高等学校教材

■ 陈家鼎　刘婉如　汪仁官　编著

概率统计讲义（第三版）

Probability and Statistics

(Third Edition)

高等教育出版社

高等学校教材

概率统计讲义

（第三版）

陈家鼎　刘婉如　汪仁官　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是在第二版的基础上修订和扩充而成的，系统介绍了概率统计的基础理论和实用方法。内容简明扼要，文字通俗易懂。既注意对基本概念和定理论述准确，又注意介绍各方面的应用例子。只要求读者具有普通微积分知识和一些线性代数知识。本书可作为高等学校各类专业的教材，也可供有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计讲义/陈家鼎，刘婉如，汪仁官编著．—3版．北京：高等教育出版社，2004.5

ISBN 7-04-014404-2

Ⅰ．概…　Ⅱ．①陈…②刘…③汪…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第019991号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		
		版　　次	1980年7月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2004年5月第3版
印　　张	14.5	印　　次	2004年7月第2次印刷
字　　数	370 000	定　　价	18.20元

第一版序言

革命导师恩格斯说:“在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的,而问题只是在于发现这些规律。”(见《马克思恩格斯选集》第四卷,第 243 页,1972 年版。)偶然事件的概率(即发生的可能性的大小)就是该偶然事件隐蔽着的特性,概率论与数理统计就是研究这种内在特性的一门数学学科。随着现代科学技术的迅速发展,这门数学学科也得到了蓬勃的发展。它不仅形成了结构宏大的理论,而且在很多科学研究、工程技术和经济管理的领域里有愈来愈多的应用。由于应用的广泛性,许多理工科专业(以及经济系科)都把“概率统计”列为学习课程,培养学生处理随机现象的能力。

去年 8 月,中央广播电视大学要北大数学系承担“概率统计”课的教学任务,加上校内一些系也需开设这门课,这促使我们考虑教材问题。这本“概率统计讲义”就是在这种形势的推动下,在我们以前编写的同名讲义的基础上,经过较大的改写、扩充而成的。

在这次编写工作中,我们注意了下列几点:

(1) 本书是针对 50～70 学时的讲课需要而编写的,只能讲解概率统计的一些基本内容与某些实用范围较广的方法,不能求多求全。但讲解详细,便于自学。凡小字排印部分都可略去不讲。在学时较紧的情况下,除前三章必须有足够时间教学外,其他各章都可以略去一部分。

(2) 努力贯彻理论联系实际的原则,对基本概念、重要公式和定理的实际意义多加解释,多举各方面的例子,力求通俗易懂,便于读者把所学的内容和实际工作结合起来。考虑到回归分析方法与正交试验法应用广泛,所以把它们分列专章,供读者选学。

(3) 虽然概率统计的严密的深入的数学理论不能离开实变函数论与测度论，但在目前情形下作为非数学专业用的概率统计教材，应该尽量少用专门的数学知识。这本讲义只用到普通的微积分知识，正文里基本上不用线性代数知识，有些结论不给出严密的数学证明。

一般说来，作为"概率统计"课的教材，应该有一章的篇幅介绍随机过程的最基本知识。但这次编写时间太紧，加上考虑到当前这门课教学时数的限制，故本书未涉及随机过程内容。

在这次编写过程中，我们参考了许多概率统计书籍和教材，特别是在例题和习题的选配方面，吸取了它们中的不少材料。我们还得到中国科学院系统科学研究所研究员张里千同志的帮助，谨在此致谢。

由于我们水平有限，加上编写时间仓促，书中的缺点、错误一定不少，欢迎读者批评指正。

编　者

1980 年 1 月于北京大学数学系概率统计教研室

第三版序言

本版保留了第二版的绝大部分内容和优点,同时进行了较大的扩充,以便在内容上和编排上更好地适应高等学校各类专业"概率统计"课程的教学需要及概率统计这门学科的应用需要。本版的特点可概述如下:

(一) 增添了许多重要内容(其中一些采用小字排印)。例如:

① 在"概率"的定义里,除了保留基本的"频率定义"外,还介绍了概率的"主观定义"和公理化定义;

② 对"条件分布"和"条件期望"作了较细致的介绍;

③ 对寻找置信区间的三种一般性方法进行了全面叙述;

④ 对"假设检验"中的 p 值方法进行了全面论述;

⑤ 介绍了有关两个正态总体的 Behrens - Fisher 问题的解;

⑥ 介绍了比率的检验方法(包括一个总体和两个总体的情形),特别是 Fisher 精确检验法;

⑦ 对逻辑斯谛回归作了初步介绍;

⑧ 叙述了统计决策和贝叶斯统计的大意;

