■ 主审　沈康顿

21世纪高职高专教育系列规划教材·公共基础类

21SHIJI GAOZHIGAOZHUAN JIAOYU XILIE GUIHUA JIAOCAI · GONGGONGJICHULEI

高等数学

Gaodengshuxue

主编　张　博　张春玲

修订版

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

21世纪高职高专教育系列规划教材·公共基础类

高等数学

（修订版）

主　编　张　博　张春玲

副主编　杨　帆　谢克斌　周安福

西北大学出版社

中国·西安

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/张博，张春玲主编. －西安：西北大学出版社，2005.7
ISBN 7-5604-2040-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②张… Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 056255 号

高等数学

张 博 张春玲 主编
西北大学出版社出版发行
（西北大学校内 邮编 710069 电话 88302590）
新华书店经销 西安市商标印刷厂印刷
787 毫米×1092 毫米 1/16 开本 22 印张 535 千字
2005 年 8 月第 2 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-5604-2040-0/O·127 定价：28.00 元

编写说明

本书是在《数学》下册的基础上，经过广泛征求使用者的意见，并反复讨论修订而成的。

三年前，在陕西省教育厅高教处的统一安排下，根据教育部最新制定的相关教学大纲要求，结合学生的实际水平，西北大学出版社组织多家院校长期从事数学教学的一线骨干教师，编写了一套适合职业院校学生使用的《数学》（上下册）教材。

编者充分考虑到高等职业教育的特点与学生的实际情况，以及对人才培养目标的要求，参考并吸收了各地同类课程的教学教改经验，制定出具有自己特色的编写提纲。编写时，特别强调了简单、易学、好教、够用的原则，突出针对性和实用性。在内容编排上，本教材具有以下几方面的特点：

(1) 既注意到课程自身的系统性和逻辑性，又兼顾到与其他课程的相互配合，以及与高中课程的衔接。

(2) 以实例诠释概念、定理，不追求严格的论证和繁琐的推导过程，对有关结论、方法的叙述力求简洁明了，通俗易懂，尽量淡化深奥的数学理论。

(3) 习题和复习题的选择以加深理解和巩固概念、定理为目的，难易适度，具有极强的针对性，突出数学思维方法的训练和应用能力的培养。

这次修订时，除依旧保持上述特点外，在广泛征求并采纳几十所使用院校老师意见和建议的基础上，主要对部分不适合的内容作了增删调整，还对个别叙述不恰当的词句进行了斟酌润色，同时也订正了一些编校差错。为准确表述教材内容，修订后的《数学》下册更名为《高等数学》。

全书包括高等数学和部分工程数学的内容，按大约150个学时编写，教学时可根据学生实际水平和各院校专业设置特点等具体情况进行选择取舍。教材适合五年制及三年制高职高专院校师生使用。

这次修订，由张博和张春玲搜集意见并提出方案，吉耀武、张少杰、沈康顿、杨帆、谢克斌、周安福等参加了讨论，最后由沈康顿审阅定稿。参加修订编写的有张博、谢克斌、张春玲、王娟娟、张拓、王俊、郑建峰、王小特、王雅、杨帆、姚红梅、张广学、周安福。

需要特别说明的是，《数学》下册编写时，陈宏恩教授作为主审对编写提纲和书稿进行了仔细审阅，并提出了许多中肯的意见和建议；在此次修订编写过程中，各参编院校领导和数学教师也给予了大力支持与协助，李萍老师在统稿和校对中做了部分工作，我们在此一并表示真诚的感谢。

限于编者水平，尽管做了认真修订，仍难免疏漏和不妥，请使用者批评指正，以便再版时进一步修改完善。

高职高专规划教材

《高等数学》编写组

2005年8月

目　录

第一章　函数、极限与连续

初等函数研究的主要是常量及其运算，而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系. 函数正是这种依赖关系的体现. 极限方法是研究变量之间依赖关系的基本方法. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

§1-1　函　数

一、函数的概念

1. **函数的定义**

定义 1　设x和y是两个变量，D是实数集$\mathbf{R}$的某个子集. 如果对任何的$x\in D$，按照某种对应法则，变量y总有确定的值与之对应，则称变量y是变量x的**函数**，记作 $y=f(x)$. 称D为该函数的**定义域**，称x为**自变量**，称y为**因变量**.

