21世纪警官高等教育系列教材

线性代数

主编　李排昌　左　萍

中国人民公安大学出版社

21世纪警官高等教育系列教材

线性代数

主编　李排昌　左　萍

中国人民公安大学出版社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李排昌，左萍主编 .—北京：中国人民公安大学出版社，2005.1

（21 世纪警官高等教育系列教材）

ISBN 7－81087－886－7

Ⅰ.线... Ⅱ.①李...②左... Ⅲ.线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 134311 号

线性代数

XIANXING DAISHU

主编 李排昌 左 萍

出版发行：中国人民公安大学出版社
地　　址：北京市西城区木樨地南里
邮政编码：100038
经　　销：新华书店
印 刷 厂：北京市泰锐印刷厂

版　　次：2005 年 1 月第 1 版
印　　次：2005 年 1 月第 1 次
印　　张：5.625
开　　本：850 毫米×1168 毫米 1/32
字　　数：141 千字
印　　数：0001～2000 册

ISBN 7－81087－886－7/G·208
定　　价：12.00 元

本社图书出现印装质量问题，由发行部负责调换
联系电话：（010）83903254

E－mail：cpep@public. bta. net. cn
www.jgclub.com.cn

线 性 代 数

主　编　李排昌　左　萍
副主编　石瑞民　王云鹤　熊允发
　　　　徐　毅　蔡　瑾　高朋香

前　　言

在如火如荼的高等教育改革中，教学改革是核心，而教学内容和课程体系改革又是难点。作为教学内容改革的组成部分，教材内容的整合与更新的重要性不言而喻。

公安大学现行本科专业公安业务教材基本上是20世纪90年代初编写的。这些教材在确立公安学科的地位，培养合格人才以及指导公安工作实践等方面曾发挥过重要作用。然而，形势的发展使得这些教材必须修订或重新编写。其一，在1999年6月召开的第三次全国教育工作会议上，党中央和国务院作出了《关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》。1999年11月，第二次全国公安教育工作会议就深化公安教育改革、全面实施素质教育作出了新的部署。我们的教材建设必须在此基础上重新定位。其二，我校许多课程的教材涉及法律问题，而近十年来，我国颁布和修订的法律比较多，教材的编写和修订必须与新的法律相一致。其三，我国正处于计划经济向社会主义市场经济转型时期，社会生活变化迅猛，公安机关面临的斗争形势非常严峻，而我们的理论却跟不上形势发展，有些理论严重滞后于公安工作实际，无法指导公安工作实践，必须予以修正。鉴于此，公安大学党委适时作出决定，编写这套“21世纪警官高等教育系列教材”。

此次教材的编写与修订，将贯彻以下指导思想：从注重知识传授向重视能力培养转化；既充分反映当前公安工作和队伍建设的实际，贴近警务实践，又要具有前瞻性、预见性；从实践中来，又高于实践，形成比较科学、完整的体系，做到理论性、科

学性与较强的针对性、实用性的统一。

本套教材将注重“高水平”与“适用性”的有机结合，突出编写质量和社会效益。首先，编写工作将以我校在全国公安系统具有影响的学科带头人领衔，邀请各级公安部门业务领导、专家和骨干参加，形成实力强大的编写阵容。其次，在教材编写过程中，将注意吸收改革开放以来我国公安理论研究的最新学术成果，关注国际学术发展最新动向，使教材内容站在 21 世纪初的学术前沿。再次，针对本科教学和新时期本科学生的特点，将学术性、新颖性、可读性有机结合起来，注意运用比较生动的案例、简明流畅的语言阐释理论。最后，按照“编审分离”原则，聘请学术造诣高、实践经验丰富的学者、专家审稿，严把教材编写质量关。

我们期望并相信，经过编写者、审稿者、出版者的共同努力，这套 21 世纪公安业务新教材将以其质量高和特色鲜明而成为新世纪奉献给读者们的精品。

中国人民公安大学
教材编审委员会
2003 年 12 月

编者的话

本教材共四章，内容包括行列式、矩阵、向量空间、特征值与二次型。书中结合内容配备了一定数量的例题，每章均附有习题，非常利于学生的学习和巩固。

本教材严格按照《工程数学教学大纲》有关线性代数部分的要求编写而成。在本教材的编写过程中，我们既注意理论的严谨性与先进性以及结构体系的逻辑性与完整性，又兼顾了易教易学的特点。本教材可作为高等院校工科专业和管理专业线性代数课程的教材，也可供其他专业大学生与工程技术人员参考。

