全国高等教育自学考试教材

高等数学习题解答

上册

李茂生 龙幼娟 闵泰山 编

GAODENG SHUXUE XITI JIEDA

北京邮电大学出版社

全国高等教育自学考试教材

高等数学习题解答

上册

李茂生　龙幼娟　闵泰山　编

北京邮电大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解答(上册)/李茂生等编. －北京：北京邮电大学出版社，1999. 8

全国高等教育自学考试教材

ISBN 7-5635-0376-5

Ⅰ. 高 Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学－高等教育－自学考试－解题

Ⅳ. O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 25483 号

出版发行：北京邮电大学出版社　电话：（010）62282185（发行部）

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号　　邮编：100876

经　　销：各地新华书店经售

印　　刷：河北省高碑店市印刷厂

开　　本：850 mm × 1 168 mm　1/32

印　　张：7.25

字　　数：181 千字

版　　次：1999 年 8 月第 1 版　1999 年 8 月第 1 次印刷

印　　数：1—5 100 册

书　　号：ISBN 7-5635-0376-5/O·26

定　　价：12.00 元

前　言

本书是西安交通大学出版社出版的全国高等教育自学考试教材《高等数学》(陆庆乐编)的习题解答.

由于大部分参加自学考试的学生,在自学时,尤其是在解题时会遇到很多困难,又没有老师辅导,为了帮助考生自学,我们编写了这本习题解答.本书除了教材中及个别较简单的习题外,其余习题都给出了较详细的解题过程.考生在解题时应先进行独立思考,再看解答,这才有助于解题能力的提高.

教材中各章都有小结和学习指导,为了节省篇幅,我们没有再写这些内容.书后附有1997年、1998年两年的考题及两套模拟试题,供考生参考.

参加本书编写工作的有北京轻工业学院闵泰山教授,北京邮电大学函授学院李茂生、龙幼娟副教授.

由于时间仓促,书中可能会有不妥之处,望读者给予指出.

编　者

一九九九年五月

目　录

前言
第一章　函 数
习题 1-1 ……………………………………………………（1）
习题 1-2 ……………………………………………………（4）
习题 1-3 ……………………………………………………（7）
习题 1-4 ……………………………………………………（10）
习题 1-5 ……………………………………………………（12）
习题 1-6 ……………………………………………………（14）
自我检查题 ……………………………………………………（15）
总习题 ……………………………………………………（17）
第二章　极限与连续
习题 2-1 ……………………………………………………（22）
习题 2-2 ……………………………………………………（27）
习题 2-3 ……………………………………………………（31）
习题 2-4 ……………………………………………………（35）
习题 2-5 ……………………………………………………（38）
习题 2-6 ……………………………………………………（39）
自我检查题 ……………………………………………………（45）
总习题 ……………………………………………………（48）
第三章　导数与微分
习题 3-1 ……………………………………………………（55）
习题 3-2～3-3 ……………………………………………………（59）
习题 3-4 ……………………………………………………（69）

习题 3-5 …………………………………………………………（72）
习题 3-6 …………………………………………………………（76）
习题 3-7 …………………………………………………………（79）
自我检查题 ………………………………………………………（81）
总习题 ……………………………………………………………（84）
第四章　导数的应用
习题 4-1 …………………………………………………………（90）
习题 4-2 …………………………………………………………（93）
习题 4-3 …………………………………………………………（99）
习题 4-4 …………………………………………………………（102）
习题 4-5～4-6 ……………………………………………………（112）
习题 4-7 …………………………………………………………（114）
自我检查题…………………………………………………………（119）
总习题………………………………………………………………（122）
第五章　不定积分法
习题 5-1 …………………………………………………………（133）
习题 5-2(一) ……………………………………………………（135）
习题 5-2(二) ……………………………………………………（140）
习题 5-3 …………………………………………………………（145）
习题 5-4(一) ……………………………………………………（147）
习题 5-4(二) ……………………………………………………（151）
习题 5-4(三) ……………………………………………………（153）
自我检查题…………………………………………………………（155）
总习题………………………………………………………………（158）
第六章　定积分及其应用
习题 6-1 …………………………………………………………（164）
习题 6-2 …………………………………………………………（165）
习题 6-3 …………………………………………………………（169）

习题 6-4(一) …………………………………………………… (173)
习题 6-4(二) …………………………………………………… (177)
习题 6-5 ……………………………………………………… (179)
习题 6-6(一) …………………………………………………… (184)
习题 6-6(二) …………………………………………………… (190)
习题 6-6(三) …………………………………………………… (198)
习题 6-6(四) …………………………………………………… (200)
习题 6-6(五) …………………………………………………… (202)
习题 6-6(六) …………………………………………………… (206)
自我检查题……………………………………………………… (209)
总习题…………………………………………………………… (213)

第一章　函　数

习题 1-1

1 ~ 4 题见书中答案.