当自变量x取数值$x_0\in D$时，与x_0对应的因变量y的值称为函数$y=f(x)$在点x_0处的**函数值**，记为$f(x_0)$，或$y|_{x=x_0}$，当x取遍D的各个数值时，对应的变量y取值的全体组成的数集称作这个函数的**值域**.

如果自变量在定义域内任取一个值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则，称为**多值函数**.

例如，$y=3x+1$ 是单值函数，由方程$x^2+y^2=1$ 确定的函数$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 就是多值函数. 以后凡没有特别说明，本书所讨论的函数都是指单值函数.

2. **函数的两个要素**

由函数的定义知，函数的两个要素是**定义域**和**对应法则**. 也就是说，**两个函数只有当它们的定义域和对应法则完全相同时，两个函数才是相同的**.

例如，函数$y=x-1$和函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$就是两个不同的函数. 因为它们的定义域不同，前者的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，后者的定义域为 $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$.

3. **函数的表示法**

在函数的定义中，并没有规定用什么方法来表示函数. 为了能很好地研究函数关系，就应该采用适当的方法把它表示出来. 函数的表示法通常有三种，即表格法、图示法和公式法.

4. **函数的几种特性**

(1) 有界性　设函数$y=f(x)$的定义域为D，数集$X\subseteq D$，如果存在正数M，使得对于任

意的$x \in X$，都有不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称$f(x)$在X上**有界**，如果这样的M不存在，则称函数$f(x)$在X上**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$在（$-\infty$，$+\infty$）内是有界的；函数 $y=\dfrac{1}{x}$在（0，1）内无界，而在$\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$上是有界的.

（2）**单调性**　设函数 $y=f(x)$在区间X上有定义. 如果对于任意的 x_1，$x_2 \in X$，当$x_1 < x_2$时，均有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数$y=f(x)$在区间X上**单调增加**（或**单调减少**）. 区间X称为**单调增区间**（或**单调减区间**）.

例如，函数 $y=x^3$在（$-\infty$，$+\infty$）内单调增加；函数 $y=-x$在（$-\infty$，$+\infty$）内单调减少.

（3）**奇偶性**　设函数$y=f(x)$的定义域D是关于原点对称的，如果对于任意的$x \in D$，均有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对于任意的$x \in D$，均有$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**.

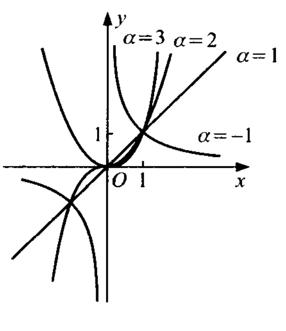
（4）**周期性**　设函数$y=f(x)$，如果存在正常数T，使得对于任意$x \in D$，均有$x+T \in D$，且$f(x+T)=f(x)$成立，则称函数 $y=f(x)$为**周期函数**，称T为$f(x)$的**周期**.

显然，若T是周期函数$f(x)$的周期，则kT也是$f(x)$的周期（$k=1$，2，3…）. 通常我们说的周期是指**最小正周期**.