本教材由李排昌、左萍任主编，参加本教材编写、讨论修改、审阅校对工作的还有石瑞民、王云鹤、熊允发、徐毅、蔡瑾、高朋香。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第一章 行 列 式

无论是数学理论本身还是在其他的学科分支中，线性方程组的求解问题都具有重要的理论意义和实际意义。因此，寻找有效的求解方法以及判断解的存在方法就成了线性代数所讨论的重要问题，而行列式是研究它们的一种重要工具。本章在讨论 2 阶、3 阶行列式的基础上，引出 n 阶行列式的概念，讨论 n 阶行列式的性质及行列式的计算方法，最后应用 n 阶行列式理论解标准形式的 n 元线性方程组。

如无特别声明，本书涉及的数一般是实数。

§1 行列式的概念

考虑**标准形式的 n 元线性方程组**（未知数个数与方程个数相等）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

已知数 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）称为系数，已知数 b_1，b_2，…，b_n 称为常数项，而 x_1，x_2，…，x_n 称为未知数，也称为变元。

满足（1－1）式的一组数 x_1，x_2，…，x_n 称为（1－1）式

的一个解，其求解过程称为解线性方程组。

关于（1－1）式的求解方法是多样的，但其原理都是通过消去变元使（1－1）式化为较为简单的同解方程组（称为**消元法**）。显然，（1－1）式的解与其系数和常数项有关。用消元法化简(1－1)式的过程只是对同一未知数的系数和对应常数项之间的运算，只要记住系数和对应常数项的位置（哪个方程，哪个未知数，哪个常数项）就行了。因此，我们把求解（1－1）式这样一个纯代数问题与几何概念（系数之间的位置关系）结合起来，从整体上考虑全体系数以及对应常数项之间的关系，就产生了有关求解（1－1）式的重要理论和实际有效的工具——行列式。

一、2 阶、3 阶行列式

给定标准形式的 2 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-2}$$

用加减消元法从方程组（1－2）中消去一个未知数得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases} \tag{1-3}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq0$，则方程组（1－2）式有惟一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{1-4}$$

（1－4）式中的分母相同，而且分母只与方程组中 x_1、x_2 的系数有关，若把这些系数按其在原方程组中的位置写出，可便于我们记忆（1－4）式。为此，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，称为 2 **阶行列式**，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{1-5}$$

我们将 D 称为方程组的**系数行列式**，其中 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}称为这个 2 阶行列式的**元素**；横排称为行，竖排称为列；从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**。2 阶行列式按**对角线规则**计算（主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积）。

若将行列式 D 中的第 1 列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

同理将 D 中的第 2 列元素换成方程组中的常数项，得到行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

分别表示代数和 $b_1a_{22}-b_2a_{12}$与 $a_{11}b_2-a_{21}b_1$。于是（1-4）式可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-6}$$

例 1 在平面解析几何中，求两直线 $2x+y=5$，$x-3y=-1$ 的交点。

解 此题等价于求 2 元线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-3y=-1 \end{cases}$$

的解。因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

所以，方程组的解是

$$x = \frac{D_1}{D} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = 1$$

因此，两直线的交点为（2，1）。

3 元线性方程组的标准形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1-7) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (1-8) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (1-9) \end{cases}$$

与 2 元线性方程组类似，用加减消元法消去其中的两个未知数，为此：

$$\begin{aligned} &\text{式}\ (1-7) \times (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\ +&\text{式}\ (1-8) \times (a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) \\ +&\text{式}\ (1-9) \times (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned}$$

可消去 x_2、x_3；同理，用适当的加减消元法可消去 x_1、x_3，消去 x_1、x_2。此时，令

$$\begin{cases} D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ D_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{13}b_2a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 \\ \qquad - a_{13}a_{22}b_3 - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} \\ D_2 = a_{11}b_2a_{33} + a_{13}a_{21}b_3 + b_1a_{23}a_{31} \\ \qquad - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} \\ D_3 = a_{11}a_{22}b_3 + b_1a_{21}a_{32} + a_{12}b_2a_{31} \\ \qquad - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 \end{cases} \qquad (1-10)$$

则原方程组的解满足下述方程组

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \\ Dx_3 = D_3 \end{cases} \tag{1-11}$$

若 $D\neq0$，则原方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1-12}$$

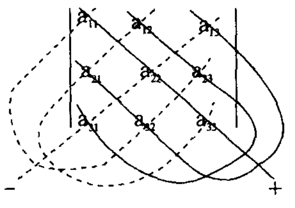
为了便于记忆 3 元线性方程组的解（1－12）式，把方程组的全部系数按其在原方程组中的位置写出并引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$，**称为 3 阶行列式**，即

