高等学校教材同步辅导系列

大学物理
习题精解

高教·第五版

主　编　徐维杰　李淑侠
副主编　谢文广　肖德航

6

哈尔滨工业大学出版社

高等学校教材同步辅导系列

大学物理习题精解

（高教·第五版）

主　编　徐维杰　李淑侠
副主编　谢文广　肖德航

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 提 要

本书主要是针对程守洙、江之永主编的《普通物理学》(高等教育出版社,第五版)教材而编写的教学参考用书。除从该书中精选了部分习题外,又参阅了大量的普通物理习题集,增加了填空题和选择题及部分计算题;并对计算题进行了详细的解答,给出了填空题和选择题的答案。另外,本书还按照教材的章节结构,总结了各章的基本要求和主要内容,帮助读者学习。

本书可作为各类高等院校师生讲授和学习大学物理课程的参考用书,也可供相关人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理习题精解/徐维杰,李淑侠主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005.5

ISBN 7-5603-2149-6

Ⅰ.大… Ⅱ.①徐…②李… Ⅲ.物理学-高等学校-解题 Ⅳ.04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 041180 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 850×1168　1/32　印张 8.5　字数 218 千字
版　　次 2005 年 5 月第 1 版　2005 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-2149-6/O·181
印　　数 1~6 000
定　　价 13.80 元

前　言

大学物理是理工科大学生必修的一门重要基础课。解题是物理学习中的一个重要环节，它能够帮助学生深入理解物理概念，巩固所学知识，培养分析问题和解决问题的能力。而根据编者多年的教学经验，解题恰恰是学生学习的难点。鉴于此，我们编写了这本《大学物理习题精解》，供各类高等院校讲授和学习大学物理的师生参考。

本书根据教学基本要求，涵盖了普通物理学的主要内容，结构为力学、热学、电磁学和波动光学。针对现代学生学习的特点，每章的习题都经过精心设计，力图做到少而精，难度适中，代表性强，覆盖面广，与教学同步。

本书的编者均是长期从事大学物理课程教学工作的一线教师，编写中，融会了多年积累的资料，并参考了多部大学物理教材和教学参考书。编者对所参考的书籍作者表示深切的谢意。

由于时间仓促和编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 1 月

目　　录

第一章　质点运动学……………………………………………… 1
　一、基本要求与主要内容………………………………………… 1
　二、习题及解答……………………………………………………… 3
第二章　质点动力学 ……………………………………………… 15
　一、基本要求与主要内容 ……………………………………… 15
　二、习题及解答 …………………………………………………… 18
第三章　刚体的定轴转动 ………………………………………… 35
　一、基本要求与主要内容 ……………………………………… 35
　二、习题及解答 …………………………………………………… 36
第四章　机械振动和机械波 ……………………………………… 53
　一、基本要求与主要内容 ……………………………………… 53
　二、习题及解答 …………………………………………………… 57
第五章　相对论基础 ……………………………………………… 76
　一、基本要求与主要内容 ……………………………………… 76
　二、习题及解答 …………………………………………………… 78
第六章　气体动理论 ……………………………………………… 84
　一、基本要求与主要内容 ……………………………………… 84
　二、习题及解答 …………………………………………………… 86
第七章　热力学基础 ……………………………………………… 98
　一、基本要求与主要内容 ……………………………………… 98
　二、习题及解答…………………………………………………… 100
第八章　真空中的静电场………………………………………… 119
　一、基本要求与主要内容……………………………………… 119
　二、习题及解答…………………………………………………… 122

第九章　导体和电介质中的静电场……………………………… 143
一、基本要求与主要内容…………………………………… 143
二、习题及解答……………………………………………… 145
第十章　恒定电流和恒定电场…………………………………… 160
一、基本要求与主要内容…………………………………… 160
二、习题及解答……………………………………………… 161
第十一章　真空中的恒定磁场…………………………………… 168
一、基本要求与主要内容…………………………………… 168
二、习题及解答……………………………………………… 170
第十二章　磁介质中的磁场……………………………………… 188
一、基本要求与主要内容…………………………………… 188
二、习题及解答……………………………………………… 189
第十三章　电磁感应和暂态过程………………………………… 196
一、基本要求与主要内容…………………………………… 196
二、习题及解答……………………………………………… 198
第十四章　麦克斯韦电磁理论和电磁波………………………… 219
一、基本要求与主要内容…………………………………… 219
二、习题及解答……………………………………………… 220
第十五章　光的干涉……………………………………………… 228
一、基本要求与主要内容…………………………………… 228
二、习题及解答……………………………………………… 230
第十六章　光的衍射……………………………………………… 244
一、基本要求与主要内容…………………………………… 244
二、习题及解答……………………………………………… 245
第十七章　光的偏振……………………………………………… 256
一、基本要求与主要内容…………………………………… 256
二、习题及解答……………………………………………… 257