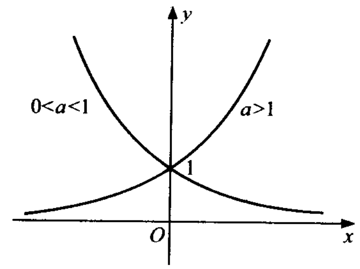
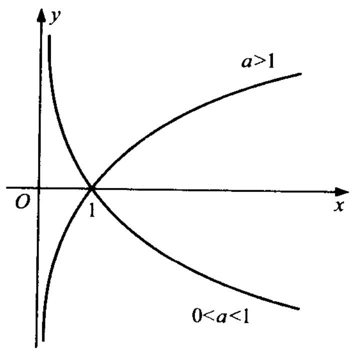
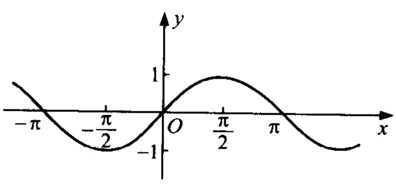
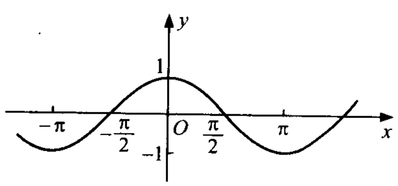
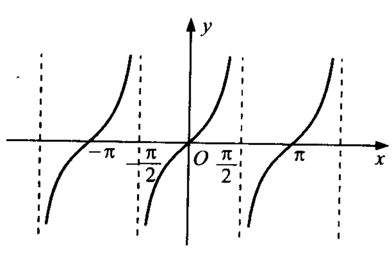
二、基本初等函数

基本初等函数是最常见、最基本的一类函数. 基本初等函数包括**常值函数**、**幂函数**、**指数函数**、**对数函数**、**三角函数**和**反三角函数**，这些函数在上册已经学过了. 这里我们将基本初等函数的定义域、值域、图像和简单性质列于表 1-1.

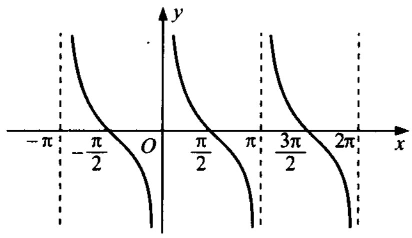
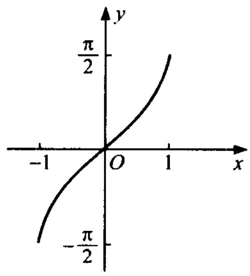
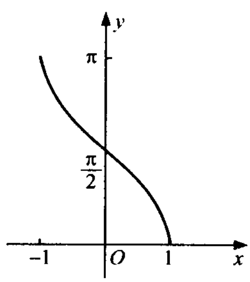
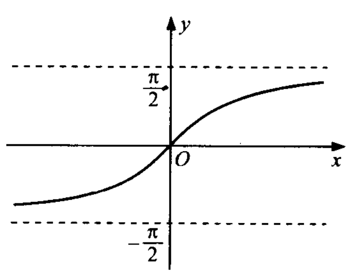
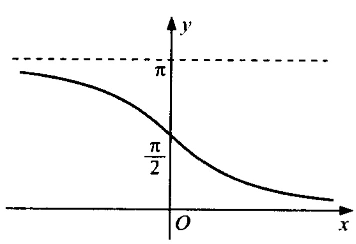
表 1-1　基本初等函数的图形及其主要性质

函数	图　　形	定义域	值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$ （α是常数）		随α不同而不同，但不论α取什么值，x^{α}在(0，$+\infty$）内总有定义.	随α不同而不同.	若$\alpha>0$，x^{α}在［0，$+\infty$)内单调增加；若$\alpha<0$，x^{α}在（0，$+\infty$）内单调减少.

续表 1-1

函数	图形	定义域	值域	主要性质
指数函数 $y=a^x$ (a是常数, $a>0$, $a\neq1$)		$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$a^0=1$ 若$a>1$, a^x单调增加; 若$0<a<1$, a^x单调减少; 直线$y=0$为函数图形的水平渐近线.
对数函数 $y=\log_a x$ (a是常数, $a>0$, $a\neq1$)		$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\log_a 1=0$ 若$a>1$, $\log_a x$单调增加; 若$0<a<1$, $\log_a x$单调减少; 直线$x=0$为函数图形的铅直渐近线.
正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	以2π为周期的周期函数. 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上单调增加，奇函数.
余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	以2π为周期的周期函数. 在$[0, \pi]$上单调减少，偶函数.
正切函数 $y=\tan x$		$(2n-1)\frac{\pi}{2}<$ $x<(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n=0, \pm1,$ $\pm2, \cdots$)	$(-\infty, +\infty)$	以π为周期的周期函数. 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，奇函数. 直线$x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$为函数图形的铅直渐近线 ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$).

