重点高中

数学导读

王祥麟　宋淑英　等编

DAODU CONGSHU

上海科学技术文献出版社

重点高中数学导读

王祥麟　宋淑英 等编

上海科学技术文献出版社

重点高中数学导读
王祥麟　宋淑英　等编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路 2 号）
新 华 书 店 经 销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 18.5　字数 447,000
1990 年 5 月第 1 版　1990 年 5 月第 1 次印刷
印数：1—5,800
ISBN 7-80513-481-2/O·41
定 价：6.60 元
《科技新书目》205-327

前　　言

本书是根据现行全日制中学数学教学大纲和高中数学课本(统编教材和重点中学教材)，凭藉编者数十年教学经验，又结合当前学生一般水平编写而成的一本高中数学学习指导和复习提高的参考书。包括代数、三角、立体几何和解析几何等。语言通俗易懂、阐述深入浅出，起到导读作用。

本书共分四篇。第Ⅰ篇代数与三角，第Ⅱ篇立体几何与解析几何，第Ⅲ篇高中各年级期中、期终考试试题(附解答)，第Ⅳ篇如何解题。

第Ⅰ、Ⅱ篇，按课本顺序逐章介绍(1)内容要点。(2)重点、难点剖析。对重点、难点、关键及知识网络结构作了精辟独到的分析，以达到帮助读者抓住重点，解决难点，切实掌握教材内容。(3)思路与技能。该部分对各种解题技能技巧和重要数学方法从培养思维、开启智能的角度详尽介绍，为此例题均经精选，有典型性且具有一定的深度。(4)启示或小议。帮助读者开拓知识面，综合沟通数学各学科之间的联系。(5)每章最后配有练习题及自测题，并均有解答，以供自检。第Ⅲ篇，按照教学进度与教学要求，设计编写了各年级期中、期终考试试题(附解答)，供读者自我测定，也可供教师命题时参考。第Ⅳ篇，简要地介绍数学解题思路与方法，帮助读者正确设计解题途径，从而提高解题技能水平。

本书第Ⅰ篇中第一、四、八单元由王祥麟、张美均编写；第二、三单元由苏绍锋编写；第五、六、七单元由宋淑英编写。第Ⅱ

篇中第一、二单元由李彦中编写；第三、四、五、六单元由王祥麟、崔家华编写。第Ⅲ篇由张美均、苏绍锋、李彦中、宋淑英、陈张平编写。第Ⅳ篇由谢美芳编写。全书图形由浦美燕同志绘制。最后全书由王祥麟进行统稿。限于编者水平，难免有缺点与不足之处，敬请广大读者批评、指正。

愿本书能成为广大高中学生和数学爱好者的良师益友。

编　者 1989 年 5 月

目　　录

第Ⅰ篇　代　数　与　三　角

第Ⅱ篇 立体几何与解析几何

第Ⅳ篇　如　何　解　题

第Ⅰ篇　代数与三角

第一单元　幂函数、指数函数和对数函数

一、内容提要

> 集合、子集、交集、并集、补集和全集；映射、一一映射、逆映射、函数及其性质；幂函数、指数函数和对数函数，指数方程和对数方程。

二、重点、难点剖析

集合是近代数学最基本的概念之一，很多重要的数学分支如近世代数、实变函数、概率统计和拓扑学等都建立在集合论的基础上。随着科学技术的迅速发展，"集合"这一术语在科技、科普读物中也经常出现，因此，中学阶段学习一些集合初步知识显得十分必要。它既可为今后学习近代数学提供有利条件，同时也有利于中学数学的学习。因此集合及其有关概念和它们相互之间的区别与联系是本单元的重点。然而由于集合概念逻辑性强、符号又较多，所以初学时较难理解和掌握，故它又是一个难点。

此外，应该认识到函数概念是中学数学中的一个重要内容，所以映射、函数、幂函数、指数函数和对数函数等基础知识，都是本单元的重点。

映射，由映射来定义函数、逆映射来定义反函数是学习时的难点。因此在学习中我们必须加以重视。

（一）集合

1. 集合是数学中的一个原始概念，不能用其它更基本的概念来定义它，故又称为不定义概念，对它只能作描述性的说明。

集合中的对象叫做集合里的元素，元素可以是任何事物。

2. 构成一个集合必须具备以下三个特征

(1) 确定性　集合中的任何一个对象，可以通过某种法则来判定它属于或不属于这个集合，二者必居其一。

例如“相当小的数的全体”、“模范中学高一(1)班身长比较高的男学生”、“好看的花布”等它们都不能构成集合，因为“相当小”、“较高”、“好看”这些标准都很模糊，不具有确定性。而“大于5的数的全体”、“模范中学高一(1)班身高不低于1.65cm的男学生”等都是集合。