第一章　质点运动学

一、基本要求与主要内容

(一)基本要求

1.理解质点、参考系的概念。

2.掌握位置矢量、位移、速度、加速度、角位移、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量。

3.能根据具体问题用直角坐标系、极坐标系求运动方程,并由运动方程求质点的位移、速度、加速度,由速度(或加速度)求运动方程(或速度)。

4.能计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、法向加速度和切向加速度。

5.了解相对运动的概念,并能用速度变换关系式求解质点的相对运动问题。

(二)主要内容

1.位置矢量和位移

(1) 位置矢量:在坐标系中,从原点指向质点所在位置的有向线段称为位置矢量,记为 $\boldsymbol{r}$。

(2) 运动方程:表示质点位置矢量随时间变化的函数式称为运动方程,表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

(3) 位移:由质点初始位置到末位置并指向末位置的矢量称为位移,表示为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta r) - \boldsymbol{r}(t)$$

2. 速度和加速度

(1) 速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

(2) 加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$$

3. 几种运动形式

(1) 匀加速运动

$$\boldsymbol{a} = \text{常矢量}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

(2) 抛体运动

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

在直角坐标系中

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_x = v_0\cos\theta \qquad v_y = v_0\sin\theta - gt$$

$$x = v_0 t\cos\theta \qquad y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

(3) 圆周运动

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \qquad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

角速度 $$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度 $$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

4. 相对运动

只有相对于确定的参考系，才能对运动进行度量，这就是运动描述中的相对性。

当直角坐标系 K' 相对于坐标系 K 平动时，在 K 和 K' 系中所描述的质点的位置矢量、速度、加速度的关系分别为

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{R}(t)$$

式中，$\boldsymbol{R}(t)$ 表示 t 时刻 K' 系坐标原点 O' 对 K 系的位置矢量；$\boldsymbol{r}'(t)$ 为 t 时刻质点在 K' 系中的位置矢量；

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

式中，$\boldsymbol{u}$ 为 K' 系相对于 K 系的速度，$\boldsymbol{v}'$ 为质点相对于 K' 系的速度；

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0$$

式中，$\boldsymbol{a}_0$ 为 K' 系相对于 K 系的加速度，$\boldsymbol{a}'$ 为质点相对于 K' 系的加速度。

二、习题及解答

(一) 选择题

1. 一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表达式为 $\boldsymbol{r} = at^2\boldsymbol{i} + bt^2\boldsymbol{j}$(式中，$a$、$b$ 为常量)，则该质点作(　　)。

A. 抛物线运动　　B. 变速直线运动

C. 匀速直线运动　　D. 一般曲线运动

2. 已知质点的运动方程为$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^2 \end{cases}$,则质点在第 2 s 内的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ = (　　)。

A. $3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$　　B. $6\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$　　C. $2\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$　　D. $3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$

3. 某质点的运动学方程为 $x = 4t + 6t^3$(SI),则该质点作(　　)。

A. 匀加速直线运动,加速度沿 x 轴正向

B. 匀加速直线运动,加速度沿 x 轴负向

C. 变加速直线运动,加速度沿 x 轴正向

D. 变加速直线运动,加速度沿 x 轴负向

4. 质点沿 x 轴正向运动,其加速度随位置的变化关系为 $a = \frac{1}{3} + 3x^2$,如果在 $x = 0$ 处速度 $v_0 = 5$ m/s,那么 $x = 3$ m 处的速度为(　　)。

A. 9 m/s　　B. 8 m/s　　C. 7.8 m/s　　D. 7.2 m/s

5. 一小球沿斜面向上运动,其运动方程为 $s = 5 + 4t - t^2$(SI),则小球运动到最高点的时刻是(　　)。

A. 4 s　　B. 2 s　　C. 8 s　　D. 5 s

6. 质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动,经过时间 T 转动一周,那么,在 $2T$ 时间内,平均速度的大小和平均速率分别为(　　)。