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \tag{1-13}$$

对 3 阶行列式 D 有如下的**图示规则**



$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

3 阶行列式含有 3 行 3 列共 9 个元素，（1－13）式等号右端

的代数式叫做3阶行列式的展开式。式中共6项（6=3!，恰为3个数码1，2，3的所有全排列的个数），每一项恰为行列式中3个位于不同行和不同列的元素的乘积，并带有正、负号。这3个元素的第1个下标人为地排成自然顺序（1 2 3）后，各项对应的第2个下标排序为

$$(1\ \ 2\ \ 3),\ (2\ \ 3\ \ 1),\ (3\ \ 1\ \ 2)$$
$$(3\ \ 2\ \ 1),\ (1\ \ 3\ \ 2),\ (2\ \ 1\ \ 3)$$

它们恰为3个数码1，2，3的所有6=3!个全排列，且前3!/2=3项带正号，后3!/2=3项带负号。实际上，6项中各项前面所带的正、负号与每项中3个因子的第2个下标的排列顺序有关（以后会详细讨论）。把D中的a_{11}，a_{21}，a_{31}依次换为b_1，b_2，b_3就得到D_1，把D中的a_{12}，a_{22}，a_{32}依次换为b_1，b_2，b_3就得到D_2，把D中的a_{13}，a_{23}，a_{33}依次换为b_1，b_2，b_3就得到D_3。

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

由此，标准形式的3元线性方程组的解（1-12）式可借助于3阶行列式来记忆（图示规则）。

例2 求3阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$的值。

解

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$
$$=2\times4\times5+(-1)\times1\times2+2\times3\times(-6)$$
$$-2\times4\times2-2\times1\times(-6)-(-1)\times3\times5=13$$

例3 在空间解析几何中，求3个平面，$x-y+2z=13$，$x+y+z=10$，$2x+3y-z=1$的交点。

解 此题等价于求3元线性方程组

$$\begin{cases} x-\ \ y+2z=13 \\ x+\ \ y+\ \ z=10 \\ 2x+3y-\ \ z=1 \end{cases}$$

的解。因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times(-1)+(-1)\times1\times2+2\times1\times3-2\times1\times2$$
$$-1\times1\times3-(-1)\times1\times(-1)=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-35$$

因此

$$x=\frac{D_1}{D}=1,y=\frac{D_2}{D}=2,z=\frac{D_3}{D}=7$$

所以，3个平面的交点为（1，2，7）。

根据前面的讨论，可以猜想：标准形式的 n 元线性方程组（1-1）式通过适当的加减消元法，可以化简为下述的方程组［确切地说，（1-1）式的解满足下述方程组］

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \\ \cdots \quad \cdots \\ Dx_n = D_n \end{cases} \tag{1-1)'$$

其中

$$D = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

共对 n! 项求和，每项的 n 个因子的第 1 个下标排成自然序 $(1\ 2\ 3 \cdots n)$,而第 2 个下标恰为 n 个数码 1，2，…，n 的 n! 个全排列（$i_1 i_2\cdots i_n$），每项前面的正、负号与该项中 n 个因子的第 2 个下标的排列顺序有关。把 D 中的 a_{1j}，a_{2j}，…，a_{nj} 用 (1-1)式中的常数项 b_1，b_2，…，b_n 对应代换就得到 D_j（$j=1, 2, \cdots, n$）。

为了弄清（1-1)′式中 D 的各项前面的正、负号与该项中 n 个因子的第 2 个下标的排列之间的关系，也为了证实我们的猜想，引入下述概念。

二、排列的逆序数

定义 1 在 n 个数码 1，2，…，n 的一个全排列中，如果某个小数排在了某个大数之后，就说这个排列中出现了一个**逆序**。一个全排列（$i_1 i_2\cdots i_n$）中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $\sigma(i_1 i_2\cdots i_n)$。

根据定义，可知一个排列（$i_1 i_2\cdots i_n$）的逆序数为

$$\sigma(i_1 i_2\cdots i_n) = \sum_{k=1}^{n}(i_k \text{ 后面比 } i_k \text{ 小的数字的个数})$$

例如，对 5 个数码 1，2，3，4，5 的 3 个全排列

$$\sigma(1\ 5\ 4\ 3\ 2) = 6$$
$$\sigma(1\ 2\ 3\ 5\ 4) = 1$$