(2) 互异性　在同一个集合里，不能重复出现相同的元素。

例如：$\{a、b、c、c、d\}$的写法是错误的，应该写成：$\{a、b、c、d\}$。

(3) 无序性　在同一集合里，不考虑元素之间顺序。例如$\{a、b、c\}$与$\{b、c、a\}$、$\{c、a、b\}$都表示同一集合。

3. 集合的表示方法

(1) 描述法　给出集合中元素的代表符号，用数学语言对集合中的元素的特性加以说明的方法。例如集合$A=\{x|1<x<2\}$这里竖线前面的x叫做代表元素，后面部分$1<x<2$是描述代表元素具有的特性。

(2) 列举法　把集合中的元素一一列出的方法。例如：我国古代四大发明，可表示为：{指南针、火药、造纸、活字印刷}；又如集合$M=\{-5, -2, 0, 1\}$。

上述两种表示方法：列举法能比较具体看清集合中的元素，而描述法能看清元素的特性。采用哪一种方法要由具体问题而定。但这样说，并不是说任何一个集合都可以同时用上述两种方法表示，例如上述集合A就不能用列举法表示。集合M亦不宜用描述法$\{x|x=-5, x=-2, x=0, x=1\}$来表示。

4. 空集

空集是一个数学概念，不是一个实体，它是为了方便而引入，对它需注意：

(1) 空集是一个不含任何元素的集合，记作 ϕ。例如求方程 $x^2+1=0$ 的实数根，显然方程无解，此时它的解用集合来表示就可以记作为 $x\in\phi$。又如两平行直线的公共交点的集合是 ϕ。

(2) 空集 ϕ 与单元集合 $\{0\}$ 的区别。空集不包含任何元素，$\{0\}$ 表示集合中有一个元素零，二者完全不同。例如方程 $x(x^2+1)=0$ 的实数解用集合表示就是 $\{x|x=0\}$，即 $x\in\{0\}$。

(3) ϕ 与 $\{\phi\}$ 的不同。ϕ 是空集，$\{\phi\}$ 表示用空集 ϕ 作元素组成的集合。所以 $\phi\in\{\phi\}$。由此可见，集合中的元素也可以以集合形式出现。例如集合 $\{1、2、\{3,5\}\}$ 它的元素是 1、2、和 $\{3,5\}$。

5. 子集、真子集

(1) 定义：二个集合 A、B，如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素，那么 A 叫做 B 的子集。记作 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）。

这里 $A\subseteq B$ 包含了二种可能，$A=B$ 或 $A\subset B$，且二者只居其一。

二个集合 A、B，如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素，而 B 中至少有一个元素不属于 A，那么 A 叫做 B 的真子集。记作 $A\subset B$（读作 A 真包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 真包含 A）。

例如写出集合 $\{a、b、c\}$ 的所有子集和真子集。

[解] 子集：ϕ、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a、b\}$、$\{a、c\}$、$\{b、c\}$、$\{a、b、c\}$。

真子集：上述子集中除去 $\{a、b、c\}$。

(2) 子集的性质

1) $A\subseteq A$。

2) 如果 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$ 则 $A\subseteq C$。

3) 规定 $\phi\subseteq A$（空集是任何集合的子集）。

4）如果 $A\subseteq B$, $B\supseteq A$ 则 $A=B$。

5）有限集合 $A=\{a_1、a_2、\cdots、a_n\}$ 的子集个数为 2^n 个。真子集的个数为 2^n-1 个。

在学习集合时，对符号的使用应特别注意：元素与集合之间的从属关系只能用“$\in$”或“$\notin$”表示；集合与集合之间的包含用“$\supseteq$”，真包含用“$\supset$”，相等用“$=$”。相互不能混淆。例如集合 $M=\{0、1、2\}$、集合 $N=\{0\}$ 它们之间的关系是 $M\supset N$。$1\in M$、$1\notin N$。

6. 交集、并集、全集和补集

课本不仅用文字给出了它们的定义，还用表达式给予表示。如：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$,

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$,

$\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$,

这些式子中需注意“且”和“或”，$A\cap B$ 的任何一个元素都是 A、B 的公共元素。所以 $A\cap B$ 必定是 A 与 B 的公共子集。即 $A\cap B\subseteq A$、$A\cap B\subseteq B$。而 $A\cup B$ 可能成下列三种情况：

