高等数学

第四卷

（第二分册）

R. 罗德 著
秦裕瑗 译

人民教育出版社

高等数学

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

高 等 数 学

第四卷

（第二分册）

R. 罗 德 著
秦 裕 瑗 译

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据莱比锡托伊布纳出版社（B.G. Teubner Verlagsgesellschaft）出版的罗德（R.Rothe）著“高等数学”（Höhere Mathematik）第四卷第二分册1961年第11版译出的。可供我国高等学校理工科有关师生参考。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高 等 数 学

第四卷 第二分册

R. 罗 德 著

秦 裕 瑗 译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

天津市第一印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

书号13012·0214 开本787×1092 1/32 印张 3 14/16

字数 105,000 印数 5001-205000 定价0.32元

1965年4月第1版 1978年11月第4次印刷

（第二分册）

第一章　积分法

1. 第二卷§1至§4的练习题

不定积分的积分法．复变函数的积分．递推公式．推广的分部积分法．累积分．含有二次式的积分．有理函数的积分．代数无理函数与超越函数的积分．应用．

1. a) $\int \sin ax\,dx$, b) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$, c) $\int \sqrt{1-x}\,dx$, d) $\int \frac{dx}{1-x}$. (参閱第28頁第1題.)①

解：a) $-\frac{\cos ax}{a}+C$, b) 利用关系式 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$. 結果是 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$, c) 令 $1-x=u$; $-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})^3+C$, d) 令 $1-x=u$; $-\ln(1-x)+C$.

2. a) $\int \sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^4}\;dx$, b) $\int \cos(ax+b)\,dx$, c) $\int\left(\sqrt[3]{\frac{5}{x^7}}+\sin\frac{x}{2}\right)dx$.

答：a) $\frac{3}{7\beta}\sqrt[3]{(\alpha+\beta x)^7}+C$, $(\beta\neq 0)$, b) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$, $(a\neq 0)$, c) $-\frac{3}{4x}\sqrt[3]{\frac{5}{x}}-2\cos\frac{x}{2}+C$.

3. $\int \frac{x^n dx}{\alpha x^{n+1}+\beta}=?$ (参閱第28頁第2題.)

解：1) 当 $n\neq -1$, 令 $\alpha x^{n+1}+\beta=u$; $\frac{\ln(\alpha x^{n+1}+\beta)}{\alpha(n+1)}+C$, $(\alpha\neq 0)$.

---

① 本分册內，括号里所指的是本书第二卷中譯本的頁碼及題次．——譯者．

2) 当 $n=-1$, $\frac{\ln x}{\alpha+\beta}+C\ (\alpha+\beta\neq 0)$.

4. $\int \operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi=?$ （参閱第 28 頁第 3 題.）

解：应用关系式 $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}-1$; $\operatorname{tg}\varphi-\varphi+C$.

5. $\int \arcsin x\, dx=?$ （参閱第 28 頁第 4 題.）

解：$x \arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. （分部积分法.）

6. $\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=?$

解：令 $x^2=u$; $-\frac{1}{2(1+x^2)}+C$.

7. $\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{3-4x}}=?$

解：令 $3-4x=u^2$; $-\frac{1}{6}(2x+3)\sqrt{3-4x}+C$.

8. $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}=?$

解：令 $x^n=\frac{1}{u^2}$; $nx^{n-1}dx=-\frac{2du}{u^3}$; $J=-\frac{2}{n}\int\frac{u\,du}{u^3x^{n-1}\cdot x\sqrt{1-u^2}}=$

$=\frac{2}{n}\arccos\frac{1}{\sqrt{x^n}}+C$.

9. a) $J_1=\int\sqrt{\frac{1-\sin^2x}{1+\sin^2x}}\,dx=?$ b) $J_2=\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\sin^2x-\sin^2\alpha}}=?$

解：a) $J_1=\int\frac{d\sin x}{\sqrt{1+\sin^2x}}=\operatorname{arsinh}(\sin x)+C=\ln(\sin x+$

$+\sqrt{1+\sin^2x})+C$ （参閱 § 3(6)）. b) $J_2=-\int\frac{d\cos x}{\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2x}}$.

令 $t=\cos x/\cos\alpha$, 就有 $J_2=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arccos\left(\frac{\cos x}{\cos\alpha}\right)+C$.

10. a) $J=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, b) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$.

