

算學叢書

古算法之新研究

許蒹舫編

中華書局印行

編輯大意

(1)是書可供初中三年級及高中一、二年級作補充教材或參考之用。

(2)是書擷取古算學之精華，以代數及幾何學之原理，爲之詳釋或證明，說理務求淺顯，凡習過代數二次方程及幾何相似形比例者，閱之諒能了解。

(3)我國古算之書，大都但具術文，而不詳其得術之由，是其最大缺點。後人之所以蔑視國算，甚且不知有國算者，此其一大原因也。是書所有一切解釋證明，均爲著者數年來研究之心得，自信或尙無乖舛謬誤。至編制方面，因匆促脫稿，恐不免斟酌欠善，尙希閱者諸君有以正之。

(4)夫研究國算者，當先知國算之源流。故是書於每章之首，必先略加敘述，惟以限於篇幅，尙不能言之詳盡，學者倘欲深究，可參考下列諸書：

疇人傳(清阮元著) 近代疇人著述記(華世芳著)

中國數學源流考略(李儼著) 古算考源(錢寶琮著)

數學辭典(趙遼編)

(5)近今算術教科書之取材，大致與古法類似，惟其分類之法以及數碼程式等，悉採自西算耳。故算法之已備於算術教科書者，是書均擱棄不更編入，蓋學者已習之久矣。

(6) 求一術之理解殊深,非習過高等數學者不易得其詳。是書所述,因限於學者之程度,尙未能解釋詳盡,學者如以爲未足,請參閱北京高師數理雜誌第三期傅種孫之大衍術一文,當能鑒望也。

(7) 是書所列各種算法兼有古書所未見,而爲著者所自撰者,惟著者孤陋寡聞,殊不敢謂無先得吾心者,爰特錄新術之目於下,幸閱者諸君垂教焉。

- | | |
|----------------|-------------------|
| (a) 百雞術增減率之求法 | (b) 用混合比例解百雞題 |
| (c) 用三元方程式解百雞題 | (d) 求一術簡法(IV) |
| (e) 不正圓束物法 | (f) 六角梁積術 |
| (g) 重差新術 | (h) 斜三角形整數邊及面積之求法 |

(8) 是書爲鼓起學者之興趣起見,特選古書中所載歌謠體之算題一百問,重加修正,附錄於後,其中除簡易者及同類者外,一一爲之解答,學者可以舉一反三,當覺樂趣盎然也。

著者識

序 一

天地之機緘，萬物之原理，任人探索而莫祕也。然欲闢其機，窮其理，必有先知先覺者發明之；又有後知後覺者繼承之，而後遞推遞衍錯綜變化而無窮。今日歐西各科學，發揚光大，令人不可思議者，非自今日始也。有一人倡之，必有數什百人繼之，或譯其書，或闡其理，務使全國之人，皆得盡其心思才力，以從事於學，此文化之所以愈推愈廣也。

我國開化最早，數學一藝，創於黃帝時之隸首。其後羲和造曆，章亥步地，以及鄒衍談天，絳老疑年，周髀作經，其散見於傳記百家者，不乏傳人。迨後專制帝王，欲束縛人心，遂使天下聰穎子弟，羣趨於考據詩賦詞章之末，沉溺而不返。間有思想稍異者，又有奇技淫巧之禁，此古算之所以湮沒不彰也。

及前明末造，西人利瑪竇、湯若望等，挾其天文、地理、數學諸書，航海東來，而遂有西算之法矣。當時篤信之者，有徐光啓。翻譯幾何原本，以餉遺後學。其後繼起者，有李銳、張作楠、李華、李善蘭、華蘅芳諸家。而代數、幾何諸學，遂盛行於一時矣。於是習算者，莫不醉心歐化，而於古算棄如敝屣。書必西籍也，式必西碼也，以爲不如此，不足入其室而登其堂也。不知一國有一國之文化，即有一國之精神，其關係於國體人心者甚大也。今必一一效法西人，無論拾其糟粕，種瓜而或得豆也；即使窮其

