培养中学生思维能力丛书

高中数学

概念 判断 推理

培养中学生思维能力丛书

高 中 数 学

概念·判断·推理

培养中学生思维能力丛书编写组 编

青 海 人 民 出 版 社

1989年·西宁

责任编辑　张文选
封面设计　任素贤

培养中学生思维能力丛书

《高中数学》

概念 判断 推理

培养中学生思维能力丛书编写组　编

*

青海人民出版社出版

（西宁市西关大街96号）

青海省新华书店发行　　青海新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米　1/32　印张：8.625　字数：186,000

1989年8月第1版　　1989年8月第1次印刷

印数：0,001—6,950

ISBN 7-225-00216-3/G·94　　定价：2.40元

出 版 说 明

随着教育改革的不断深入和发展，中学的教学要求

目　录

引　言

科学技术日新月异的当今世界上，随着我国四化建设的需要与改革的不断深入发展，越来越需要众多的既有知识、又有能力的人才．知识与能力有着密切地联系．有人曾把知识比喻为能力的载体，即没有知识也就不可能有能力，在学习数学的时候，不懂得最基本的数、概念、定理、公式与法则，就不可能进行分析、概括、判断与推理，也就无法进行有效、正确的思维活动，体现出能力来．知识与能力又是两个不同的概念，它们的产生、发展、变化的差异与不平衡是绝对的，即知识与能力不是自然同步发展的关系，因而在学习中出现不少“高分低能”的现象。但是，知识与能力之间的差异与不平衡，并不排斥它的协调与统一，努力实现知识与能力的同步发展，是中学教学改革中的一个重要的课题，也是广大青少年的心愿，不少教师进行着这方面的探索，并取得了一定的成绩．

什么是能力？国内外的不少科学家、心理学家和教育学家为这方面的研究，花费了不少心血，取得了长足的进步．苏联教育心理学家克鲁捷茨基把能力定义为，使一个人迅速、成功地完成某一任务的一种个人特征，而不是一种习惯与技能，并指出“能力只有通过活动才能形成和发展”．有人认为，数学能力的主体是在运用数学知识结构进行数学活动中，表现出的认识特点的概括．国家教委对数学课明确要求“培养学生

的运算能力、逻辑思维能力和空间想象力，以逐步形成运用数学知识来分析问题和解决问题的能力。"

一个学生的智力是由多种要素构成的，但其中思维能力是起着核心作用，处于主导地位。所以，下面我们从概念、判断、推理三个方面谈谈在学习数学过程中，怎样自觉地培养思维能力。

1. 我国著名的教育心理学家潘菽说："数学概念是人脑对现实事物中有关数量的或形的关系的反映，……"并指出："数、形概念的掌握是学习数学的第一步，数学知识掌握的不好，其根源往往是由于数或形的概念不清。"这就说明了什么是数学概念，掌握好概念对学习数学的重要性。

数学中的概念虽然是现实世界中事物数量或形的本质属性的反映，但它又不同于具体的客观事物，具有高度的抽象性与概括性，这就给掌握数学概念造成一定的困难．如果在教学与学习中，对概念重视不够，认为掌握概念只是生吞活剥的背条条，而重点放在解题的方法与技巧上，常常会犯这样或那样的错误．其实，真正有效地提高自己数学能力的途径，正如英国数学家迪恩斯指出的"要实际提高学生的计算技能和牢固的数学技巧，只能是使他们理解基本概念和数学思想，而不是自觉地发展算术计算与代数变换的技巧。"

例如，已知$n\in N$，且$(1+i)^n=(1-i)^n$，求n.

解：$\because (1+i)^n=(1-i)^n$，

$\therefore [(1+i)^4]^{\frac{n}{4}}=[(1-i)^4]^{\frac{n}{4}}$,

即 $(-4)^{\frac{n}{4}}=(-4)^{\frac{n}{4}}$,

故 n为任意自然数.

其实，初中学习有理指数时，只有$a>0$时，$a^{\frac{n}{4}}=\sqrt[4]{a^n}$．在复数中$((1+i)^m)^n=(1+i)^{mn}$，这里$m$，$n\in Z$．而$(-4)^{\frac{n}{4}}$既使在复数中也是没有定义的，所以上面的结论是错误的．这说明，在掌握有理指数的概念时，要注意规定中条件与法则的应用范围，而不能将这个定义与运算法则自然地迁移到复数中来。

又如，判断参数方程

$$\begin{cases} x=\cos^2\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{是参数})$$

的曲线时，由$x=\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-y^2$，即$y^2=-x+1$．如果认为这个参数方程的曲线是抛物线时，就混淆了两种不同性质的方程曲线与互换中未知数取值范围的变化，在参数方程中，$0\leqslant x\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，而$y^2=-x+1$中，$x\leqslant 1$，$y\geqslant 0$．两条曲线x、y的取值范围不同，曲线也不尽相同，显然，参数方程的曲线只是抛物线$y^2=-x+1$的一部分。