解：令$1-x^2=u^2$，就得到

a) $J=\int\frac{x\,dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{du}{u-1}-\int\frac{du}{u+1}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}+C'=$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{-(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}+C'=\frac{1}{2}\ln(-1)+\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C'=$

$=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$,

b) $J=\int\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x\,dx}{x^2}=-\int\frac{u^2du}{1-u^2}=\int du+\int\frac{du}{u^2-1}=$

$=\sqrt{1-x^2}+\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

11. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=?$

解：令$e^x=u$；$\operatorname{arc\,tg} e^x+C$.

12. $J=\int\frac{dz}{\cosh z}=?$（参阅第28頁第5題.）

解：令$e^z=u$；$J=2\int\frac{du}{1+u^2}=2\operatorname{arc\,tg} e^z+C$.（参阅第11題.）

13. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}}=?$

解：令$1/x^2=u$；$-\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(1/x^2+)C$.

14. $\int xe^{ax}dx=?$

解：$\frac{e^{ax}}{a}\left(x-\frac{1}{a}\right)+C$.（分部积分法.）

15. $J=\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx=?$

解：$J=\int x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=x\operatorname{tg} x+\ln\cos x-\frac{1}{2}x^2+C$.（分部积分法.）

16. $J=\int\frac{e^{c\,\mathrm{arc\,tg}\,x}dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=?$

解: 令 $\mathrm{arc\,tg}\,x=u$; $J=\int e^{cu}\cos u\,du=e^{cu}\sin u-c\int e^{cu}\sin u\,du=$

$=e^{cu}\sin u+ce^{cu}\cos u-c^2\int e^{cu}\cos u\,du$. 从而得 $J=\frac{e^{cu}(\sin u+c\cos u)}{1+c^2}+C$.

因为 $x=\mathrm{tg}u$, 所以 $\cos u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 乃有

$$J=\frac{e^{c\,\mathrm{arc\,tg}\,x}(c+x)}{(1+c^2)\sqrt{1+x^2}}+C.$$

17. $J=\int\frac{dx}{x(a+bx^n)}=?$

解: 令 $x^n=u$; $J=\frac{1}{n}\int\frac{du}{u(a+bu)}=-\frac{1}{an}\int\left(\frac{b}{a+bu}-\frac{1}{u}\right)du=$

$$=-\frac{1}{an}\ln\left(b+\frac{a}{x^n}\right)+C.$$

18. 試证 $\int x^i dx=\frac{x^{i+1}}{i+1}$, x 为实变量且 $\neq 0$.（对 x^i 的实部与虚部分别积分）.（参閱第 28 頁第 6 題.）

证: 因为 $x^i=e^{i\ln x}=\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)$.（参閱第一卷 § 30(6).）令 $\ln x=u$, 就有

$$\int\cos(\ln x)dx=\int e^u\cos u\,du=\frac{1}{2}e^u(\cos u+\sin u)+C_1.$$

（重复用分部积分法.）相应地有

$$\int\sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}e^u(\sin u-\cos u)+C_2.$$

所以

$$\int x^i dx=\frac{1}{2}e^u(\cos u+i\sin u+\sin u-i\cos u)+C=$$

$$=\frac{1}{2}xe^{iu}(1-i)+C=\frac{x^{i+1}}{i+1}+C.$$

19. $J=\int\mathrm{tgh}^3 u\,du=?$

解①：因为 $\operatorname{tgh} u\, du = d(\ln\cosh u)$，所以

$$J=\int \operatorname{tgh}^2 u\, d(\ln\cosh u)=\operatorname{tgh}^2 u\ln\cosh u-\int\frac{2\operatorname{tgh} u\ln\cosh u}{\cosh^2 u}du+C_0.$$

如果令 $\cosh u=\lambda$，最后一个积分就变成

$$2\int\frac{\ln\lambda\, d\lambda}{\lambda^3}=-\frac{1}{\lambda^2}\ln\lambda-\frac{1}{2\lambda^2}+C_1$$

(分部积分法)。所以

$$J=\operatorname{tgh}^2 u\ln\cosh u+\frac{\ln\cosh u}{\cosh^2 u}+\frac{1}{2\cosh^2 u}+C_2=\ln\cosh u-\frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2 u+C.$$

20. $J=\int\sqrt{x+\sqrt{x}}\,dx=?$

解：令 $x=u^2$；$J=2\int\sqrt{u+u^2}\,u\,du=2\int\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\left(u+\frac{1}{2}\right)du-$

$$-\int\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,du.$$

再令 $u+\frac{1}{2}=v$，就得到(参閱 §3(11))

$$J=2\int\sqrt{v^2-\frac{1}{4}}\,v\,dv-\int\sqrt{v^2-\frac{1}{4}}\,dv=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^3-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{12}(4\sqrt{x}+3)(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)+C.$$

这个解也可以写成以下的形式

$$J=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{8}\operatorname{ar}\cosh(2\sqrt{x}+1)+C'$$

(参閱 §3(8))。

21. $J=\int(\ln x)^m dx=?$(m是正整数)。(参閱第 28 頁第 7 題.)

