中学数学复习提纲

ZHONG XUE SHU XUE FU XI TI GANG

习题解答

·天津市教育教学研究室·

中学数学复习提纲习题解答

天津市教育教学研究室编

*

天津人民出版社出版

天津市新华书店发行

天津新华印刷二厂印刷

*

开本787×1092毫米 1/32 印张 5 1/2

一九八〇年二月第一版

一九八〇年二月第一次印刷

书 号: 7072·1162

定 价: 0.35 元

说　　明

为了给老师和同学们使用《中学数学复习提纲》（1980年版）提供方便，我们对其中的复习题和总复习题作了解答。由于时间仓促，又限于我们的水平，所以每个题一般只列出了一种解法，有些题的解法不一定是最好的，有的叙述也可能不够规范，欢迎同志们提出宝贵意见。

天津市教育教学研究室

1979.10.

目　录

复习题一

1. 证明：不论x、y是什么实数，$x^2+y^2-2x+12y+40$都是正数．

证 $x^2+y^2-2x+12y+40$

$$=(x^2-2x+1)+(y^2+12y+36)+3$$

$$=(x-1)^2+(y+6)^2+3.$$

不论x、y是什么实数，$(x-1)^2+(y+6)^2+3>0$，即对于任意的x、y，$x^2+y^2-2x+12y+40$都是正数．

2. 证明：不论x、y是什么实数，x^2+xy+y^2都是非负数．

证 $x^2+xy+y^2=x^2+xy+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2+y^2$

$$=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geqslant 0,$$

即不论x、y是什么实数，x^2+xy+y^2都是非负数．

此题还可以把原式看成关于x的二次三项式，并由其判别式$\Delta=y^2-4y^2=-3y^2\leqslant 0$而得证．

3. 已知$f(x)=|2x-3|+|5x-2|$，试写出不含绝对值符号的代数函数式．

解

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$f(x)=|2x-3|+|5x-2|=\begin{cases}5-7x, & x<\frac{2}{5};\\ 3x+1, & \frac{2}{5}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2};\\ 7x-5, & x>\frac{3}{2}.\end{cases}$$

4. 对于下列各函数，变量x在有理数范围内应取什么值：

(1) $f(x)=\frac{2}{x}$； (2) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$；

(3) $f(x)=\frac{x+4}{x^2-5x+6}$； (4) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

解 (1) 0以外的有理数；

(2) -2以外的有理数；

(3) 2、3以外的有理数；

(4) 一切有理数.

5. 一个由形如$a+b\sqrt{2}$的数（a，b为任意有理数）所组成的集合（就是这种形式的总体），实行加、减、乘、除运算后是否还具有这种形式？

解 还具有这种形式. 事实上，如果设$a_1+b_1\sqrt{2}$、$a_2+b_2\sqrt{2}$是具有这种形式的任意二数，则有：

$$(a_1+b_1\sqrt{2})+(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2};$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})-(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{2};$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\cdot(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+$$

$a_2b_1)\sqrt{2}$；

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2{}^2-2b_2{}^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2{}^2-2b_2{}^2}\sqrt{2}.$$

6. 把下列各式分解因式：

(1) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$；

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$；

(3) $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$.

解 (1) 原式 $=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$=[(x^2+8x+10)-3][(x^2+8x+10)+5]+15$

$=(x^2+8x+10)^2+2(x^2+8x+10)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

(2) 原式 $=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

(3) 原式 $=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1$

$=(a^2+a+1)^2$.

7. 化简下列各式：

(1) $$\frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p}}}\div\frac{1}{m+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n(mnp+m+p)}；$$

(2) 若 $0<x<1$，

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right);$$

(3) $\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{2}{(a-b)(a-c)}-$

$\dfrac{1}{(a-b)(b-c)};$

(4) $\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$.

解 (1) 原式$=\dfrac{1}{m+\dfrac{p}{np+1}}\div\dfrac{n}{mn+1}-\dfrac{1}{n(mnp+m+p)}$

$$=\frac{np+1}{mnp+m+p}\cdot\frac{mn+1}{n}-\frac{1}{n(mnp+m+p)}$$

$$=\frac{n(mnp+m+p)}{n(mnp+m+p)}=1.$$

(2) 原式$=\left\{\dfrac{1+x+\sqrt{1-x^2}}{2x}+\right.$

$$\left.\frac{(1-x)[\sqrt{1-x^2}-(x-1)]}{2x(1-x)}\right\}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$=\frac{(1-x^2)-1}{x^2}=-\frac{x^2}{x^2}=-1.$$

(3) 原式 $=\dfrac{a-b+2(b-c)-(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$

$$=\frac{b-c}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

(4) 原式 $=\sqrt{3+2\sqrt{5+12(\sqrt{2}+1)}}$

$$=\sqrt{3+2(2\sqrt{2}+3)}$$

$$=2\sqrt{2}+1.$$

8. 证明：若 $x=\dfrac{a-b}{a+b}$，$y=\dfrac{b-c}{b+c}$，$z=\dfrac{c-a}{c+a}$，

则 $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$.

