上册

高等数学学习指导

沙启敏　主编

中国矿业学院出版社

高等学校教学参考书

高等数学学习指导

沙启

中国矿业学院出版社

内容简介

本书根据全国数学课程教学指导委员会所制定的高等数学基本要求及数学教研室多年教学经验编写而成。

全书分上下册，上册内容分七章，包含有函数，极限，连续，一元函数微积分学及向量代数、空间解析几何。每册均分二大部分：学习指导部分与复习指导部分，书中对每章内容提出基本要求，指出重点与难点，并备有大量的例题、思考题、练习题与自我测验题、书后附有练习题及自我测验题的答案，系大学工科本科学生，学习高等数学的一本主要辅导材料。

本书也可供、大专、电大、职大、夜大及自学高等数学与报考研究生的同志们参考。

责任编辑：汤澄波

高等学校教学参考书

高等数学学习指导

（上）

沙启敏　主编

中国矿业学院出版社　出版 发行

中国矿业学院印刷厂　印刷

开本787×1092毫米1/32　印张9.625　字数207千字

1988年5月第1版　1988年5月第1次印刷

印数1—7000册

ISBN 7-81021-047-5

O·4(课)　定价：1.60元

技术设计：周立钢　责任校对：周俊平

前　言

高等数学课程在工科院校的教学计划中是一门重要的基础理论课，通过本课程的学习，使同学获得微积分等多方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为今后学习后继课程以及进一步获得数学知识奠定必要的数学基础。为了在传授知识的同时，能通过各个教学环节，逐步培养学生具有抽象概括问题的能力、逻辑推理的能力、空间想象能力和自学能力；特别是注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，根据全国课程教学指导委员会所制定的高等数学课程教学基本要求及我室多年教学经验，特编写这册《高等数学学习指导书》。

指导书分上、下册，上册包含一元函数微积分学及向量代数、空间解析几何，下册包含多元函数微积分及级数、微分方程。

每册均分二大部分，第一部分为学习指导，供同学平时随讲课进度学习时参考，每章后附有自我测验题。第二部分为复习指导，供同学期末考试前总复习时参考。书后附有练习题及自我测验题的答案。

指导书对每章内容均提出一些基本要求，基本要求的高低用不同的词汇加以区别，从高到低，对概念和理论用“理解”、“了解”、“知道”三级区分。对运算方法用“熟练掌握”、“掌握”、“会”或“能”三级区分。“熟悉”相当于“理解”和“熟练掌握”。

1．“理解”、“熟练掌握”、“熟悉”均属于较高

要求。要求对概念要十分清晰并熟悉；对定理不仅要求掌握其条件、结论，还需要掌握它的推导过程以及结论的初步应用；对运算要求熟练；对公式不仅要牢记，而且要会证明。例如，罗尔定理、拉格朗日中值定理、变限积分求导定理等，必须掌握它们的条件、结论、推导过程及其初步应用；牛顿-莱布尼兹公式、求导数与积分的基本公式不仅要会证明，而且能熟练运用。

2．“了解”、“掌握”属于中等要求。要求对概念要清楚；对定理要弄清条件与结论，一般不要求会推导，但要掌握它的初步应用，计算的熟练程度可稍放低。

3．“知道”、“会”或“能”均属较低要求。要求对某些概念要知道，不作深入研究。如二元函数的极限，只需作初步了解而不深究。对某些定理或公式，只需知道它们的结论，会用于简单的计算即可。

本指导书除供大学工科本科生学习高等数学时参考外，还可供大专、电大、函授、夜大、职工业余大学、参加自学考试及报考研究生的同志们参考。

本指导书是在教研室集体编写的辅导材料与复习资料基础上，修改、补充、编写而成，许多同志为本书出版做了很多工作，特在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，时间仓促，定有不少错误与不足之处，望读者批评指正。