A. $\frac{2\pi R}{T}, \frac{2\pi R}{T}$　　B. $0, \frac{2\pi R}{T}$　　C. 0,0　　D. $\frac{2\pi R}{T}$,0

7. 下列表述中正确的是(　　)。

A. 质点沿 x 轴运动,若加速度 $a < 0$,则质点必作减速运动

B. 在曲线运动中,质点的加速度必不为零

C. 若质点的加速度为恒矢量,则其运动轨道必为直线

D. 当质点作抛体运动时,其法向加速度 a_n、切向加速度 a_t 是不断变化的,因此 $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ 也是不断变化的

8. 下列说法中,正确的是(　　)。

A. 作曲线运动的物体,必有切向加速度

B. 作曲线运动的物体,必有法向加速度

C. 具有加速度的物体,其速率必随时间改变

D. 物体作匀速率运动,其总加速度必为零

9. 质点沿半径为 0.10 m 的圆周运动,其角位移 θ 可表示为 $\theta = 5 + 2t^3$。当 $t = 1$ s 时,它的总加速度的大小为(　　)。

A. $3.6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$　B. $3.8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$　C. $1.2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$　D. $2.4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

10. 质点由静止开始以匀角加速度 α 沿半径为 R 的圆周运动。如果在某一时刻此质点的总加速度 a 与切向加速度 a_t 夹角为 45°,则此时刻质点已转过的角度 θ 为(　　)。

A. $\frac{1}{6}$ rad　　B. $\frac{1}{4}$ rad　　C. $\frac{1}{3}$ rad　　D. $\frac{1}{2}$ rad

11. 下列说法正确的是(　　)。

A. 在圆周运动中,加速度的方向一定指向圆心

B. 匀速率圆周运动的速度和加速度都恒定不变

C. 物体作曲线运动时,速度方向一定在运动轨道的切线方向,法向分速度恒等于零,因此其法向加速度也一定等于零

D. 物体作曲线运动时,必定有加速度,加速度的法向分量一定不等于零

(二) 填空题

1. 一质点沿 x 轴运动,其加速度随时间变化的关系为 $a = 3 + 2t$。如果初始时,质点的速度为 5 m/s,且在距原点 1 m 处,则当 $t = 2$ s 时,质点的速度 $v =$ ＿＿＿＿＿＿,位置 $x =$ ＿＿＿＿＿＿。

2. 一质点沿 x 轴正方向运动,其加速度为 $a = kt$(SI),其中 k 为常数,当 $t = 0$ 时,$v = v_0$,$x = x_0$,则质点的速度 $v =$ ＿＿＿＿＿＿,质点的运动方程为＿＿＿＿＿＿＿＿。

3. 一质点沿 x 轴运动,其运动方程 $x = 10 - 9t + 6t^2 - t^3$(SI),则初始时刻质点的位置为＿＿＿＿＿＿,速度为＿＿＿＿＿＿,加速度为＿＿＿＿＿＿。

4. 一质点的运动方程为 $x = 2t$,$y = 19 - 2t^2$,则质点的轨道方程为＿＿＿＿＿＿＿＿,$t = 2$ s 时的位置矢量为＿＿＿＿＿＿,$t = 2$ s 时的瞬时速度为＿＿＿＿＿＿,瞬时加速度为＿＿＿＿＿＿。

5. 如图 1.1 所示，质点作半径为 R、速率为 v 的匀速率圆周运动，由点 A 运动到点 B，则位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ = ________，路程 s = ________，$\Delta \boldsymbol{v}$ = ________，$|\Delta \boldsymbol{v}|$ = ________，Δv = ________。

6. 一物体作如图 1.2 所示的斜抛运动，测得在轨道点 A 处速度的大小为 v，其方向与水平方向夹角为 30°，则物体在点 A 的切向加速度 a_t = ________，轨道的曲率半径 ρ = ________。

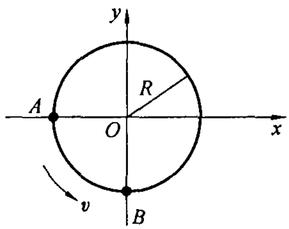


图 1.1

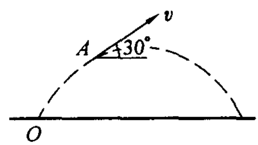


图 1.2

7. 一质点沿半径为 R 的圆周运动，其角坐标与时间的函数关系为 $\theta = 10\pi t + 0.5\pi t^2$(SI)，则质点的角速度 ω = ________，角加速度 α = ________，切向加速度 a_t = ________，法向加速度 a_n = ________。

8. 一质点沿半径 $R = 1$ m的圆周运动，已知走过的圆弧 s 和时间 t 的关系为 $s = 2 + 2t^2$(SI)，那么当总加速度 a 与半径夹角恰好为 45° 时，质点所经过的路程 s = ________。