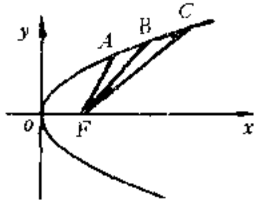
从上面两个例子中可以看出，掌握概念是解题的依据．通过解题又可加深对概念的理解与掌握，能更广泛、更灵活的指导解题，只有这样才能形成一个良性循环，有利于数学知识的掌握。

2.判断是关于对象和它的属性有所肯定或否定的思想．掌握所研究对象的实质及其性质是进行判断的依据．数学中的概念是揭示事物本质属性的，也是一种判断，除概念外，数学中的判断一般都叫做命题，所以命题（包括定理、公理、推理和性质）就是判断．在开始学习立体几何时，由于空间的概念还没有完全建立，空间想象能力还正在发展过程中，在

做判断时，往往不是考虑到对象的全体，而只限于其中的一部分，造成逻辑上的错误。

例如，直线$a \not\subset$平面α，且直线a上有两个点到平面α的距离相等，判断a与α的关系时，不少学生得出$a \parallel \alpha$的结论。如果这两个点在平面α的同一侧，所得出的结论无疑是正确的；如果这两个点在平面α的异侧，则直线a与平面α斜交．

又如下图，在抛物线$y^2 = 2px(p>0)$上的三点A、B、C到焦点F的距离成等差数列．那么判断A、B、C三点的横坐标成等差数列呢或是成等比数列，还是既不成等差数列也不成等比数列．设A、B、C三点的横坐标分别为x_1、x_2、x_3，求出相应的y_1、y_2、y_3，根据条件判断x_1、x_2、x_3之间的关系是比较困难的．如果我们充分利用抛物线上的点到焦点的距离等于它到准线的距离这个重要的性质，把$|FA|$，$|FB|$，$|FC|$成等差数列转化为$x_1+\frac{p}{2}$，$x_2+\frac{p}{2}$，$x_3+\frac{p}{2}$成等差数列，那么就很容易得出x_1，x_2，x_3也成等差数列的结论。



再如，在选择题：已知集合$M=\{(\rho,\theta)\mid\rho=3\}$与集合$N=\{(\rho,\theta)\mid\rho^2=9\}$，那么$M$、$N$的关系是：

A　$M\subset N$；　　　**B**　$M\supset N$；

C　$M=N$；　　　**D**　非上述答案中．

对以上这四个答案，在进行选择时首先应明确：集合M、N是极坐标系中点的集合．M是一个以极点

为圆心，以 3 为半径的圆上点的集合，从集合N中的限制条件可以得出$\rho=\pm 3$.如果不考虑极坐标中点的坐标的概念，显然会得出$M\subset N$的结论．但是，$\rho=-3$也是一个以极点为圆心，以 3 为半径的一个圆，只是当θ从 0 取到2π时，$\rho=3$与$\rho=-3$得到圆上点的顺序不同而已．所以M、N的关系是$M=N$．从而可知，要想正确、迅速地作出判断，必须牢固、准确地掌握概念、定理，充分挖掘学习对象的本质属性。

3. 客观事物是互相联系着的，作为反映客观现实的思维也必然存在着联系．正是由于这种思维之间的联系，才有可能使我们“由此及彼”，“由表及里”，使思想得以推进，使认识得到深入、扩大．推理就是根据思维之间的联系，从一种思想得出另一种新思想的逻辑过程或方法，即从判断的一系列联系中得到新的判断。

在数学学习中，命题的证明、式子的化简与计算都属于推理的范畴．因而，逻辑思维、推理能力是学习数学中其他各种能力的集中表现．在学习数学的过程中对推理感到困难的主要原因是：① 基础知识薄弱：头脑中储存的信息不多，也就无从对这些信息进行加工、处理，推导出新的判断；虽然也掌握了一些必要的知识与方法，没有形成一个内在联系的知识系统，所学的概念、定理、公式与法则等杂乱无章的储存下来，其中还夹杂着一些模糊、甚至是错误的东西．当需要提取一些信息进行加工时，造成思维混乱，推导困难；② 学习方法不对：在学习过程中，只注意接受教师提供的结论性的内容，忽视产生这些内容所进行的有关数学活动．这样，获得的数学理论不是以通过自己的发现为主要方式获取

的，习惯于被灌输．自然，对这些数学理论，尤其是获取这些理论的方法的认识与领会是肤浅的。

等差数列前 n 项和的公式的推导方法是一种重要的思维方法，在学习这个公式时，教师与学生对推导公式的过程与方法还是重视的，随着时间的迁移，学习内容的增多，对这种方法与思想就慢慢地淡模了，给推理、计算造成困难．