续表 1-1

函数	图形	定义域	值域	主要性质
余切函数 $y=\cot x$		$n\pi<x<(n+1)\pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$	$(-\infty,\ +\infty)$	以π为周期的周期函数. 在 $(0,\ \pi)$ 内单调减少，奇函数. 直线$x=n\pi$为函数图形的铅直渐近线 $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$[-1,\ 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	单调增加. 奇函数.
反余弦函数 $y=\arccos x$		$[-1,\ 1]$	$[0,\ \pi]$	单调减少
反正切函数 $y=\arctan x$		$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	单调增加. 奇函数. 直线$y=-\frac{\pi}{2}$及$y=\frac{\pi}{2}$为函数图形的水平渐近线.
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,\ \pi)$	单调减少. 直线$y=0$及$y=\pi$为函数图形的水平渐近线.

三、复合函数

先考察一个例子，设$y=\ln u$，而$u=2^x$，用2^x去代替第一个式子中的u，得$y=\ln 2^x$. 可以认为，函数$y=\ln 2^x$是由$y=\ln u$及$u=2^x$复合而成的函数，这样的函数称为**复合函数**.

定义 2 设y是u的函数，$y=f(u)$，$u\in I$，而u是x的函数，$u=\varphi(x)$，$x\in D$，并且$\varphi(x)$的值域包含于或部分包含于$f(u)$的定义域，则y通过u的联系也是x的函数，称此函数是由$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，记作$y=f[\varphi(x)]$，并称x为自变量，称u为**中间变量**.

由此定义，当里层函数的值域不包含于外层函数的定义域时，只要两者有公共部分，这时可以限制里层函数的定义域，使其对应的值域包含于外层函数的定义域，就可构成复合函数了.

对于给定的复合函数，分析清楚它的复合过程（即会将复合函数进行分解），会给将来导数及积分的运算带来许多方便.

例 1 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$; (2) $y=\sqrt{\ln x}$;

(3) $y=\sqrt[3]{\sin x^2}$; (4) $y=\cos 2^{x-1}$.

解 (1) $y=e^{\sqrt{x}}$是由$y=e^u$，$u=x^{\frac{1}{2}}$复合而成.

(2) $y=\sqrt{\ln x}$是由$y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=\ln x$复合而成.

(3) $y=\sqrt[3]{\sin x^2}$是由$y=u^{\frac{1}{3}}$，$u=\sin v$，$v=x^2$复合而成.

(4) $y=\cos 2^{x-1}$是由$y=\cos u$，$u=2^v$，$v=x-1$复合而成.

应该指出，不是任何两个函数都可组成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$及$u=3+x^2$就不能组成复合函数. 原因是，$u=3+x^2$的值域$[3,+\infty)$和$y=\arcsin u$的定义域$[-1,1]$无公共部分，对于函数$u=3+x^2$的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何x值，形式上的复合函数$y=\arcsin(3+x^2)$均无意义.

因此，函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$可以构成复合函数的关键是外层函数$f(x)$的定义域和里层函数$\varphi(x)$的值域有公共部分.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成，如例 1 中的 (3)(4).

四、初等函数

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的、并能用一个解析式子表示的函数，称为**初等函数**. 例如，

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$
$$y=(x^2+1)e^{\sqrt{x}}+\sin(\ln x)$$

都是初等函数.

习　题　1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{3-x^2}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$;

(3) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{1-x}+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

2. 在下列各题中, $f(x)$和$g(x)$是否表示同一函数? 为什么?