⑨ 对随机过程的某些预测问题和统计问题作了初步介绍,等等。

(二) 增加了许多实际应用例子。主要是增加了在日常生活、社会调查、商务管理、医学试验等方面的例子(第二版里的例子主要是工程方面的)。例如,在讲全概公式时介绍了敏感性社会调查的例子;在讲逆概公式时介绍了艾滋病的检查问题;在讲比率的两样本检验时介绍了两种药物疗效的比较;在讲回归分析时介绍了广告策略的制定,等等。

(三) 内容编排上注意重点与非重点、难点与非难点、基本内

容与进一步内容的界限，做到层次分明、要求明确、方便教学。本版仍坚持第二版的编写原则，力求做到：内容简明扼要准确，文字通俗易懂流畅。虽然增加了许多内容(这是某些大学的课程所需要的)，但新增内容的大部分或者用小字排印，或者打 * 号作为标志，用以表明这些内容不是“概率统计”课程的最基本内容。是否要求学生对这些内容了解或掌握，要根据课程的教学时数和学生的数学基础而定。

本版在编写过程中，吸取了北京大学概率统计系许多老师提出的宝贵意见，同时吸取了国内外近几年出版的多部概率统计优秀教材(见参考书目)的一些内容与讲法。在此，向所有帮助过我们的老师和一些教材的作者表示感谢。编者力图与时俱进，写出反映时代精神的合适教材。但限于水平，书中的缺点、谬误一定不少，欢迎读者批评指正。

编　者

2003 年 9 月

目　录

第一章　随机事件与概率

§1　随机事件及其概率

粗略地说，在一定的条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为**随机事件**（更确切的叙述见下面的定义）.

例 1.1　投掷一枚分币，"正面朝上"这个事件（记作 A），是一个随机事件.在该试验中，"正面朝下"（记作 B），也是随机事件.（我们常把有币值的一面称为正面.）

例 1.2　投掷两枚分币，则

$A=$"两个都是正面朝上"

$B=$"两个都是正面朝下"

$C=$"一个正面朝上，一个正面朝下"

都是随机事件.不难看出

$D=$"至少有一个正面朝上"

也是随机事件.

例 1.3　从十个同类产品（其中有 8 个正品，2 个次品）中，任意抽取三个.那么，

$A=$"三个都是正品"

$B=$"至少一个是次品"

均为随机事件，而

"三个都是次品"和"至少一个是正品"

这两个事件呢，前者是不可能发生的；后者是必定要发生的.我们称不可能发生的事件为**不可能事件**，记作 V；称必定要发生的事件为**必然事件**，记作 U.为讨论问题方便起见，将不可能事件 V

和必然事件 U 也当作随机事件.

对于随机事件,在一次试验中是否发生,我们虽然不能预先知道,但是它们在一次试验中发生的可能性是有大小之分的.比如,在例 1.1 中,如果投掷的分币是匀称的,那么,随机事件 A(="正面朝上")和随机事件 B(="正面朝下")发生的可能性是一样的;在例 1.2 中,如果两个分币都是匀称的,那么随机事件 A(="两个都是正面朝上")和随机事件 B(="两个都是正面朝下")发生的可能性也是一样的,并且它们比随机事件 C(="一个朝上,一个朝下")发生的可能性要小.不仅如此,由我们的直觉还可以说,发生例 1.1 中随机事件 A(=投掷一枚分币出现"正面朝上")的可能性,比发生例 1.2 中随机事件 A(=投掷两枚分币,"两个都是正面朝上")的可能性要大.然而,对事件发生的可能性只停留在基本上是定性的了解与描述上,实在太不够了.我们希望对它给出客观的定量的描述.

怎样给出随机事件发生可能性大小的定量描述呢?用一个数——概率.随机事件 A 的概率用 $P(A)$ 表示.该数越大表明 A 发生的可能性越大."可能性大小"是人们凭直觉可以理解的观念,但怎样定义刻画"可能性大小"的概率呢?这就不是一个简单的问题.我们首先介绍概率的频率定义,然后介绍概率的主观定义(注意,是"主观定义",不是主观主义!),在§4 中还要介绍概率的公理化定义.