编者

一九八七年七月

于中国矿业学院

目　录

第一部分　学习指导

第二部分　复习指导

第一部分　学习指导

第一章
函数与极限

〔基本内容〕

函数概念，函数符号，复合函数，反函数，基本初等函数与初等函数，分段函数，双曲函数。极限概念，极限运算法则，无穷小，无穷大，无穷小与函数极限的关系，极限存在准则，两个重要极限。函数的连续性，闭区间上连续函数的性质。

〔重点〕

函数概念，复合函数，分段函数，极限概念，极限运算法则，函数在一点连续的概念。

〔难点〕

数列极限 $\langle\varepsilon - N\rangle$ 定义，函数极限 $\langle\varepsilon - \delta\rangle$ 定义，用极限定义验证函数的极限，分段函数的连续性。

〔基本要求〕

1. 理解函数概念并能准确地阐述函数的定义。熟悉在公式表示法中函数符号的含意。

2. 能列出简单实际问题中的函数关系（包括分段函数）。

3. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性。

4. 熟练掌握基本初等函数的性质及其图形。

5．理解复合函数及初等函数的概念。掌握将复合函数拆成一串简单函数构成的函数链的方法。了解反函数的概念。

6．了解极限的$\langle\varepsilon-N\rangle$、$\langle\varepsilon-\delta\rangle$定义，（对于给出$\varepsilon$求$N$或$\delta$不作过高要求，但要求初步建立简单的放大或缩小的思想方法，并能在学习过程中，逐步加深对极限思想的理解)。了解函数的左、右极限及其与函数极限的区别与关系。

7．了解无穷小与无穷大的概念，无穷小与函数极限的关系。掌握相当无穷小与高阶无穷小的概念。

8．掌握极限四则运算法则。

9．了解两个极限存在准则。初步会用准则判断极限的存在性。

10．掌握两个重要极限及用它求极限。

11．理解函数在一点连续的概念及$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$与$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$的等价性。

12．会判断函数的间断点及间断点的类型。

13．掌握判断分段函数连续性的方法。

14．了解初等函数的连续性。知道在闭区间上连续函数的性质（最大值和最小值定理、介值定理、根的存在定理）、并会用性质解决一些简单问题（如求方程的根等）。

［思考题］

1．有人说：“x变y也变，则y就是x的函数”，你认为这种说法妥当否？为什么？常数可以看作函数，用函数定义该如何解释？

2．函数定义的两个要素是什么？实际问题中函数定义域如何确定？试举例说明。

4．若由关系式$y=f(x)$解出$x=\phi(y)$，这里f与ϕ有何

关系？$y=f(x)$与$x=\phi(y)$的图形有何关系？$y=f(x)$与$y=\phi(x)$的图形有何关系？

5．如何叙述函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性等概念的确切含意。

6．数列极限定义中的ε与N、函数极限定义中的ε与δ有何关系？它们分别表示什么意义？N与δ是否唯一？为什么？

7．将数列极限定义中“…使得对于$n>N$的一切x_n，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立，…”改为“…存在无穷多个比N大的数n，使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立，…”，是否可以？

8．极限定义中，为什么要求ε是任意给定小的正数，若改为“对某些$\varepsilon>0$”，是否可以？

9．什么是数列收敛的必要条件？什么是数列收敛的充分条件？

10．无穷小与无穷大是不是一个确定的量？为什么零可以作为无穷小？

11．相当无穷小的替代定理是什么？下面求极限的方法，哪一个是正确的？为什么？

（1）$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

（2）由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$，则当$x\to\infty$时，

$\dfrac{1}{x+1}\sim\dfrac{1}{x}$，利用无穷小的替代定理，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0$$

在使用替代定理时，应注意什么问题？

12. 小结求极限的基本方法。

13. 函数在x_0点连续与$x\to x_0$时函数的极限概念有何区别和联系？

14. 函数在一点处不连续，有哪些情况？哪些间断点称为第一类间断点？可去与不可去间断点是依据什么区分的？

15. 左连续与左极限、右连续与右极限有何异同？当函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上满足什么条件时，才能说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