9. 如图 1.3 所示，小船以相对于水的速度 $\boldsymbol{v}$ 开行，$\boldsymbol{v}$ 的方向与水流方向夹角为 α，若水流速度为 $\boldsymbol{u}$，则小船相对于岸的速度的大小为________________，与水流方向的夹角为________________。

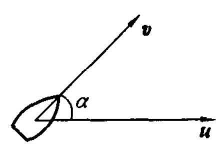


图 1.3

(三) 计算题

1. 一质点沿 x 轴运动，坐标与时间的变化关系为 $x = 4t - 2t^3$，试计算：

(1) 在最初 2 s 内的平均速度和 2 s 末的瞬时速度；

(2)1 s 末到 3 s 末的位移和平均速度；

(3)1 s 末到 3 s 末的平均加速度；

(4)3 s 末的瞬时加速度。

解 (1) 由 $x = 4t - 2t^3$ 可得

$$x\,|_{t=0} = 0\ \mathrm{m}$$

$$x\,|_{t=2} = (4 \times 2 - 2 \times 2^3)\ \mathrm{m} = -8\ \mathrm{m}$$

$$\bar{v} = \frac{-8-0}{2-0}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

又
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (4 - 6t^2)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

所以
$$v\,|_{t=2} = (4 - 6 \times 2^2)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(2) 因为
$$x\,|_{t=1} = (4 \times 1 - 2 \times 1^3)\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{m}$$

$$x\,|_{t=3} = (4 \times 3 - 2 \times 3^3)\ \mathrm{m} = -42\ \mathrm{m}$$

所以位移大小为

$$r = (-42 - 2)\ \mathrm{m} = -44\ \mathrm{m}$$

平均速度的大小为

$$\bar{v} = \frac{-42-2}{3-1}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -22\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(3) 由
$$v\,|_{t=1} = -2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$v\,|_{t=3} = (4 - 6 \times 3^2)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

得
$$\bar{a} = \frac{-50-(-2)}{3-1}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = -24\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

(4) 由
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -12t\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

得
$$a\,|_{t=3} = -12 \times 3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = -36\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

2. 一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a = 2 + 6x^2$(SI)，如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解 设质点在 x 处的速度为 v，则加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

等式两边同乘以 $\mathrm{d}x$ 并积分得

$$\int_0^x (2+6x^2)\mathrm{d}x = \int_0^v v\mathrm{d}v$$

得
$$v = 2\sqrt{x+x^3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

3. 一质点由静止开始作直线运动，初始加速度为 a_0，以后加速度均匀增加，每经过 τ 秒增加 a_0，求经过 t 秒后质点的速度和加速度。

解 本题可以通过积分法，由质点运动加速度求解质点的速度和位移。由题意可知，加速度和时间的关系为

$$a = a_0 + \frac{a_0}{\tau}t$$

根据直线运动加速度的定义

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$v - v_0 = \int_0^t \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^t a\mathrm{d}t = \int_0^t \left(a_0 + \frac{a_0}{\tau}t\right)\mathrm{d}t = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2$$

因为 $t=0$ 时，$v_0 = 0$，故

$$v = a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2$$

根据直线运动速度的定义式有

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$x - x_0 = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \left(a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{a_0}{6\tau}t^3$$

因为 $t=0$ 时，$x_0 = 0$，则位移为

$$x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{a_0}{6\tau}t^3$$

4. 某物体从空中由静止落下，其加速度 $a = A - Bv$（A 和 B 为常量），试求：

(1) 物体下落的速度；

(2) 物体的运动方程。

(取竖直向下为 y 轴正向，设 $t=0$ 时，$y_0=0, v_0=0$)

解 (1) 由加速度定义可得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A-Bv$$

即
$$\frac{\mathrm{d}v}{A-Bv}=\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{B}\int_0^v \frac{\mathrm{d}(A-Bv)}{A-Bv}=\int_0^t \mathrm{d}t$$

得
$$\ln\frac{(A-Bv)}{A}=-Bt$$

$$\frac{A-Bv}{A}=\mathrm{e}^{-Bt}$$

所以
$$v=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})$$

(2) 由速度定义可得

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})$$

即
$$\mathrm{d}y=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})\mathrm{d}t$$

$$\int_0^y \mathrm{d}y=\int_0^t \frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})\mathrm{d}t$$

得
$$y=\frac{A}{B}\left[t+\frac{1}{B}(\mathrm{e}^{-Bt}-1)\right]=\frac{A}{B}t+\frac{A}{B^2}(\mathrm{e}^{-Bt}-1)$$