① 下面的解法似乎更簡单一些：因为 $(\operatorname{tgh} x)'=\operatorname{sech}^2 x=-\operatorname{tgh}^2 x+1$，所以

$$\int\operatorname{tgh}^3 x\,dx=\int(1-\operatorname{sech}^2 x)\operatorname{tgh} x\,dx=\int\operatorname{tgh} x\,dx-\int\operatorname{tgh} x\,d\operatorname{tgh} x=$$

$$=\ln\cosh x-\frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2 x+C.$$ ——譯者。

解：令 $\ln x=u$; $J=\int u^m e^u du=e^u u^m-m\int e^u u^{m-1}du$

$$=e^u u^m-me^u u^{m-1}+m(m-1)\int e^u u^{m-2}du$$

等等．結果是

$$J=C+x[(\ln x)^m-m(\ln x)^{m-1}+m(m-1)(\ln x)^{m-2}+\cdots+(-1)^m m!].$$

22. $\int x^{p-1}(\ln x)^q dx=\varphi_{p,q}=?$ ($p\neq 0$, 而 q 为正整数)．(参閱第28頁第8題．)

解：令 $\ln x=u$; $\varphi_{p,q}=\int u^q e^{pu}du=\frac{e^{pu}u^q}{p}-\frac{1}{p}\int e^{pu}\,qu^{q-1}\,du+C$ 等等（参閱第21題）．所以

$$\varphi_{p,q}=\frac{x^p q!}{p^{q+1}}\left(\frac{(p\ln x)^q}{q!}-\frac{(p\ln x)^{q-1}}{(q-1)!}+-\cdots+(-1)^q\right)+C.$$

附言：当 $p=0$ 时，有

$$\varphi_{0,q}=\int\frac{(\ln x)^q}{x}dx=\frac{(\ln x)^{q+1}}{q+1}+C'(q\neq -1),$$

$$\varphi_{0,-1}=\int\frac{dx}{x\ln x}=\ln(\ln x)+C''.$$

23. $J=\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=?$

解：令 $\ln x=y$; $J=\int\ln y\,dy=y(\ln y-1)+C=\ln x(\ln(\ln x)-1)+$ $+C$．(分部积分法．)

24. $J=\int_{-1}^{+1}x^n dx=?$ (n 是整数且$\geqslant 0$)．(参閱第28頁第9題．)

解：如果 n 是一奇数，那末 $y=x^n$ 是一个奇函数，所以积分等于零．如果 n 是一偶数，那末有 $J=2\int_0^1 x^n dx=2:(n+1)$.

25. 試证

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m-1)^2}\right),$$

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right)\frac{2m}{2m+1}.$$

(参閱第 29 頁第 10 題.)

证: $\lim\limits_{m\to\infty}\prod\limits_{\lambda=2}^{m}\left(1-\frac{1}{(2\lambda-1)^2}\right)=$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot7}\cdots\frac{(2m-2)\cdot2m}{(2m-1)\cdot(2m-1)}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\text{(参閱 § 2(7))}.$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\prod_{\lambda=1}^{m}\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right)\right)\frac{2m}{2m+1}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\frac{5\cdot7}{6\cdot6}\cdots\frac{(2m-1)(2m+1)}{2m\cdot2m}\cdot\frac{2m}{2m+1}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\quad\text{(参閱 § 2(7))}.$$

26. $J={}^{(n)}\!\int\ln x\,dx^n=?$ (参閱第 29 頁第 11 題.)