究竟，亦不過西人之附庸而已矣。況算學一科，我國昔時疇人，有先西人而發之者；有發西人所未發者，明明有可循之準則，而必舍己之田，芸人之田，不亦惑乎？

吾鄉胡氏中學所聘數理教員許君蕓舫，有鑒於此，於授課之暇，以西算之原理，推衍古算之程式，彙爲一編，見贈。一開卷焉，知爲吾國之學，非西人之學也。並知爲今人之學，即古人之學也。夫學何分東西，何分今古；苟有畀於後學，不必先知先覺也，即藉前人之所知所覺，貫通之，推闡之，亦足以發揚我國之文化，丕變我國之人心風俗也。人之愛國，誰不如我。苟知本國之書，內容不弱於西文，購置便而索解易，豈必甘爲外人之學奴，唾棄先輩之手澤哉。略述數言，以弁其首，將與海內君子共勗焉。

胡敦復序於上海大同學院。

序 二

舫幼時，受初等教育，即喜習算。及長，從秦沅先生遊，得窺高等數學之門徑，心竊好之。以爲數學一科，非惟能施諸實用而已也；其立法謹嚴，說理有據，絲毫不容苟且，久習之令人心思歸於縝密，行事合於正軌，且一題在手，恆矻矻然必得其解答而後已，能養成我人堅忍不拔之志，而無畏首畏尾之心焉。舫之所以獨嗜數學者，職是故也。

近世科學悉昉自歐西，而數學一科尤爲諸科學之根源，其亦來自歐西也，當無疑義。是以習數學者，每至精微奇妙之處，未有不深佩西人之卓識爲國人所不可及者，而孰知竟有大謬不然者在哉。溯自我國黃帝時命隸首作算數，迄今四千餘年，其間代有疇人，探其深微，發其祕奧，著作多如林立，其光榮之歷史及精妙之方術，固大足以焜耀於世界也。

憶昔舫於求學之際，坐井觀天，初亦未嘗知有國算，迨後，偶過舊書肆，獲古算籍數種，心始異之。攜歸披閱，不覺色然而喜，蓋今之算術諸法，其中詳載無遺，如異乘同除及異除同乘即今之比例也；少廣即今之開方也；方田，商功即今之求積也；東物，粟積即今之級數也，其他如整數分數之四則，莫不詳備，更有代數學之方程式；幾何學之相似形，以及天元四元之學，古人固無一不知，且無一不精也。考其發明之歷史，大多出於

西人之前；所立之方術，或且駕於西人之上。由是言之，我國數學，當能別樹一幟，與歐西相頡頏。而今之學者，非惟不能通國算，甚且不知有國算者，其故何也？舫細加推求，厥有四端：

算經之最古者，當推周髀，爲周公商高問答之辭，其後代有著作，不勝枚舉，其經文大都隱晦難明，使學者無從得其要領，雖研究者未嘗不力，而問津者實屬無多也，是爲國算淪亡之第一原因。

我國素稱專制，歷代帝王，輒用愚民政策，使人民讀得幾篇死文章，便有升官發財之機會，且視數學爲奇技淫巧，非特不加提倡，反從而摧殘之，其能如唐貞觀時立數學於學官，以之開科取士者，實寥若晨星也。欲使國算有大進步，不綦難乎？是爲國算淪亡之第二原因。

算經立法，間有穿鑿附會，不能合理者，然諸家必辨而正之，故唐宋以還，諸解法皆已正確無誤，惟各書皆有術無證，後世之人，但知其所當然，而不知其所以然，於是信任者少，輕視者多，是爲國算淪亡之第三原因。

學制更新，數學亦列入主科之一，而其教科書，悉仿西法，從無介紹國算之歷史與方術者，故今之學子，僅知醉心歐化，鮮能發揚國粹。舫嘗執學子而問之曰：「汝知今日所習之算術，創自何國乎？」或曰：「阿刺伯。」以其數碼爲阿刺伯字也。