5. 在质点运动中，已知 $x=a\mathrm{e}^{kt}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-bk\mathrm{e}^{-kt}$，$y|_{t=0}=b$。求质点的加速度和它的轨迹方程。

解 因为
$$a_x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=ak^2\mathrm{e}^{kt}$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=bk^2\mathrm{e}^{-kt}$$

所以
$$\boldsymbol{a}=ak^2\mathrm{e}^{kt}\boldsymbol{i}+bk^2\mathrm{e}^{-kt}\boldsymbol{j}$$

由
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-bk\mathrm{e}^{-kt}$$

得
$$\int \mathrm{d}y = \int (-bk\mathrm{e}^{-kt})\mathrm{d}t$$
$$y = b\mathrm{e}^{-kt} + c$$
据初始条件 $y|_{t=0} = b + c = b$ 知 $c = 0$,即
$$y = b\mathrm{e}^{-kt}$$
所以
$$xy = ab$$

6.一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + 4t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$(SI),试求:

(1) 它的速度和加速度;

(2) 它的轨迹方程。

解 (1)
$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (8t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 8\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) 由运动方程可得
$$x = 1 \qquad y = 4t^2 \qquad z = t$$
所以轨迹方程为
$$x = 1 \qquad y = 4z^2$$

7.已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r} = A_1\cos\omega t\boldsymbol{i} + A_2\sin\omega t\boldsymbol{j}$(SI),其中 A_1、A_2、ω 均为正的常量。

(1) 试证明质点的运动轨迹为一椭圆;

(2) 证明质点的加速度恒指向椭圆中心;

(3) 试说明质点在通过图 1.4 中点 M 时,其速率是增大还是减小?

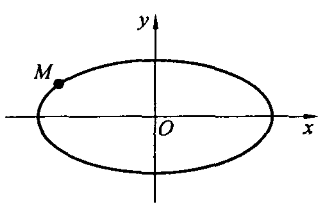


图 1.4

证明 (1)
$$\begin{cases} x = A_1\cos\omega t \\ y = A_2\sin\omega t \end{cases}$$
消去 t 得轨迹方程为
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1(\text{椭圆})$$

(2)
$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega A_1\sin\omega t\boldsymbol{i} + \omega A_2\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A_1 \cos \omega t \boldsymbol{i} - \omega A_2 \sin \omega t \boldsymbol{j} =$$

$$-\omega^2 (A_1 \cos \omega t \boldsymbol{i} + A_2 \sin \omega t \boldsymbol{j}) = -\omega^2 \boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 反向,故 $\boldsymbol{a}$ 恒指向椭圆中心。

(3) 当 $t = 0$ 时,$x = A_1 \cos 0 = A_1$,$y = A_2 \sin 0 = 0$,质点位于图 1.5 中的点 P。

当 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时

$$x = A_1 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$y = A_2 \sin \frac{\pi}{2} = A_2$$

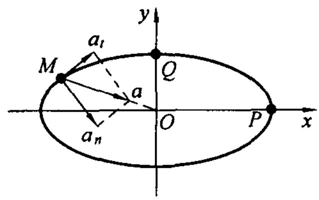
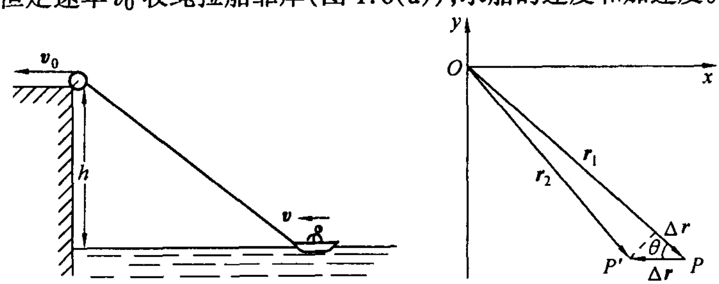


图 1.5

质点位于图 1.5 中的 Q 点。显然质点在椭圆形轨迹上沿反时针方向运动。在 M 点,加速度 a 的切向分量 a_t 如图所示。可见在该点切向加速度 a_t 的方向与速度 v 的方向相反。所以,质点在通过 M 点 时速率减小。

8. 河中有一小船,人在高为 h 的岸上用绳子通过一定滑轮以恒定速率 v_0 收绳拉船靠岸(图 1.6(a)),求船的速度和加速度。



(a) (b)

图 1.6

解 以滑轮为原点,选取坐标系如图 1.6(b) 所示,则船的位矢为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} - h\boldsymbol{j}$$