证 左 $=\left(1+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\left(1+\dfrac{b-c}{b+c}\right)\left(1+\dfrac{c-a}{c+a}\right)$

$$=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)};$$

右 $=\left(1-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\left(1-\dfrac{b-c}{b+c}\right)\left(1-\dfrac{c-a}{c+a}\right)$

$$=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

∴ 左＝右，得证.

9. 方程 $x^2+px+q=0$ 的一根为另一根的平方，求证 $p^3=q(3p-1)-q^2$.

证 设方程的二根为α、β且 $\alpha=\beta^2$，

则 $\alpha+\beta=-p$， (1)

$$\alpha\beta = q. \tag{2}$$

(1) 式两边立方，得

$$\alpha^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta^3 = -p^3,$$

$\because \quad \alpha = \beta^2$，$\therefore \quad \alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + \alpha\beta = -p^3$,

将 $\alpha+\beta = -p$，$\alpha\beta = q$代入上式整理，得

$$p^3 = q(3p-1) - q^2.$$

10．如果a是方程$mx^2 + (m-n)x + a^3 = 0$的根，那么，a也是方程$x^3 + (a+1)mx - na = 0$的根.

证 因为a是$mx^2 + (m-n)x + a^3 = 0$的根，所以有 $ma^2 + (m-n)a + a^3 = 0$.

把a代入方程$x^3 + (a+1)mx - na = 0$的左端，有 $a^3 + (a+1)ma - na = ma^2 + (m-n)a + a^3 = 0$.

所以a是方程 $x^3 + (a+1)mx - na = 0$的根.

11．当p为何值时，方程 $x^2 + px = 3$ 和$x^2 = 4x + p - 1$ 有一个公共根？并求出这个根.

解
$$\begin{cases} x^2 + px = 3 & (1) \\ x^2 = 4x + p - 1 & (2) \end{cases}$$

由(2)，　$p = x^2 - 4x + 1$，

把p值代入(1)，有

$$x^2 + (x^2 - 4x + 1)x = 3,$$

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0,$$

$$(x-3)(x^2+1) = 0.$$

解得　$x = 3$，代入(1)　$p = -2$.

所以，当$p = -2$时，方程$x^2 + px = 3$ 和 $x^2 = 4x + p - 1$ 有一个公共根3.

12. 已知方程$x^2-(tg\varphi+ctg\varphi)x+1=0$之一根为$2-\sqrt{3}$，求$sin2\varphi$的值.

解 依韦达定理，一根为$2-\sqrt{3}$，则另一根为

$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$（因为二根之积为1），又

$$tg\varphi+ctg\varphi=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4.$$

即 $\frac{1}{sin\varphi\cdot cos\varphi}=4$.

$\therefore\quad sin2\varphi=\frac{1}{2}$.

13. 如果p、q和r都是有理数，求证下列方程的根也是有理数：$(p+q+r)x^2-2(p+q)x+(p+q-r)=0$.

证 $\Delta=[-2(p+q)]^2-4(p+q+r)(p+q-r)$

$=4p^2+8pq+4q^2-4p^2-8pq-4q^2+4r^2$

$=(2r)^2$.

判别式是一个完全平方式，且 p、q、r 都是有理数，所以此方程的根也是有理数.

14. 设对任何有理数a，方程 $2x^2+(a+1)x-(3a^2-4a+m)=0$的根为有理数，求$m$的值.

解 为使方程的根为有理数，只须其判别式为完全平方式，即

$$\Delta=(a+1)^2+8(3a^2-4a+m)=25a^2-30a+(8m+1)$$

必为完全平方式，为此，Δ的判别式必为零，所以有

$$(-30)^2-100(8m+1)=0.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解得　$m=1$．

15．k为什么实数时，不等式$(k-2)x^2+2(k-2)x-4<0$的解是任何实数？

解　依题意应有

$$\begin{cases} k-2<0, & (1)\\ [2(k-2)]^2+16(k-2)<0. & (2)\end{cases}$$

由(1)，　$k<2$，　(3)

由(2)，　$(k-2)^2+4(k-2)<0$，

$k^2<4$，

解得，　$-2<k<2$．　(4)

由(3)，(4)得　$-2<k<2$．

16．k为什么实数时，不等式$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$为绝对不等式．

解　∵　$4x^2+6x+3=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

∴有　$2x^2+2kx+k<4x^2+6x+3$，

整理，得

$$2x^2+(6-2k)x+(3-k)>0$$

∵　$a=2>0$，∴欲使不等式对于x的任意实数值都成立，必须有$\Delta<0$，即

$$(6-2k)^2-8(3-k)<0.$$

$$k^2-4k+3<0$$

解得　$1<k<3$．

17．证明：方程

$$(x-a)(x-c)+\lambda(x-b)(x-d)=0$$

对于任意的λ都有实根，其中$a<b<c<d$.

证 整理可得：

$(1+\lambda)x^2-(a+c+\lambda b+\lambda d)x+ac+\lambda bd=0$.