或曰：「英吉利。」以其文字多英文也。數典忘祖，其由來久矣，是皆教育當局不屑加以提倡有以致之也。是爲國算淪亡之第四原因。

上舉四端，是其犖犖大者。此外或因水火兵燹，古籍散佚；或因居奇自祕，終乏傳人；或因財力不繼，未付剞劂。有此種種，則國算之所以有今日，可以彰彰明矣。

據是以觀，國人若不速謀挽救，國算之泯滅無遺可立而待也。是則國未亡而文化先喪，不亦大可悲乎！

舫有鑒於此，每以發揚國算爲己任。惟以學識膚淺，常感心有餘而力不足之苦。數載以來，就授課之暇，拉雜輯成古算法之新研究凡十一章。蒙胡敦復及秦沅二先生加以指正，得以公之於世。書雖等諸覆瓿，意不同於諛墓。深望海內專家，不吝賜教。並望後之編者教者，多將國算常識，採入教科書中，以灌輸於學子。則區區拋磚引玉之心，可得而償。而搦草之衍習，亦可謂爲不虛矣。

澄江許蕪舫序於胡中實驗室

目 錄

編輯大意

序一

序二

第一章 百雞術.....1

(1)百雞術之源流

(2)百雞術增減率之求法

(3)用混合比例解百雞題

(4)用三元方程式解百雞題

(5)用二元方程式解百雞題 (6)百雞術之餘緒

第二章 求一術.....13

(7)求一術之源流

(8)物不知數題

(9)大衍求一總術

(10)求一術之理解

(11)求一術簡法

第三章 少廣術.....29

(12)少廣術之源流

(13)帶縱開平方法

(14)減縱開平方法

(15)四因積步法

(16)相併求方法

(17)相減求方法

第四章 束物術.....53

(18)束物術之源流

(19)等差級數

(20)方束術

(21)圓束術

(22)三棱束術

第五章 垛積術.....69

(23)垛積術之源流

(24)雜級數

(25)正方垛積

(26)長方垛積

(27)三角垛積

(28)六角垛積

第六章 分田術	81	
(29)分田術之源流	(30)方田截積	(31)三角田截積
(32)梯田截積	(33)環田截積	
第七章 句股術	99	
(34)句股術之源流	(35)句股弦之定理	
(36)整數句股弦之求法	(37)句股弦互求術	
(38)句或股較弦	(39)句或股和弦	
(40)句較或和股	(41)句股同較或和弦	
第八章 旁要術	121	
(42)旁要術之源流	(43)句股容方	(44)句股容圓
(45)日影量竿	(46)鏡影測竿	(47)立表測竿
(48)江河測廣	(49)湖沼測廣(一)	(50)湖沼測廣(二)
(51)湖沼測廣(三)	(52)海島測遠(一)	(53)海島測遠(二)
(54)船舶測距		
第九章 重差術	141	
(55)重差術之源流	(56)重差總術	(57)重差新術(一)
(58)重差新術(二)		
第十章 三斜求積術	151	
(59)三斜求積術之源流	(60)三斜求積總術	
(61)三斜求積術之別證	(62)斜三角形整數邊及面積之求法	

第十一章 割圓求周術.....	163
(63)割圓求周術之源流	(64)內接六邊割圓術
(65)內接四邊割圓術	(66)外接六邊割圓術
(67)外接四邊割圓術	(68)割圓求周術
附 錄 歌謠體之古算題.....	183
第一節歌謠體算題之起源	第二節整數四則問題
第三節分數四則問題	第四節比例問題
第五節開方求積問題	第六節句股旁要問題
第七節聯立方程問題	第八節雜問題

古算法之新研究

第一章

百雞術

§1. 百雞術之源流 古時算題，一問僅有一答，自張邱建算經創立百雞之術，始陳繁變，其後求一術出，答案更多至無窮，惟九章算術「五家共井」一題，書中雖僅舉一答，實則答案亦為無限，乃開百雞術及求一術之先河，故追論之。

魏景元時人劉徽所輯九章算術方程章第十三問云：「今有五家共井，甲二縷不足如乙一縷（甲繩二，乙繩一入井適及水面），乙三縷不足如丙一縷，丙四縷不足如丁一縷，丁五縷不足如戊一縷，戊六縷不足如甲一縷，各得所不足一縷，皆逮，問井深縷長各幾何？」是題有未知數六，而方程僅得五式，故答數無定也，古法列方程五行，與今法頗能神似，李潢九章算術細草圖說既已詳備，本書不更贅及，茲以代數聯立方程式詳解之如下：