解: 利用公式 § 2(3). 因为

$$\int\ln x\,dx=x\ln x-x,\quad {}^{(2)}\!\int\ln x\,dx^2=\frac{x^2}{2!}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right),\cdots$$

及

$$\int x^{n-1}\ln x\,dx=\frac{x^n}{n}\left(\ln x-\frac{1}{n}\right)$$

乃得

$${}^{(n)}\!\int\ln x\,dx^n=\frac{x^n}{n!}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)+G_{n-1}(x),$$

其中 $G_{n-1}(x)$ 表示一个 $n-1$ 次多項式.

27. $J=\int\left(\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right)dx=?$

解: 令 $\frac{f(x)}{f'(x)}=u$; 因为 $u'=\frac{f'^2-ff''}{f'^2}$, 所以

$$J=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2+C=\frac{1}{2}\frac{f^2(x)}{f'^2(x)}+C.$$

28. $J=\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=?$

解：令 $x+1=u$；$J=\int\frac{du}{u^2+2}$. 如果令 $u=v\sqrt{2}$，那末

$$J=\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg} v+C=\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

29. $J=\int\frac{x+2}{x^2+4x+5}dx=?$

解：令 $x+2=u$，就有

$$J=\int\frac{u\,du}{u^2+1}=\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+C.$$

30. $J=\int\frac{dx}{x^2-9}=?$

解：$\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)$；$J=\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}+C.$

31. $J=\int\frac{xdx}{x^2-3x+2}=?$

解：$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}$；$J=\ln\frac{(x-2)^2}{x-1}+C.$

32. $J=\int\frac{(ax+b)dx}{x^2-7x+12}=?$

解：$\frac{ax+b}{x^2-7x+12}=\frac{4a+b}{x-4}-\frac{3a+b}{x-3}$；$J=\ln\frac{(x-4)^{4a+b}}{(x-3)^{3a+b}}+C.$

33. $J=\int\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}dx=?$

解：由关系式

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}=1+\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}=1+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-1},$$

$$J=x+\ln\frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}+C.$$

34. $J=\int\frac{x^2dx}{(x^2-1)(x+2)}=?$

解：由 $\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}$；$A=\frac{1}{6}$，$B=\frac{4}{3}$，$C=-\frac{1}{2}$，

$J=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)(x+2)^8}{(x+1)^3}+C.$

35. $J=\int\frac{x^3dx}{(x^2-1)(x+2)}=?$

解：由 $\frac{x^3}{(x^2-1)(x+2)}=1-\frac{2x^2-x-2}{(x+1)(x-1)(x+2)}=1-\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\right.$ $\left.+\frac{C}{x+2}\right)$；$A=-\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{6}$，$C=+\frac{8}{3}$；$J=x+\ln\frac{\sqrt{x+1}\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^8}}+C.$

36. $J=\int\frac{dx}{x^4+5x^2+4}=?$（参閱第 29 頁第 12 題.）

解：由关系式 $\frac{1}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)$；

$$J=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

37. $J=\int\frac{2x^3+4x^2+2x+3}{x^4(1+x^2)}dx=?$（参閱第 29 頁第 13 題.）

解：由 $\frac{2x^3+4x^2+2x+3}{x^4(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{1+x^2}$；

$$A=0,\quad B=1,\quad C=2,\quad D=3,\quad E=0,\quad F=-1;$$

$$J=c-\operatorname{arctg} x-x^{-1}-x^{-2}-x^{-3}.$$

38. $J=\int\frac{dx}{1-x^3}=?$

解：由 $\frac{1}{1-x^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{1+x+x^2}$；$A=B=\frac{1}{3}$，$C=\frac{2}{3}$；

$$J=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{1+x+x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x+x^2}+C'=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(1+x+x^2)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}+C''=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(1+x+x^2)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)\right)+C.$$

39. $J=\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}=?$

解: 由 $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}=\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{x-1}$;　$A=B=C=\dfrac{1}{4}$,

$D=-\dfrac{1}{4}$; $J=\dfrac{x}{2(1-x^2)}+\ln\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C_0$.

40. $J=\displaystyle\int\left(\frac{x^2+1}{(x-1)^3}\right)^2dx=?$

解: 令 $x-1=u$; $x^2+1=u^2+2u+2$; $dx=du$.

$$J=\int\frac{(u^2+2u+2)^2}{u^6}du=C_0-\left(\frac{1}{u}+\frac{2}{u^2}+\frac{8}{3u^3}+\frac{2}{u^4}+\frac{4}{5u^5}\right)=$$

$$=C_0-\frac{15u^4+30u^3+40u^2+30u+12}{15u^5}.$$

結果是: $J=C_0-\dfrac{15x^4-30x^3+40x^2-20x+7}{15(x-1)^5}$.