1）$x\in A$ 但 $x\notin B$，2）$x\in B$ 但 $x\notin A$，3）$x\in A$ 且 $x\in B$。因此 $A\cup B$ 是由所有至少属于 A、B 二者之一的元素组成的集合，不难得出 $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$。$\overline{A}$ 表示从全集中除去属于 A 的元素余下的元素组成的集合。

此外，还应熟练地掌握它们的一些主要性质。如：$A\cap\phi=\phi$，$A\cup\phi=A$，$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$，$\overline{\overline{A}}=A$，$A\cap I=A$，$A\cup I=I$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 等。

［例 1］设 M、N 是二个非空集合，而且 $M\neq N$，如果 $A=M\cap N$，那么 $M\cup A=$____。

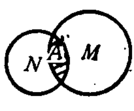


图 1-1-1

［解］由图Ⅰ-1-1 不难发现 $M\cup A=M$。

［例 2］设 $I=\{1、2、3\}$，满足 $\overline{A\cup B}=\{2\}$ 的集合共有几组数，并把它们写出来。

［解］ 由题意得 $A\cup B=\{1,\ 3\}$

∴ $A=\{1\}$、$B=\{3\}$；$A=\{3\}$、$B=\{1\}$；$A=\{1,3\}$、$B=\{1\}$；$A=\{1,\ 3\}$、$B=\{3\}$；$A=\{1\}$、$B=\{1,\ 3\}$；$A=\{3\}$、$B=\{1,\ 3\}$；$A=\{1,\ 3\}$、$B=\{1,\ 3\}$；$A=\phi$、$B=\{1,3\}$；$A=\{1,3\}$、$B=\phi$。故它有 9 组数。

［例 3］ 在直角坐标系中，表示点$(-2,\ 3)$和$(2,\ 4)$的集合是(　　)。

A. $M=\{x_1=-2、y_1=3，x_2=2、y_2=4\}$，

B. $N=\{(x、y)\mid |x|=2,\ y_1=3\ \ y_2=4\}$，

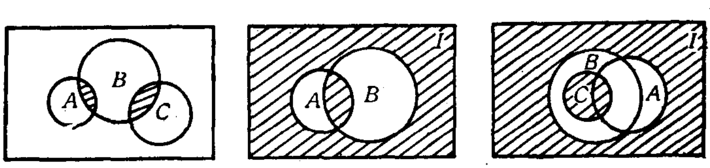
C. $S=\{(x、y)\mid(-2,\ 3)、(2,\ 4)\}$，

D. $T=\{-2、3、2、4\}$。

［解］ 选择 C。∵A、B、D 中的集合 M、N、T 都仅说明它们含有四个元素 -2、3、2、4。未能表示满足条件的点的对应的有序数对。

［例 4］ (1) 用集合符号表示图中的阴影部分；(2) 用图形表示给出的集合。

(1)



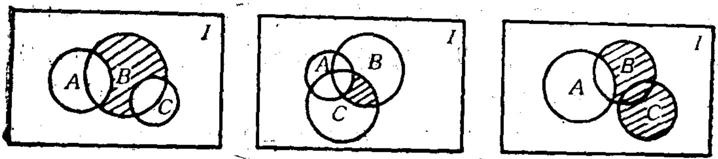
(A)　　(B)　　(C)

图 Ⅰ-1-2

(2) $\overline{A\cup C}\cap B$；$(A\cap C)\cap\bar{A}$；$(\bar{A}\cap B)\cup C$。

［解］ (1) (a) $(A\cap B)\cup(B\cap C)$；(b) $\overline{A\cup B}\cup(A\cap B)$；(c) $\overline{A\cup B}\cup C$。

(2)



(D) $\overline{A\cup C}\cap B$ (E) $(A\cap C)\cap\overline{A}$ (F) $(\overline{A}\cap B)\cup C$

图 Ⅰ-1-2

（二）映射、一一映射和逆映射

1. 映射 设 A、B 为二个集合，如果按照某种对应法则 f、对于集合 A 中的任何一个元素在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射。记作 $f: A\to B$。A 中的元素 a，对应于 B 中的元素 b，b 叫做 a（在法则 f 下）的象，a 叫做原象。

事件1 圆面积 S 与半径 r 之间存在 $S=\pi r^2$。

事件2 五个高校毕业生可以分配到6个部门工作，分配方案是：$A=\{A、B、C、D、E\}$

$B=\{1、2、3、4、5、6\}$

事件3 二名武警战士，负责高一年级四个班级的军训，分工办法是：$A=\{甲，乙\}$

$B=\{1，2，3，4\}$

事件4 $A=\{0, 1, 2, 3\cdots, n\}$ $B=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\cdots, \frac{1}{n}\right\}$ 对应法则 f 是“取倒数”。