5. 试计算下列各函数在各指定点处的值.

(1) 设 $f(x)=x^2-3x+7$, 求 $f(x+h)$, $f\left(\frac{1}{h}\right)(h\neq 0)$, $f(2a)$, $f(-2)$.

解　$f(x+h)=(x+h)^2-3(x+h)+7$.

$$f\left(\frac{1}{h}\right)=\left(\frac{1}{h}\right)^2-3\left(\frac{1}{h}\right)+7=\frac{1}{h^2}-\frac{3}{h}+7.$$

$$f(2a)=(2a)^2-3(2a)+7=4a^2-6a+7.$$

$$f(-2)=(-2)^2-3(-2)+7=17.$$

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)$, $a>1$, 求 $f(1)$, $f\left(\frac{a}{2}\right)$, $f(2a)$.

解　$f(1)=1-\frac{a-1}{\sqrt{a^2-2a+1}}=1-1=0$.

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{a^2}\left(1-\frac{a-\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2-2a\left(\frac{a}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right)=\frac{4}{a^2}(1-1)=0.$$

$$f(2a)=\frac{1}{4a^2}\left(1-\frac{a-2a}{\sqrt{a^2-4a^2+4a^2}}\right)=\frac{1}{4a^2}(1+1)=\frac{1}{2a^2}.$$

6. 如果 $g(x)=\sqrt{x}$,证明

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

证明 $$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}=$$

$$\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

7. 指出下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{5-2x}+\dfrac{1}{x}$.

解 x 必须满足

$$\begin{cases}5-2x\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}\quad 即 \begin{cases}x\leqslant \dfrac{5}{2}.\\ x\neq 0.\end{cases}$$

故定义域为$(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{5}{2}\right]$.

(2) $y=\sqrt{1-|x|}$.

x 必须满足 $1-|x|\geqslant 0$,即 $|x|\leqslant 1$,故定义域为$[-1,1]$.

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$.

x 必须满足$x^2-x\neq 0$,即 $x\neq 0$ 与 $x\neq 1$,故定义域为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

(4) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$.

x 必须满足 $|x|-x\neq 0$,即 $|x|\neq x$.

当 $x\geqslant 0$ 时,$x\neq x$,或当 $x<0$ 时,$-x\neq x$,即 $x\neq 0$.故定义域为$(-\infty,0)$.

(5) $y = \lg x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

x 必须满足$\begin{cases} x > 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} x > 0. \\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}. \end{cases}$ k 为整数.

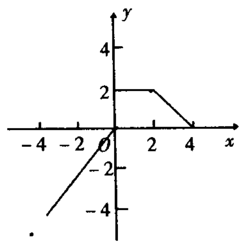
故定义域为 $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$(k 为正整数) 的正数.

(6) $y = \dfrac{1}{x}\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

x 必须满足$\begin{cases} x \neq 0, \\ \dfrac{1-x}{1+x} > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 - x > 0, \\ 1 + x > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 - x < 0, \\ 1 + x < 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x \neq 0, \\ x < 1, \\ x > -1, \end{cases}$

故定义域为$(-1,0) \cup (0,1)$.



8. 已知$f(x) = \begin{cases} x & -4 \leqslant x < 0, \\ 2 & 0 \leqslant x < 2, \\ 4 - x & 2 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$

作出这函数的图形, 并求 $f(-2)$,$f(0)$,$f(1)$,$f(3.95)$ 的值.

解 $f(-2) = -2$.

$f(0) = 2$.

$f(1) = 2$.

$f(3.95) = 4 - 3.95 = 0.05$.

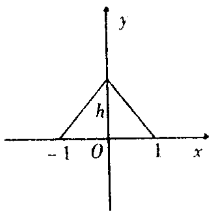
9. 设 $y = \sin x$,证明 $\Delta y = 2\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$.

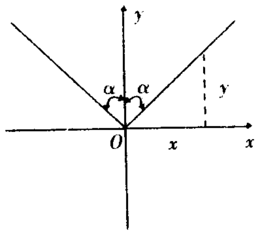
证明 $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$

$$2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=$$

$$2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

10. 写出下列图形所示的函数.