例如，在一个有限项的等差数列中，前四项的和是174，后四项的和是134，而各项的和是231，求这个数列的项数、首项与公差．如果单纯用等差数列的通项公式、和的公式推导，还是比较困难的．

因

$$a_1+a_2+a_3+a_4=174,$$

$$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=134,$$

由等差数列中与首尾等远项的和相等，

即 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=$

$$4(a_1+a_n)=308,$$

$$a_1+a_n=77$$

又

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=231,$$

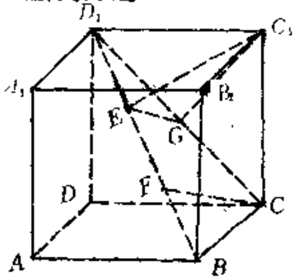
所以 $n=6$．从而，不难求出 $a_1=51$，$d=-5$

从这个例子可以看出，无论是学习数学理论或者例题时，都要解决：学习的内容是什么？获得这一数学理论或解决这个例题的逻辑依据是什么与如何寻得这一数学理论或解决这一例题的思维过程。

推理能力的提高还有赖于数学活动经验的积累、不善于

学习的人，学过不少数学理论，做过不少练习，而留存脑子中的东西却少得可怜；善于学习的人，每学过一种数学理论或每做过一道较典型的练习之后，都认真地进行反思，以便从这一理论或练习中获取更多的信息，来充分发挥这些知识与方法的再生潜力，做到举一反三、触类旁通.

例如右图，在正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，$\triangle C_1D_1B$所在的半平面为α，$\triangle BD_1C$所在的半平面为β，BD_1所在的直线是α与β的交线，求二面角$\alpha—BD_1—\beta$的度数.



解：设$D_1C_1=1$，则$C_1B=\sqrt{2}$，$D_1B=\sqrt{3}$．作$C_1E\perp D_1B$，

在直角$\triangle C_1D_1E$中，$C_1E=\sqrt{\frac{2}{3}}$，

作$CF\perp D_1B$，同理 $CF=\sqrt{\frac{2}{3}}$．

$D_1E=\sqrt{D_1C_1^2-C_1E^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

同理：$BF=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

即　$D_1E=EF=FB$.

过E作FC的平行线EG，

∵　E是D_1F的中点，∴　G是D_1C的中点.

连结 C_1、G，$C_1G=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$GE=\frac{1}{2}CF=\sqrt{\frac{1}{6}}$．

$\because \quad C_1G^2+EG^2=C_1E^2$,

$\therefore \quad \triangle C_1EG$ 是直角三角形,

又 $EG=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}C_1E$,

$\therefore \quad \angle C_1EG=60°$.

$\because \quad CF\perp D_1B$, $EG \parallel CF$,

$\therefore \quad EG\perp D_1B$.

$\angle C_1EG$ 是所求二面角的平面角,

故所求的二面角为$60°$.

学习这个例题后,我们从中学到些什么方法,哪些信息还有再生的潜能,不值得认真的反思吗?

加强一题多解的训练,即从多种角度来认识问题、解决问题,是培养自己发散思维与提高逻辑推理能力的有效手段。

例如,椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$($ab\neq 0$,且$a>b$)和直线$Ax+By=1$($AB\neq 0$)交于$P$、$Q$两点,求$OP\perp OQ$的条件.我们可以在直角坐标平面中用普通方程来解决问题;也可以把椭圆化为参数方程的形式,求它与直线$Ax+By=1$的交点P、Q,再求$OP\perp OQ$的条件;还可以用复数来解决问题,有兴趣的读者不妨试一试.其条件为:

$A^2a^2+B^2b^2-1>0$ 且$a^2+b^2=a^2b^2(A^2+B^2)$.

当然,正确地掌握概念、准确地进行判断与逻辑推理能力的不断提高不能毕其功于一役。但是,只要我们学习的方法得当,持之以恒,掌握知识的水平与分析问题、解决问题的能力肯定会有显著提高的。

本书对高中数学中每章的重要概念、定理进行了较深刻

的剖析，并配合一定数量例题。每个例题都从解题思路或常犯的错误方面进行了分析。不仅可以帮助读者较好地掌握高中数学的内容，也将是读者提高自己判断、推理、分析问题与解决问题能力的好助手。由于对问题的叙述简单明了，通俗易懂，注意了启发读者掌握知识与解题的思路、规律，本书也适合广大自学青年阅读，书中的不少内容与观点是作者多年来教学经验与教学研究的总结与体会，对刚参加教学工作的青年教师来说，也是一本很好的教学参考资料。