回到例 1.1 中投掷一枚分币的试验,这种试验是在一定条件下作的.比如说,我们规定:"分币是匀称的,放在手心上,用一定的动作向上抛,让分币自由落在具有弹性的桌面上,等等."称这些条件为条件组 S.于是,在条件组 S 的一次实现下,事件 A("正面朝上")是否发生是不确定的.然而这只是问题的一方面.当条件组 S 大量重复实现时,事件 A 发生的次数,也称为**频数**,能体现出一定的规律性,约占总试验次数的一半.这也可以写成

$$A\text{ 发生的}\textbf{频率}=\frac{\text{频数}}{\text{试验次数}}\text{，接近于}\frac{1}{2}$$

在我们的心目中，由长期经验积累所得的、所谓某事件发生的可能性的大小，不就是这个“频率的稳定值”吗？

历史上，有些人作过成千上万次投掷钱币的试验．下表列出他们的试验记录：

实验者	投掷次数 n	出现“正面朝上”的次数 μ（即频数）	频率 $=\mu/n$
DeMorgan	2 048	1 061	0.518
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

容易看出，投掷次数越多，频率越接近 0.5．

定义 1.1 在不变的一组条件 S 下，重复做 n 次试验．记 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数．当试验的次数 n 很大时，如果频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动；而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈变愈小，则称 A 为随机事件，并称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记作

$$P(A)=p$$

显然，数值 p 就成为 A 在 S 下发生的可能性大小的数量刻画．例如 0.5 就成为掷一枚分币出现“正面朝上”的可能性的数量刻画．

上述定义也可简单地说成：“频率具有稳定性的事件叫做随机事件，频率的稳定值叫做该随机事件的概率．”

我们强调指出，人类的大量实践证明，在实际中遇到的事件一般都是随机事件，也就是说都是有确定的概率的．以后我们常简称随机事件为事件．

由于频率$\frac{\mu}{n}$总介于 0，1 之间，因而由概率的定义知，对任何随机事件 A，有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

而对必然事件 U 及不可能事件 V,显然有

$$P(U)=1, P(V)=0$$

定义 1.1 是概率的频率定义(又叫概率的统计定义).至于概率 $P(A)$的实际计算法,定义本身也给出了一种近似求法,即作大量的试验,计算事件 A 发生的频率.虽然得到的是近似值,但我们相信读者不至于因为现实生活中某一数值的获得只是些近似值而感到不实在.事实上,我们周围许多量的测量完全是近似的,如长度的概念并不会因为每次实测数值都是近似值而建立不起来,也不会因为温度计读数都是近似值而怀疑起“温度”的客观存在性.

以下介绍概率的主观定义.在现实世界里,有一些事件是不能重复或不能大量重复的,这时无法用上述定义 1.1 来定义概率.怎么办?一些统计学家认为,这样的事件不能定义概率,另一些统计学家(主要是贝叶斯(Bayes)学派的学者)则认为可以定义概率,他们认为应采用以下定义:

定义 1.2 一个事件的概率是人们根据已有的知识和经验对该事件发生可能性所给出的个人信念,这种信念用[0,1]中的一个数来表示,可能性大的对应较大的数.

定义 1.2 就是概率的主观定义,所定义的概率又叫做主观概率.粗一看,概率的主观定义很不科学,“个人信念”的主观色彩太浓.但仔细一想,现实世界中却有一些“可能性大小”是由个人信念来确定的,而且这样确定的概率合乎实际,对于人们的决策和行动有重要的指导作用.例如,一个企业家在某年某月某日说“此项产品在未来市场上畅销的概率是 0.8”.这里的 0.8 是根据他自己多年的经验和当时的一些市场信息综合而成的个人信念.如果这位企业家经验丰富,又有多次成功的业绩,我们就可以相信“畅销的概率是 0.8”.

又如一位外科医生要对一位心脏病患者做手术,他认为成功的概率是 0.9,这是他根据手术的难易程度、该病人的身体状况以

及自己的手术经验综合而成的个人信念.如果这位医生经验丰富,人们就会相信:手术成功的概率是0.9.

这样的例子很多.可见"主观概率"在一些情况下不可或缺,它是当事人对事件作了详细考察并充分利用个人已有的经验形成的"个人信念",而不是没有根据的乱说一通.当然,"个人信念"毕竟是个人主观的东西,应该谨慎对待.我们的态度是,在事件不能重复或不便多次重复的情形下,采用概率的主观定义(定义1.2).采用"主观概率"时,"个人信念"中的"个人"应是有经验的人、专家或专家组.概率的主观定义乃是前面的频率定义(定义1.1)的一种补充①.

§2 古典概型

上面介绍了概率的定义.定义1.1既是概念,同时又提供了近似计算概率的一般方法.但是在某些特殊情况下,并不需要临时做多次试验,也就是说临时多次实现条件组 S,从而求得概率的近似值,而是根据问题本身所具有的某种"对称性",充分利用人类长期积累的关于"对称性"的实际经验,分析事件的本质,就可以直接计算其概率(采用定义1.2可得到相同结果).