解 $$y=\begin{cases} h(1-|x|) & |x|\leqslant 1, \\ 0 & |x|>1, \end{cases}$$

即 $$y=\begin{cases} h(1+x) & -1\leqslant x<0, \\ h(1-x) & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0 & |x|>1. \end{cases}$$

$$y=|x|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=|x|\operatorname{tg}\alpha,$$

即 $$y=\begin{cases} x\operatorname{ctg}\alpha & x\geqslant 0, \\ -x\operatorname{ctg}\alpha & x<0. \end{cases}$$

习题 1-2

1. 验证下列各函数是单调函数.

(1) $x^3(-\infty,+\infty)$.

因为当 $x_2>x_1$ 时,

$$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=$$

$$(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0,$$

所以 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

(2) $\cos x\quad(0,\pi)$.

因为当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时,

$$\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}<0,$$

所以 $y=\cos x$ 在$(0,\pi)$内单调减少.

(3) $\sqrt{x}\quad(0,+\infty)$.

因为当 $0<x_1<x_2$ 时,

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}>0,$$

所以 $y=\sqrt{x}$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

2. 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在包含原点的区间内是否有界?

无界.因为 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处附近无限变大.

3. 证明 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 是有界函数.

证明 当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,恒有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1,$$

故 $f(x)$ 为有界函数.

4. 如果 $f(x)$ 在区间 I 满足不等式 $f(x)\leqslant M$,那么称 $f(x)$ 在 I 为上有界;如果 $f(x)$ 在区间 I 满足不等式 $f(x)\geqslant m$,那么称 $f(x)$ 在 I 为下有界(M,m 均为常数).试证:函数在区间 I 有界的充分与必要条件是:函数在 I 既上有界又下有界.

证明 若 $f(x)$ 在区间 I 有界,即存在常数 $M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M$,即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,故 M 与 $-M$ 分别为 $f(x)$ 在 I 上的上界与下界;反之,若 $f(x)$ 在区间 I 上有上界 M 和下界 m,即

$$f(x) \leqslant M \text{ 且 } f(x) \geqslant m.$$

取 $M^* = \max(|M|, |m|)$,则

$$-M^* \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant M^*,$$

即

$$|f(x)| \leqslant M^*,$$

也就是 $f(x)$ 在 I 上有界.

5. 举例说明单调增函数是否一定无界?

解 不一定.例如 $y = \operatorname{arctg} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增,但 $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$.

6. 下列函数中哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些既不是偶函数也不是奇函数?

(1) $y = \operatorname{tg} x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

因为 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $y = \operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内为奇函数.

(2) $y = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (-3,4)$.

因为区间不对称,所以 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $(-3,4)$ 内为非奇非偶函数.

(3) $y = |x-1|$.

因为 $|-x-1| = |x+1| \neq \pm |x-1|$,所以 $y = |x-1|$ 为非奇非偶函数.

(4) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$.

因为

$$[1+(-x)]^{\frac{2}{3}} + [1-(-x)]^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2},$$

所以 $y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$ 为偶函数.

(5) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

因为 $f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=$

$$\lg\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$-\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

6. $f(x)=(x^2-x)/(x-1)$.

因为此函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,不对称于原点,所以 $f(x)=(x^2-x)/(x-1)$ 为非奇非偶函数.

7. $\sin^2 x$ 是不是周期函数?如果是,求它的周期.

$$y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

故它是周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$ 的周期函数.

8,9 题见教材中答案.

10. 函数$f(x)=C$(C为常数)在$(-\infty,+\infty)$内是不是周期函数?

函数 $f(x)=C$ 在$(-\infty,+\infty)$内是周期任意的周期函数.

习题 1-3

1. 求下列函数的反函数.

(1) $y=10^x-1$.

解 $\qquad 10^x=y+1,x=\lg(y+1),$

即 $\qquad y=\lg(x+1)\quad(x>-1).$

(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解 $\qquad 2^x=2^xy+y,\ 2^x=\dfrac{y}{1-y},$

即 $$x = \log_2 \frac{y}{1-y},$$

得反函数为 $$y = \log_2 \frac{x}{1-x} \quad (0 < x < 1).$$

(3) $y = \log_{10}(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

解 $$10^y = x + \sqrt{x^2 - 1}, \tag{1}$$

又 $$y = \log_{10} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = -\log_{10}(x - \sqrt{x^2 - 1}),$$

得 $$10^{-y} = x - \sqrt{x^2 - 1}. \tag{2}$$

由(1) + (2) 得

$$x = \frac{10^y + 10^{-y}}{2}$$

即 $$y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2. 设 $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-2}$,求 $f^{-1}(x)$.