設甲、乙、丙、丁、戊縷之長各為 x, y, z, u, v 寸，井深為 w 寸，則得方程式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = w \dots\dots\dots(1). \\ 3y + z = w \dots\dots\dots(2). \\ 4z + u = w \dots\dots\dots(3). \\ 5u + v = w \dots\dots\dots(4). \\ 6v + x = w \dots\dots\dots(5). \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} (1) \times 3 \\ (2) \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6x + 3y = 3w \\ \underline{3y + z = w} \quad (-) \\ 6x - z = 2w \dots\dots\dots(6). \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (6) \times 4 \\ (3) \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24x - 4z = 8w \\ \underline{4z + u = w} \quad (+) \\ 24x + u = 9w \dots\dots\dots(7). \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (7) \times 5 \\ (4) \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120x + 5u = 45w \\ \underline{5u + v = w} \quad (-) \\ 120x - v = 44w \dots\dots\dots(8). \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (5) \times 120 \\ (8) \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120x + 720v = 120w \\ \underline{120x - v = 44w} \quad (-) \end{array}$$

$$721v = 76w,$$

$$\therefore v = \frac{76}{721}w.$$

$$\text{代入(5),得} \quad \frac{456}{721}w + x = w, \quad \therefore x = \frac{265}{721}w.$$

$$\text{仿此得 } y = \frac{191}{721}w, \quad z = \frac{148}{721}w, \quad u = \frac{129}{721}w.$$

故若 $w = 721$ 寸, 則 $x = 265$ 寸, $y = 191$ 寸,

$$z = 148 \text{ 寸}, \quad u = 129 \text{ 寸}, \quad v = 76 \text{ 寸}.$$

是即九章算術中之答案,惟倍其井深及各家綆長,其各數間之關係,仍能與題相合,故其答案可至無限.

六朝時張邱建算經末一題云:「今雞翁一,值錢五;雞母一,值錢三;雞雛三,值錢一,凡百錢,買雞百隻,問雞翁、母、雛各幾何。」答曰:「雞翁四,母十八,雛七十八。」又答:「雞翁八,母十一,雛八十一。」又答:「雞翁十二,母四,雛八十四。」凡三答.

算經術曰:「雞翁每增四,雞母每減七,雞雛每益三,即得。」細考術文之意,不過謂雞翁四值錢二十,雞雛三值錢一,共計七隻值錢二十一文,而雞母七隻亦值錢二十一文,故於總數中,若增雞翁四及雞雛三而減雞母七,則雞數不變,雞值亦相當也.是則本術僅得翁、母、雛損益之數,而未及其答數之由來,故術文當非全豹也.

北周甄鸞以算經之術難以通曉,乃另立一術云:「置錢一百在地,以九爲法除之,爲雞母之數;不盡者反減下法,爲雞翁之數。」所得答數即前第二答也.後李淳風爲之註釋,劉孝孫作細草,皆附會甄說,蓋其法僅爲偶合,非通術也.至清焦循始辯甄、劉之誤,別創三色差分之法以馭之;然其術亦爲偶合,

不可移馭他題，駱春池藝遊錄以大衍求一術解百雞題，雖取法尙是，然亦非張邱建算經本旨，丁取忠復辯其非，而自立二色差分術解之，先假定雞翁無，由雞母、雞雛共雞錢各一百入算，得雞母、雞雛數；再以經術雞翁、母、雛增減率四、七、三損益之，而得三答。時日淳見之，謂與二元方程相類，因爲之廣衍若干題，作百雞術衍二卷，於是百雞術，大顯於世矣。