例如上节的例1.1,即使我们不临时作大量的投掷试验,我们也会想到,"正面朝上"与"正面朝下"出现的机会相等.因此,可以推测在大量试验中"正面朝上"这件事发生的频率在0.5左右,即

① 概率既是可能性大小的度量,它不仅在自然科学、技术科学、社会科学中应用广泛,在思维科学中也起着重要的作用.大家知道,演绎法和归纳法是最重要的两种推理方法,二者相互补充、缺一不可.演绎推理的特点是,前提 A 与结论 B 间有必然关系:若 A 成立,则 B 一定成立;归纳推理的特点是,前提 A 与结论 B 间有或然关系:若 A 成立,则 B 可能成立.对于归纳推理(日常生活和科学研究中的大量推理属于归纳推理)来讲,"B 成立的可能性有多大"十分重要.在 A 成立的条件下 B 成立的概率就是所谓从 A 到 B 的"归纳强度".对归纳法的深入研究离不开概率论.本书后面要讲的"统计推断"就是一种归纳推理.

它的概率为 0.5. 为什么“正面朝上”与“正面朝下”机会均等呢?这是因为问题本身有一种对称性(匀称的分币),如果“朝上”与“朝下”出现的机会不相等,那反倒与我们长期形成的“对称”的经验不相符了.

例 2.1 盒中装有五个球(三个白球,二个黑球)从中任取一个,问:取到白球的概率是多少?

既然是“任取”,那么五个球被取到的机会一样,而白球有三个,因此,取到白球的概率应该是 3/5. 说得更清楚些,我们把五个球编上号如下(其中白球为 1,2,3 号;黑球为 4,5 号):

① ② ③ ④ ⑤

因为是随便取一个,所以

“取到 1 号球”,“取到 2 号球”,“取到 3 号球”

“取到 4 号球”,“取到 5 号球”

这些结果发生的机会一样,而且是互相排斥的,以及除此以外不可能有别的结果. 注意到 1,2,3 号球是白球,所以“取到白球”这个事件发生的频率会稳定在 3/5 左右,因此按概率定义,它的概率是 3/5.

例 2.2 盒中装有球的情况如上例,现从中任取两个,问两个球全是白球的概率是多少?

这个问题较为复杂,不过仍可按上例的方法进行分析. 还是把五个球同样编号,因为是随便取两个,所以下列这些结果

“①,②”[①], “①,③”

“①,④”, “①,⑤”

“②,③”, “②,④”

“②,⑤”, “③,④”

“③,⑤”, “④,⑤”

发生的机会一样,而且是互相排斥的,以及除此之外不可能有别的

① “①,②”是“取到 1,2 号球”的缩写. 下同

结果.再注意到,上列十种情况中,有且仅有三种,即"①,②","①,③","②,③"为全白.因此"全白"发生的频率会稳定在3/10左右.于是,它的概率是3/10.

推而广之,对上面几个例子所讨论的问题及解决问题的办法进行归纳,可得出一般规律.

定义2.1 称一个事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$为一个**等概完备事件组**,如果它具有下列三条性质:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$发生的机会相同(等可能性);

(2) 在任一次试验中,$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少有一个发生(也就是所谓"除此之外,不可能有别的结果")(完备性);

(3) 在任一次试验中,$A_1,A_2,\cdots,A_n$至多有一个发生(也就是所谓"它们是互相排斥的")(互不相容性).

等概完备事件组在这里也称为**等概基本事件组**;其中任一事件$A_i(i=1,2,\cdots,n)$**称为基本事件**.

(在例1.1中,等概基本事件组的$n=2$,它的两个基本事件是"正面朝上"与"正面朝下".读者可对例2.1和例2.2分别找出等概基本事件组.)

若$A_1,\cdots,A_n$是一个等概基本事件组,而事件B由其中的某m个基本事件所构成①.大量实践经验表明,事件B的概率应由下列公式来计算②:

$$P(B)=m/n \tag{2.1}$$

---

① 更确切地说,所谓事件B由事件$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_m}$构成,是指当且仅当这$m$个事件中有一个发生时事件$B$才发生.

② 通常,如果试验只可能有有限个不同的试验结果$A_1,A_2,\cdots,A_n$;而且它们发生的机会相同,则不难看出,$A_1,A_2,\cdots,A_n$就是一个等概基本事件组.(因此,解决这类问题主要是把n和m数出来.)

"只可能有有限个不同的试验结果"中的"试验结果"一词,是比较朴素的、直观的、方便的,一般而言,也是不会引起混淆的(今后我们有时也用这个词).然而,毕竟不够准确,因此我们引进了等概完备事件组的概念