲量，例如角度、两个长度之比、两个时间之比、两个力之比、两个能量之比等。

对于任何一个物理问题来说，出现在其中的各个物理量的量纲或者是由定义给出，或者是由定律给出。

1.4 基本量和导出量

在一个物理问题中，总可以把与问题有关的物理量分成基本量和导出量两类。基本量是指具有独立量纲的那些物理量，它的量纲不能表示为其他物理量的量纲的组合；导出量则是指其量纲可以表示为基本量量纲的组的物理量。

1.5 单摆

为了简单有效地说明：怎样运用量纲分析的方法来分析问题，从而揭示问题的物理实质，明确其中的因果关系，我们不妨讨论单摆这样一个简单例子（参见图 1.1）。

单摆是由细绳的一端悬挂着的一个具有一定质量的物体，细绳的另一端是固定不动的，而且细绳的质量 m 比悬物的质量小得多而可忽略不计，细绳的变形比绳长 l 小得多也可忽略不计。当悬物从铅垂的自然状态，沿半径为 l 的圆弧挪动到初始方位角 α ，然后放开，物体将在重力的作用下作周期性的振荡。显然，单摆的周期 T_p 取决于 4 个控制参数，即悬物的质量 m 、细绳的长度 l 、重力加速度 g 以及初始方位角 α ，于是有以下函数关系：

$$T_p = f(m, l, g, \alpha)。$$

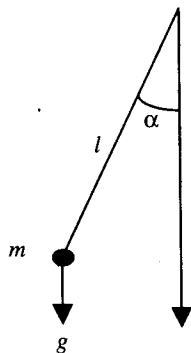


图 1.1 单摆

显然，这里描写的是一个简单的力学系统，在函数 f 的自变量中，有三个量纲独立的基本量，即 m 、 l 和 g ，它们的量纲分别是质量、长度和加速度。在上述函数关系中的 α 为角度，其定义是两个

长度之比；而因变量 T_p 的量纲是时间，可以表示为基本量 l 和 g 的量纲的组合，即(长度/加速度) $^{1/2}$ ，所以 α 和 T_p 都是导出量。

我们可以把 m, l 和 g 取作本问题的基本单位系统，用来度量问题中的所有物理量，根据上述函数关系，就有

$$T_p / (lg)^{1/2} = f(1, 1, 1, \alpha)。$$

这说明 $T_p / (lg)^{1/2}$ 只随 α 的变化而变化，即 $T_p / (lg)^{1/2}$ 是 α 的函数，可以写为

$$T_p / (lg)^{1/2} = f_1(\alpha)。$$

为了方便起见，我们干脆把上式右端 f_1 的下标“1”去掉，而写成

$$T_p / (lg)^{1/2} = f(\alpha) \quad \text{或} \quad T_p = (lg)^{1/2} f(\alpha)。$$

只不过要记住，这里的 $f(\alpha)$ 只表示 $T_p / (lg)^{1/2}$ 是 α 的某个函数，而 $f(\alpha)$ 并不等于前面的 $f(m, l, g, \alpha)$ 。以后，我们还要不断采用这样的不带下标的 f ，用来表示因变量和自变量之间所存在的函数关系，而不特指函数 f 的具体形式。

现在，我们可以得出下面几个结果：

- (1) T_p 正比于 $l^{1/2}$ ；
- (2) T_p 反比于 $g^{1/2}$ ；
- (3) T_p 与 m 无关；
- (4) T_p 只取决于 α ， $f(\alpha)$ 的具体形式要用实验或理论分析来求取。

如果我们不用量纲分析的办法，直接采用实验来决定 $T_p = f(m, l, g, \alpha)$ 的具体形式，而又如果对于每个自变量，都做大小不同的 10 次实验，那么总共要做 10^4 次实验；然而，用了量纲分析，只要做 10 次实验来确定 $f(\alpha)$ 就够了，节省了 9990 次实验，好处太明显了。

如果初始方位角 α 是个小量，即 $\alpha \ll 1$ ，那么情况就更简单了。我们可以从物理上判断， $f(\alpha)$ 实际上是 α 的偶函数，将 $f(\alpha)$ 在 $\alpha=0$

处作泰勒展开，就有

$$f(\alpha) = f(0) + f'(0) \cdot \alpha + \frac{f''(0)}{2!} \alpha^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \alpha^4 + \dots \cong f(0),$$

于是近似有

$$T_p = (l/g)^{1/2} f(0).$$

那么，现在只要做一次实验来确定常数 $f(0)$ 的数值就行了，这个常数数值其实就是从理论上可以导出的 2π 。

1.6 量纲分析的实质

单摆的例子虽然简单，但是在建立模型和导出结论的过程中，已经体现了量纲分析的精神实质，主要有两点内容，即：

1. 只有同类量才能比较其大小

在建立单摆这个理想化的模型中，这一原则体现在几个重要的假设之中。例如，假设细绳的质量和摆锤的质量相比可以忽略不计；假设细绳的变形和绳长相比可以忽略。其实，还有一个假设，那就是假设摆锤在运动过程中所受到的空气阻力和所受的重力相比可以忽略。

2. 物理现象和物理规律与所选用的度量单位无关

最简单的例子可以举几何图形。就说一个三角形，它总有三条边： l_1, l_2 和 l_3 。不管观察者离开它的距离是远是近，观察到的形状总是相似的，或者说，在不同的距离上看到的形状属于同一个类别。为了区别这个三角形和别的三角形在形状上是否属于同一个类别，可以选择这个三角形的某一条边作为单位，譬如选 l_1 作单位，去度量 l_2 和 l_3 ，就得到另外两条边的大小，即 l_2/l_1 和 l_3/l_1 ，这两个无量纲量正好能刻画这个三角形的类别，它们不随观察者距离的远近而改变。至于三角形的面积 A ，则可用 l_1^2 作为单位来度量，于是面积的大小是 A/l_1^2 ，这一数值也不随观察者距离的远

进而改变。

上述辨识几何图形类别的方法，也可以推广用来辨识物理现象的类别和认识物理问题的规律。当然，和几何图形不同，描述物理现象或问题的物理量，除了长度以外，还有时间、质量等其他属性的物理量。我们总可以在控制这类物理现象或问题的物理量中，选定一组物理量作为基本量，并取作单位系统，用以度量这类现象中的任何物理量，这样得到的该物理量的大小数值不仅是无量纲的，而且的确反映这类现象的本质。进一步说，如果在反映问题的物理规律或因果关系中，所有自变量和因变量都采用上述度量方法得到的无量纲的数值，那么这样得到的反映无量纲的因变量与自变量之间的因果关系，也必然客观地反映了这类现象的本质。

1.7 量纲分析的简史

历史上最早可以回溯到1822年，J. B. J. Fourier^[2]将“量纲”这个概念从几何学推广到物理学的范畴。他说，换了单位，不仅某量的量值变了，与该量有关的量的量值也跟着变。

半个世纪后，人们开始注意采用模型实验来了解和预测真实运动的性质及特征物理量的数值。1883年，O. Reynolds^[3]运用量纲分析的原则，分析和整理模型实验的数据后指出，为区分水管中的水流属于比较有规则的层流还是相当杂乱的湍流，不能只看流速的大小，而应该以一个无量纲数 $\rho v d / \mu$ 为依据（其中 ρ 和 μ 各为流体的密度和粘性系数， d 为管径， v 为平均流速），后人称之为雷诺数，记为 Re 。当 Re 从小增大到某个临界值，水流即从层流转变为湍流。Reynolds这种对物理问题的分析方法，即将多个影响因素综合为一个无量纲的比值，以此作为判断同一问题中出现