§2. 百雞術增減率之求法 經術曰：「翁增四，母減七，雛益三。」其義已於上條詳釋之；惟其得術之由，則未嘗見於各書，茲以聯立方程式之法求之如下：

設每雞母 y 隻，可當雞翁 x 隻及雞雛 z 隻，其數相等，其值亦相當。已知每母值錢三，每翁值錢五，三雛值錢一，故得方程式

$$\begin{cases} y = x + z \cdots \cdots \cdots (1). \\ 3y = 5x + \frac{1}{3}z \cdots \cdots \cdots (2). \end{cases}$$

$$(2) \times 3 \quad 9y = 15x + z \quad (1) \times 15 \quad 15y = 15x + 15z$$

$$(1) \times 1 \quad \underline{y = x + z} \quad (-) \quad (2) \times 3 \quad \underline{9y = 15x + z} \quad (-)$$

$$8y = 14x$$

$$6y = 14z$$

$$\text{即} \quad 4y = 7x,$$

$$\text{即} \quad 3y = 7z,$$

$$\therefore \quad x : y = 4 : 7;$$

$$\therefore \quad y : z = 7 : 3;$$

故知

$$x : y : z = 4 : 7 : 3.$$

是即翁四，雞三，共七隻，其值適與母七隻相當也；此係增減之簡率，至其任何倍數，如「翁增八，母減十四，雞益六。」等，皆可合用。

§3. 用混合比例解百雞題 雞百隻，共值錢百文，則平均每雞值錢一文，故就其損益之數，可得混合量之比，再以配分比例法分配之。

平均價	品名	原價	比	較	混合量之比								
1文	雞翁	5文	損4文	6	1	1	2	1	3	2	3		
	雞母	3文	損2文	3	1	2	1	3	1	3	2	
	雞雛	$\frac{1}{3}$ 文	益 $\frac{2}{3}$ 文	1	9	12	15	15	21	21	24		

依法推定混合量之比，其種數無限；惟配分之時，須以各比率之和除總數100，故各比率之和須為100之約數，方可得整數之答案；因雞數固不能有奇零也，茲歷試上舉之混合量比，惟3:1:21一種適於用，故分配之如下：

$$3+1+21=25,$$

$$\left. \begin{aligned} 100 \times \frac{3}{25} &= 12 \text{ 隻} \dots\dots\dots \text{雞翁數} \\ 100 \times \frac{1}{25} &= 4 \text{ 隻} \dots\dots\dots \text{雞母數} \\ 100 \times \frac{21}{25} &= 84 \text{ 隻} \dots\dots\dots \text{雞雛數} \end{aligned} \right\} \text{答案(一),}$$

據算經定律：去雞翁四雞雛三共七隻，而換以雞母亦七

隻,其值不變,故得:

$$\left. \begin{array}{l} 12-4=8 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{翁} \\ 4+7=11 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{母} \\ 84-3=81 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{雛} \end{array} \right\} \text{答案(二), } \left. \begin{array}{l} 8-4=4 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{翁} \\ 11+7=18 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{母} \\ 81-3=78 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{雛} \end{array} \right\} \text{答案(三).}$$

若將混合量之比逐漸推求,必可得 8:11:81 及 2:9:39 二種,因此二比之比率之和,為 100 之約數,故按此二比而分 100 為三份,亦可得(二)(三)兩答案也。

[又法一]設雞翁無,則雞母、雞雛合計百隻,值錢百文,可求得二種雞之假定數,再以增減率損益之,而得三答。

平均價	品名	原價	比 較	混合量之比
1文	雞母	3文	損 $\frac{2}{3}$ 文	$\frac{2}{3}$ 2 1
	雞雛	$\frac{1}{3}$ 文	益 $\frac{2}{3}$ 文	$\frac{2}{3}$ 3 3

按 1:3 之比,將雞百隻配分如下:

$$1+3=4,$$

$$100 \times \frac{1}{4} = 25 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{雞母之假定數,}$$

$$100 \times \frac{3}{4} = 75 \text{ 隻} \cdots \cdots \text{雞雛之假定數.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{雞翁 } 0+4=4 \text{ 隻} \\ \text{雞母 } 25-7=18 \text{ 隻} \\ \text{雞雛 } 75+3=78 \text{ 隻} \end{array} \right\} \text{答案(一)} \quad \left. \begin{array}{l} 4+4=8 \text{ 隻} \\ 18-7=11 \text{ 隻} \\ 78+3=81 \text{ 隻} \end{array} \right\} \text{答案(二)} \quad \left. \begin{array}{l} 8+4=12 \text{ 隻} \\ 11-7=4 \text{ 隻} \\ 81+3=84 \text{ 隻} \end{array} \right\} \text{答案(三)}$$