41. $J=\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^4}=?$ (参閲第 29 頁第 14 頁.)

解: 因为 $1+x^4\equiv1+x^4+2x^2-2x^2=(1+x^2)^2-2x^2\equiv$

$$\equiv(1+x\sqrt{2}+x^2)(1-x\sqrt{2}+x^2),$$

作部分分式就得到

$$J=\int\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}x}{1+x\sqrt{2}+x^2}dx+\int\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}x}{1-x\sqrt{2}+x^2}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\int\frac{2\sqrt{2}+2x}{1+x\sqrt{2}+x^2}dx+\int\frac{2\sqrt{2}-2x}{1-x\sqrt{2}+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\int\left(\frac{\sqrt{2}+2x}{1+x\sqrt{2}+x^2}-\frac{-\sqrt{2}+2x}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int\left(\frac{\sqrt{2}}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\frac{\sqrt{2}}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)dx\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\sqrt{2}\left(\int\frac{dx}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\int\frac{dx}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right)\right).$$

如果令 $x+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}u$, 就有

$$\int\frac{dx}{1+x\sqrt{2}+x^2}=\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,(x\sqrt{2}+1);$$

相应地有

$$\int\frac{dx}{1-x\sqrt{2}+x^2}=\sqrt{2}\,\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1).$$

应用公式

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha+\operatorname{arc\,tg}\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$$

就得到結果

$$J=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$$

42. $J=\int\frac{x^2}{1+x^4}dx=?$ (参閱第 29 頁第 15 題.)

解: 作部分分式(参閱第 41 題)得到

$$J=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\int\frac{2x}{1+x\sqrt{2}+x^2}dx+\int\frac{2x}{1-x\sqrt{2}+x^2}dx\right).$$

在分式的分子上加減$\sqrt{2}$，經过一些变形以后积分就可以写成下面的形状

$$J=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}+\sqrt{2}\int\left(\frac{1}{1-x\sqrt{2}+x^2}+\frac{1}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right)dx\right),$$

結果是: $J=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$

43. a) $J_1=\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=?$ b) $J_2=\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=?$

解: 利用第 41 与 42 題的結果就得到

a) $J_1=\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+C$, b) $J_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

44. $J=\int\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)}dx=?$ (参閱第 29 頁第 16 題.)

解. 由 $\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$; $A=-1$, $B=D=1$, $C=0$; $J=\frac{1}{x}+\ln x+\operatorname{arc\,tg}x+C_0$.

45. 人口数 y 当其充分大时大致按有机体增长律(第一卷§10, 9)随时間 t 自由增长: $\frac{dy}{dt}=ay$; 如果計及疾病与其他原因，增长速度假定要減小一个与人口数平方成正比的量，于是有

$$\frac{dy}{dt}=ay-by^2, \qquad (a, b>0).$$

試由此决定在某时刻 t 的人口数 y（凡尔郝斯特人口律）[①].（参閲第 29 頁第 17 題.）

解：分离微分方程的变量（参閲第一分册练习題 5 第 15題，本书第 54 頁）并积分，得

$$t=\int\frac{dy}{ay-by^2}=\frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{b}{a-by}\right)dy=\frac{1}{a}\ln\frac{y}{a-by}+C=$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\frac{a-by}{by}+t_0$$

其中 $C=\frac{1}{a}\ln b+t_0$. 于是

$$y=\frac{a}{b}\,\frac{e^{a(t-t_0)}}{1+e^{a(t-t_0)}}.$$

当 $t\to\infty$ 时，y 趋于$\frac{a}{b}$.

46. $J=\lim\limits_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega}e^{-x}x^n dx=?$（参閲第 30 頁第 18 題.）

解：应用公式 §1(26)，得

$$J=-\lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{\omega^n+n\omega^{n-1}+n(n-1)\omega^{n-2}+\cdots+n!}{e^{\omega}}\right)+n!$$

因为当 $n=0, 1, 2, 3, \cdots$时，$\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{\omega^n}{e^{\omega}}=0$，所以 $J=n!$

47. $J=\int\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx=?$（参閲第 30 頁第 19 題.）

解：应用加法定理

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

得到

$$\cos x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}(\cos x\cos 3x+\cos^2 3x)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$$

① 凡尔郝斯特(P. F. Verhulst) 1804—1849 布鲁塞尔人.