欲使方程有实根，必须判别式不小于零.

即 $\Delta=(a+c+\lambda b+\lambda d)^2-4(1+\lambda)(ac+\lambda bd)$

$=\lambda^2(b-d)^2+2\lambda(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac)$

$+(a-c)^2\geqslant 0$.

$\because$ $(b-d)^2>0$,

$\therefore$ 欲使$\Delta\geqslant 0$对于任意的λ都成立，只有在Δ的判别式$\Delta'<0$时才可以. 即

$4(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac)^2-4(a-c)^2(b-d)^2$

$=4(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac-ab+cb+ad-cd)\cdot(ab$

$+ad+bc+dc-2bd-2ac+ab-cb-ad+cd)$

$=-16(b-a)(d-c)(c-b)(d-a)<0$.

但由已知，$a<b<c<d$所以上述不等式显然成立.

18. 若a、b、c、d为正数，则

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

证 $\sqrt{(a+c)(b+d)}=\sqrt{ab+ad+bc+cd}$

$\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}$

$=\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

$\therefore$ $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

19. 若$a>0$，$b>0$，求证：$\dfrac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

证 由 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$，得

$$a^2-ab+b^2\geqslant ab.$$

两端乘以$a+b$，有

$$a^3+b^3\geqslant ab(a+b).$$

$$3a^3+3b^3\geqslant 3ab(a+b)=3a^2b+3ab^2.$$

所以有，$4a^3+4b^3\geqslant(a+b)^3$.

即 $$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

20. 求函数 $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$的极大值或极小值.

解 $yx^2+y=x^2+3x+5$，

整理，得

$$(1-y)x^2+3x+5-y=0,$$

∵ x取实数值. ∴判别式$\Delta\geqslant 0$，即

$\Delta=3^2-4(1-y)(5-y)=4y^2-24y+11\leqslant 0$.

解最后的不等式，得

$$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{11}{2}.$$

故函数的极小值是$\dfrac{1}{2}$，极大值是$\dfrac{11}{2}$.

21. a、b、c是实数，且$(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab)$，求证：$a=b=c$.

证 由已知等式，有

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0.$$

所以有 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$，

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

$\because$ a、b、c 为实数，故有

$$a-b=0，b-c=0，c-a=0.$$

也就是，$a=b=c$.

22. $x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})$时，求$(x+\sqrt{1+x^2})^n$的值.

解 $\because$ $x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})$，

$$\therefore\quad 1+x^2=1+\frac{1}{4}(a^{\frac{2}{n}}+a^{-\frac{2}{n}}-2)$$

$$=\frac{1}{4}(a^{\frac{2}{n}}+a^{-\frac{2}{n}}+2)$$

$$=[\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}})]^2$$

$$\therefore\quad (x+\sqrt{1+x^2})^n=[\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})+\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}})]^n$$

$$=(a^{\frac{1}{n}})^n=a.$$

23. 解方程：

$lg sin\alpha+lglg2^{\sqrt{2}}+lg\sqrt{2}-lglg2=0$.

解 $lg\frac{\sqrt{2}sin\alpha\cdot\sqrt{2}lg2}{lg2}=0$.

$$lg2sin\alpha = 0$$

$$2sin\alpha = 1,$$

$$sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}.(k\text{为整数})$$

24. 三个正数 a、b、c 成等比数列，且 $a+b+c=62$，$lga+lgb+lgc=3$，求此三数.

解 依题意，有

$$\begin{cases} b^2 = ac & (1) \\ lga+lgb+lgc = 3 & (2) \\ a+b+c=62 & (3) \end{cases}$$

由(2)，$lgabc = 3$，$abc = 10^3$，　　(4)

把(1)代入(4)，得$b^3 = 10^3$，$b = 10$.

把$b=10$代入(3)，$a+c=52$　　(5)

把$b=10$代入(1)，$ac=100$　　(6)

由(5)、(6)解得　$a=2$，$c=50$或$a=50$，$c=2$.

故所求的三数为　2，10，50.

25. 已知直角三角形二直角边分别为a和b，且 a 边所对的角 $A = arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$，求证：

$$lg\frac{1}{\sqrt{6}}(a+b) = \frac{1}{2}(lga+lgb).$$

证　由已知，

$$\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

又 $\sin A = \frac{a}{c}$.

$\therefore \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$.

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{4b}$$

$$c^2 = 4ab.$$

又$c^2 = a^2 + b^2$，所以有，

$$4ab = a^2 + b^2$$

$$6ab = (a+b)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{6}}\right)^2 = ab.$$

$\therefore \quad 2\lg\frac{1}{\sqrt{6}}(a+b) = \lg a + \lg b$

即 $\lg\frac{1}{\sqrt{6}}(a+b) = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

26. 证明，如果a、b、c是等差数列对应的第p、q、r项，那么，$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$

证 若设a_n是等差数列的通项，则有$a_m - a_n = (m-n)d$. 从而有：

$$b - c = (q-r)d,$$

$$c - a = (r-p)d,$$

$$a - b = (p-q)d.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com