第一篇　代　　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、概念

1. 集合

集合是数学中的原始概念之一，不能用更简单的概念来定义．课本中“每一组对象的全体形成一个集合”，只是对集合的描述性说明．过去我们研究的对象（数、式、方程、函数、图形等）都是一个个单独的对象，如果把具有某种性质的对象看为一个整体，就构成了集合，这些对象就是集合的元素．在中学阶段，对于一个给定的集合，必须具有元素的确定性与元素互异两个特征．元素与集合的关系是属于或不属于的关系，用 $\in$ 或 $\notin$ 表示．

子集　如果集合 A 的任一个元素都是集合 B 的元素，那么 A 就叫做 B 的子集，记作 $A\subseteq B$．子集的定义中没有用集合的由部分元素组成的这个集合叫子集，是考虑到任何集合是它本身的子集与空集是任何集合的子集这两点的．

空集　空集虽不含任何元素，但它在集合论中占有重要的地位与广泛的应用．如方程 $x^2-2x+3=0$ 无实根，可用这个方程的解集是空集表示；两个平面平行也可以用空集与集合的其他关系来表示，等等．

应特别注意：$\in$、$\notin$是表示元素与集合关系的符号，$\subseteq$、$\subset$是表示集合与集合之间的符号。

课本中用图 1—1 表示集合A是集合B的真子集. 这种用平面封闭曲线象征性地表示集合的图形叫做文氏图. 用文氏图表示集合的方法，可以形象、直观地理解元素与集合、集合与集合之间的关系，在学习与练习中要经常使用.

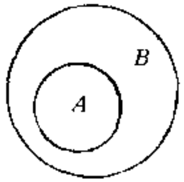


图 1－1

两个集合相等　课本中的叙述是“如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，则这两个集合相等，记作$A=B$”，没有用集合A与集合B的元素完全相同来定义. 这是因为当集合A与集合B都是无限集合时，很难判断这两个集合的元素是否完全相同，从而也就不能判断这两个集合是否相等.

例如，集合$A=\{x\mid x=4k\pm 1,k\in Z\}$，集合$B=\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$，这两个集合是相等的. 但无论把$k$取多少具体的数值，都难以说明这两个集合的元素完全相同. 而对任意一个$x\in A$：当$x=4k+1$时，$x=2(2k)+1$，显然$x\in B$；当$x=4k-1$时，$x=2(2k-1)+1$，显然$x\in B$　所以$A\subseteq B$　另一方面，当$x\in B$，即$x=2k+1$时：如果k是偶数，$k=2m$（$m\in Z$）时，$x=2k+1=4m+1$，显然$x\in A$；如果k是奇数，$k=2m+1$（$m\in Z$）时，$x=2k+1=2(2m+1)+1=4(m+1)-1$，显然$x\in A$，所以$B\subseteq A$，故$A=B$. 有了集合相等的概念，同解不等式可定义为：如果两个不等式的解集相等，则这两个不等式为同解不等式.

交集　交集是集合论初步中的一个重要概念，课本中的

定义为“所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做A、B的交集，记作$A\cap B$，即$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且$x\in B\}$”．从这个定义中不难看出，$A\cap B$中的元素是集合A与集合B的所有公共元素．另外，设集合A是所有具有性质P_1的元素组成的，集合B是所有具有性质P_2的元素组成的，那么集合$A\cap B$中的元素同时具有性质P_1、P_2．例如设集合$A=\{$过P_1点的圆$\}$，$B=\{$过P_2点的圆$\}$（$P_1\neq P_2$），那么$A\cap B$是由所有过P_1、P_2两点的圆组成的集合．又如，某中学所有男生组成的集合为A，所有共青团员组成的集合为B，那么$A\cap B$中的元素就是这所中学里所有男共青团员组成的集合．

并集　集合A与集合B的并集，即$A\cup B$是由集合A、B中的所有元素组成的一个集合．并集的概念在日常生活中也屡见不鲜．如集合A是甲商店中出售商品的品种：｛百货，五金，家电｝，集合B是乙商店中出售商品的品种：｛百货，家电，化工，纺织品｝．当这两个商店合并为一个商店时，合并商店出售商品的品种（即$A\cup B$）为：｛百货，五金，家电，化工，纺织品｝．另外，集合A、B中的元素分别具有性质P_1、P_2，那么$A\cup B$中的元素要么具有性质P_1，要么具有性质P_2，即由具有性质P_1、P_2之一的所有元素组成的集合．如方程$x-2=0$的解集为A，方程$x+3=0$的解集为B，那么方程$(x-2)(x+3)=0$的解集为$A\cup B$

全集　虽然集合的元素有一定的随意性，而在实际中，我们总是把研究的对象局限在一定的范围之内．如果把矩形作为特殊的平行四边形来研究，即把｛矩形｝作为｛平行四边形｝的子集，这时全集为｛平行四边形｝．｛矩形｝也可以