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;　　(2) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(3) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$;　　(4) $f(x)=|\cos x|$, $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

(5) $f(x)=x\sqrt[3]{x}$, $g(x)=\sqrt[3]{x^4}$.

3. 求函数值:

(1) 设$f(x)=\sqrt{3+x^2}$, 求$f(4)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(x_0)$, $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

(2) 设$\varphi(t)=t^2$, 求$\varphi(2)$, $[\varphi(3)]^3$, $\varphi(-1)$.

(3) 设$f(x)=\begin{cases}-(x+1) & x\leqslant -1\\ \sqrt{1-x^2} & -1<x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases}$ 求$f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$.

4. 下列函数中哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=2x^4(x^2-1)$;　　(2) $y=x\sin x$;

(3) $y=x(x-1)(x+1)$;　　(4) $y=x+\sin x$.

5. 下列函数由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\sqrt{1-x}$;　　(2) $y=\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $y=5(x+2)^2$;　　(4) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$.

§ 1-2　极限的概念

一、数列的极限

考察下列几个数列:

(1) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, 即数列 $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$

(2) $\{x_n\}=\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$, 即数列 $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \cdots, 1+\dfrac{1}{n}, \cdots$

(3) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$, 即数列 $0, 1, 0, 1, \cdots, \dfrac{1+(-1)^n}{2}, \cdots$

(4) $\{x_n\}=\{2^n\}$, 即数列 $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$

可以看出，随着数列项数 n 的无限增大，各数列的变化趋势有以下两种情形. 第一种情形：当 n 无限增大时，通项x_n无限地趋近于某一常数. 例如，在（1）中，随着n的无限增大，通项$x_n=\frac{1}{n}$无限地趋近于零；在（2）中，随着n的无限增大，通项$x_n=1+\frac{1}{n}$无限地趋近于 1. 第二种情形：当 n 无限增大时，通项x_n不趋近于任何常数. 例如，在（3）中，数列通项$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$总是在 0 和 1 之间摆动；在（4）中，随着n的增大，其通项$x_n=2^n$无限增大，它们都不趋近于任何常数.

对于数列（1）和（2）所表现出来的特性，我们有：

定义 1 如果无穷数列 $\{x_n\}$ 的项数n无限增大时，x_n无限地趋近于某个确定的常数A，那么A就叫做无穷数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

或当$n\to\infty$时，$x_n\to A$.

当数列 $\{x_n\}$ 以A为极限时，称数列 $\{x_n\}$ 收敛于A，此时称数列 $\{x_n\}$ **收敛**. 如果数列 $\{x_n\}$ 不趋近于任何常数，即 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

例 1 判断下列无穷数列的极限：

（1）$\{x_n\}=\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$；（2）$\{x_n\}=\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$；

（3）$\{x_n\}=\{3\}$；（4）$\{x_n\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$.

解 （1）通过观察，当n无限增大时，数列通项$x_n=\frac{n+2}{n+3}$无限趋近于常数 1，所以 1 是数列$\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$$

（2）通过观察，当n无限增大时，数列通项$x_n=\frac{n}{2n+1}$无限趋近于常数$\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}$是数列$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

（3）通过观察，当n无限增大时，数列通项x_n总等于 3，所以 3 是数列 $\{3\}$ 的极限. 即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}3=3$$

（4）数列 $\{x_n\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ 按项数展开应该是 $\sin\frac{\pi}{2}$，$\sin\pi$，$\sin\frac{3\pi}{2}$，…，$\sin\frac{n\pi}{2}$，…

即 1，0，-1，0，…，$\sin\frac{n\pi}{2}$，…

显然，当n无限增大时，x_n摆动于1，0，-1三数之间，并不趋近于某一个确定的常数，所以数列 $\{x_n\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$没有极限.

二、函数的极限

对于函数的极限，根据自变量变化的情况，分两种情形讨论.

第一种：当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限.

在数列的极限中，记号$n\to\infty$是指数列的项数按照自然数的顺序无限增大，而函数的自变量$x\to\infty$是指x的绝对值无限增大.