解 由 $y = \dfrac{2x+3}{4x-2}$ 解得 $x = \dfrac{3+2y}{4y-2}$,即

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{4x-2} \quad \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

3. 设 $f(x) = x^2 - x, \varphi(x) = \sin 2x$,写出 $f[f(x)], f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$ 的表达式.

解 $$f[f(x)] = [f(x)]^2 - f(x) =$$
$$(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) =$$
$$(x^2 - x)(x^2 - x - 1).$$
$$f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^2 - \varphi(x) = \sin^2 2x - \sin 2x.$$
$$\varphi[f(x)] = \sin 2f(x) = \sin 2(x^2 - x).$$

4. 已知 $f(u) = \sqrt{1 - u^2}, u = \varphi(x) = x - 1$,求 $f[\varphi(x)]$ 的定义区间.

解　$f[\varphi(x)] = \sqrt{1-[\varphi(x)]^2} = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}$.要求 x 满足 $2x-x^2 \geqslant 0$,即 $0 \leqslant x \leqslant 2$.所以 $f[\varphi(x)]$ 的定义区间为$[0,2]$.

5. 一个由解析式给出的函数,当引入中间变量将其分解为若干个简单函数而把该函数当作由这些函数复合而成的函数时,问引入中间变量的方法是否唯一?

解　引入中间变量的方法不唯一.例如

可化为
$$y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$$

(1) $y = u^{\frac{1}{3}}$,　$u = v^2, v = 1 + x$;

(2) $y = u^{\frac{2}{3}}$,　$u = 1 + x$;

(3) $y = u^{\frac{1}{3}}$,　$u = x^2 + 2x + 1$.

6. 函数 $y = [f(x)]^2$ 与 $y = f(x^2)$ 是由怎样的两个函数复合而成?又如何复合而成?

解　$y = [f(x)]^2$ 由 $y = u^2, u = f(x)$ 复合而成;

$y = f(x^2)$ 由 $y = f(u), u = x^2$ 复合而成.

7. 设 $f(x) = (ax+b)/(cx-a)$ 在什么条件下 $f[f(x)] = x$ 对属于 $f(x)$ 定义域的任何 x 都成立?

解　$f(x)$ 的定义域为 $x \neq \dfrac{a}{c}$,而

$$f[f(x)] = \frac{af(x)+b}{cf(x)-a} = \frac{a\dfrac{ax+b}{cx-a}+b}{c\dfrac{ax+b}{cx-a}-a} =$$

$$\frac{a^2x+bcx}{a^2+bc} = x \quad (\text{当 } a^2+bc \neq 0 \text{ 时}),$$

所以,$f[f(x)]$ 在 $a^2+bc \neq 0$ 时,对一切 $x \neq \dfrac{a}{c}$ 有 $f[f(x)] = x$.

8. 设 $y = f(x)$ 的定义区间为$(0,1]$,求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^2)$.

由 $0 < x^2 \leqslant 1$ 得 $0 < |x| \leqslant 1$.故定义区间为 $[-1,0) \cup (0,1]$.

(2) $f(\sin x)$.

由 $0 < \sin x \leqslant 1$,得 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$. k 为整数.

(3) $f(\lg x)$.

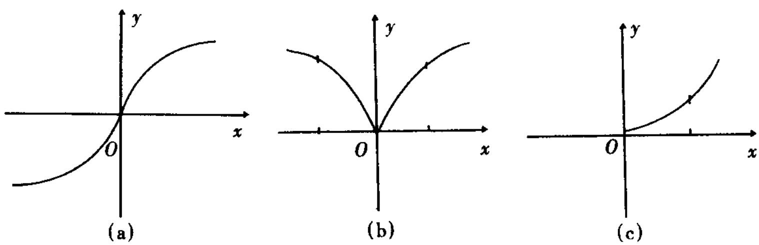
由 $0 < \lg x \leqslant 1$,得 $1 < x \leqslant 10$.

(4) $f\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(\log_2 x)$.

由 $\begin{cases} 0 < x - \frac{1}{2} \leqslant 1, \\ 0 < \log_2 x \leqslant 1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{2}, \\ 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 即定义区间为 $(1,\frac{3}{2}]$.

习题 1-4

1.求幂函数 $y = x^{\frac{1}{3}}, y = x^{\frac{2}{3}}, y = x^{\frac{3}{2}}$ 的定义区间,并作出它们的图形.



(1) $y = x^{\frac{1}{3}}$.

定义区间为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) $y = x^{\frac{2}{3}}$.

定义区间为 $(-\infty, +\infty)$.

(3) $y = x^{\frac{3}{2}}$.