16. 连续函数有哪些运算性质？在闭区间上连续的函数有哪些性质？若区间改为开区间行不行？为什么？

［练习题］

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\arcsin\frac{x}{3}+\frac{1}{x^2-1}$

(2) $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln(2-x)$

(3) $y=\arccos(x-1)+\ln(1-x^2)$

2. 设 $\phi(x)=\begin{cases}2^x & -1\leqslant x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

求$\phi(3)$、$\phi(2)$、$\phi(0)$、$\phi\left(\frac{1}{2}\right)$、$\phi(-0.5)$，并作此函数的

图形。

3. 判断下列函数的单调增减性：

(1) $y=2x+1$

(2) $y=(\frac{1}{2})^{x}$

(3) $y=\log_{a}x$

(4) $y=1-3x^{2}$

4. 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成。

(1) $y=\sqrt{3x-1}$

(2) $y=a\sqrt[3]{1+x}$

(3) $y=(1+\ln x)^{5}$

(4) $y=a^{-x^{2}}$

(5) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

5. 在半径为r的球内嵌入一圆柱（如图1-1），试将圆柱的体积表示为其高的函数，并确定此函数的定义域。

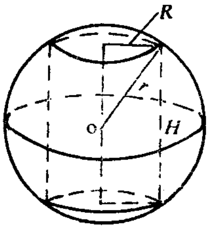

图1-1

6. 拟建一个容积为V的长方体水池，设它的底为正方形。如果池底所用材料单位面积的造价是四周单位面积造价的两倍，试将总造价表示为边长的函数，并确定此函数的定义域。

7. 设生产与销售某产品的总收入R是产量x的二次函数。经统计得知：当产量$x=0$、2、4时，总收入$R=0$、6、8。试确定总收入R与产量x的函数关系。

8．某产品年产量为x台，每台售价为200元，当年产量在500台以内时，可以全部售出，当年产量超过500台时，经广告宣传后，又可以再多出售200台，每台平均广告费20元，生产再多，本年就售不出去了。试确定本年的销售总收入R与年产量x的函数关系。

9．写出下列数列的一般项，并判断其单调性和有界性：

(1) $u_1=10$，$u_2=10\times\frac{11}{2}$，$u_3=\frac{10}{1}\times\frac{11}{2}\times\frac{12}{3}$，…

(2) $u_1=\frac{1}{1\times 2}$，$u_2=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}$，

$u_3=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}$，…

(3) $u_1=1-\frac{1}{2}$，$u_2=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})$，

$u_3=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{8})$，…

(4) $u_1=\sqrt{2}$，$u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，

$u_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…

10．根据极限定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

(5) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0$

11．试求下列函数在x_0点的左、右极限，并由此说明函数的极限是否存在。

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x}$，$x_0 = 0$

(2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$，$x_0 = 0$

(3) $f(x) = \begin{cases} x-2 & x<2 \\ x & x>2 \end{cases}$ $x_0 = 2$，并作图。

(4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & x>0 \\ \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & x\leqslant 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

12．求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$（$m$、$n$为正整数）

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3}\right)$

(5) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \cdots + \dfrac{1}{4n^2 - 1}\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

13．用极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1\pm\frac{x}{n})^n=e^{\pm x}$，

并求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-1})^n$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-2})^{x^2}$

14．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ （α、β为整数）

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$

15．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

16. 求下列数列的极限：

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt{2\sqrt{2}}$，$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$，…

(2) $(1-\frac{1}{2^2}),(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2}),\cdots,(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})$

$\cdots(1-\frac{1}{n^2}),\cdots$

17. 利用极限存在准则，讨论下列数列极限的存在性：

(1) $x_n=\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$

(2) $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$

18. 设$x\to 0$，指出下列函数与x相比，属于哪一类无穷小：

(1) $2x-3x^2+5x^3$

(2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

(3) $\operatorname{tg}x-\sin x$

(4) $\ln(x+a)-\ln a\ (a>0)$

19. 研究下列函数的连续性，若有间断点，说明间断点的类型。

(1) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & |x|\leqslant 1\\ |1-x| & |x|>1\end{cases}$