例 2 当$x\to\infty$时，讨论$y=\frac{1}{x}$的变化趋势.

解 作出$y=\frac{1}{x}$的图像（如图 1-1），由图可见，当$|x|$无限增大时$\frac{1}{x}$的值无限地趋近于零，即当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\to 0$.

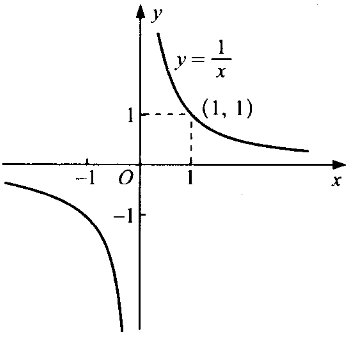


图 1-1

类似于数列的极限，我们可以给出函数极限的定义.

定义 2 当$|x|$无限增大（$x\to\infty$）时，如果函数$f(x)$无限地趋近于一个确定的常数A，那么常数A就叫做当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

或当$x\to\infty$时，$f(x)\to A$.

例 2 中，当$x\to\infty$时，$f(x)=\frac{1}{x}\to 0$ 便可记作

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

在上面的函数极限定义中，$x\to\infty$，即自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既可以取正值无限增大，也可以取负值而绝对值无限增大，同时包括时而取正值，时而取负值，绝对值仍无限增大的情况.

有时 x 的变化趋势仅取正值而无限增大，记作$x\to+\infty$；有时 x 的变化趋势仅取负值而绝对值无限增大，记作$x\to-\infty$. 这时有如下的极限定义：

定义 3 当$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时，如果函数$f(x)$无限地趋近于一个确定的常数A，那么常数A就叫做$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时函数$f(x)$的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad（或\lim_{x\to-\infty}f(x)=A）$$

或当$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时，$f(x)\to A$.

例 3 观察函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$和$y=2^x$的图像，并判断下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$.

解 由图 1-2 可以看出:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

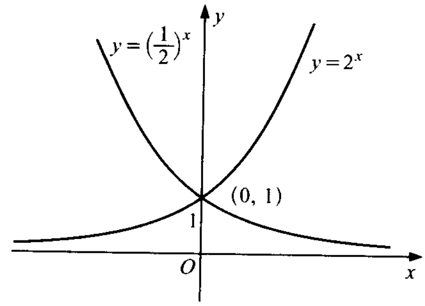


图 1-2

例 4 作出函数$y=1+\frac{1}{x^2}$的图像，并判断极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$是否存在.

解 作出函数$y=1+\frac{1}{x^2}$的图像（图 1-3).

不难看出

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

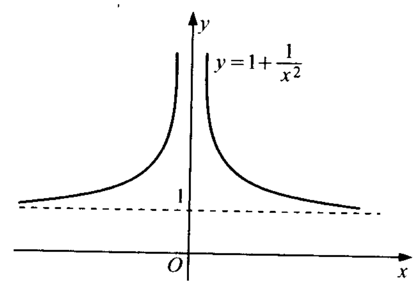


图 1-3

由例 4 可知，如果$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，那么$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$；反之，如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，那么$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

此外，当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$，且$A\neq B$，或$A$，$B$中至少有一个不存在时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在，如例 3 的两个函数，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$及$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$都不存在.

第二种：当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限.

先看两个例子：

例 5 讨论当$x\to1$时函数$y=x+1$的变化趋势.

解 作出函数$y=x+1$的图像（图 1-4). 当$x\to1$时，$y=x+1$无限趋近于 2.

例 6 讨论当$x\to1$时，函数$y=\frac{x^2-1}{x-1}$的变化趋势.

解 作出函数$y=\frac{x^2-1}{x-1}$的图像（图 1-5). 可以看出，当x无限趋近于 1 时，$y=\frac{x^2-1}{x-1}$无限趋近于 2. 但此函数在$x=1$处无定义.