

实用数学

手册

(第2版)

叶其孝 主编
沈永欢



科学出版社
www.sciencep.com



实用数学手册

(第 2 版)

叶其孝 沈永欢 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本手册在第1版的基础上进行修订再版,共26章,在前17章中除保留了第1版中第1~17章的大部分内容外,同时也对这部分内容做了一些修改和增补,另外,在18~26章中修订和扩写了常微分方程和动力系统、科学计算、组合论、图论、运筹学、控制论、最优化方法、数学建模等内容,删去了第1版中的有限元方法、计算机基本知识、信息论等章节,同时也增加了有关有限差分法和动力系统、重要的多元分析等方面的内容。本手册内容比较全面、准确可靠、注重应用,同时注重编排技巧,并附有便于读者检索的比较详尽的索引。

本手册可供广大科技工作者、工程技术人员以及理工科大学生查阅参考。

图书在版编目(CIP)数据

实用数学手册. 叶其孝, 沈永欢主编. —2版. —北京: 科学出版社, 2006
ISBN 7-03-016344-3

I. 实… II. ①叶…②沈… III. 数学-手册 IV. O1-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 116719 号

责任编辑: 吕 虹 张 扬/责任校对: 张怡君
责任印制: 钱玉芬/封面设计: 黄华斌

版权所有, 违者必究, 未经本社许可, 数字图书馆不得使用

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1992年8月第 一 版 开本: A5(890×1240)

2006年1月第 二 版 印张: 35 5/8

2006年1月第一次印刷 字数: 1 470 000

印数: 1—6 000

定价: 72.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(环伟))

《实用数学手册》编写成员

主 编 叶其孝 沈永欢

成 员 (按姓氏笔画排序)

孙山泽 刘宝光 许履瑚 唐 云

梁在中 蔡蓓蓓

第 2 版前言

《实用数学手册》自 1992 年出版以来深受广大科技工作者、大学生以及高校和中学数学教师的欢迎,多次重印。

10 多年来数学及其应用的发展极为迅速,更由于计算机及其速度和精度,并行计算、网络技术等计算技术以及其他技术突飞猛进的发展,数学的应用范围日益扩大,对数学的要求也越来越高.特别是,数学的应用很大程度上是通过数学建模来体现的.数学建模以及相伴的计算和模拟(simulation,也译作“仿真”)已经成为现代科学的一种基本技术.因此,及时地按照科学和数学及其应用的发展来做一些修订是必要的。

1992 年出版的本手册就强调基础数学和应用数学的统一性,在第 2 版中我们坚持并加强了这一点.我们不再区分初等数学、基础数学和应用数学.我们保留了第一版第 1 章到第 17 章绝大部分的内容,但也做了一些修改和增补;把一些相对说来可能是过时的,或者已经有非常成熟的软件的章节,例如删去了 26 章(有限元方法)、27 章(计算机基本知识)和 28 章(信息论).同时,在某些方面通过增订的方式来进一步加强.例如,唐云教授增订的第 8 章(常微分方程和动力系统),简洁地增加了有关有限差分法和动力系统的内容.刘宝光和叶其孝教授增订的第 18 章(科学计算)突出了算法的重要性,孙山泽教授增订的第 22 章(数理统计),增加了应用广泛的抽样调查和多元分析的内容,刘宝光教授增订的第 23 章(运筹学)和第 25 章(最优化方法)也突出了算法.尽管很多章节都包含了不少数学建模的内容,但是为了强调数学建模的重要性,叶其孝教授写了第 26 章(数学建模),简要介绍了什么是数学建模的全过程和难点以及一些有用的建模方法和具体的数学模型.在第 2 版的修订过程中我们主要参考了 2002 年由 Chapman & Hall/CRC 出版社出版, Daniel Zwillinger 主编的第 31 版 CRC Standard Mathematical Tables and Formulae. 第 2 版力图保持本手册的所有优点.如上所述,尤其在兼顾基础数学和应用数学,增补应用范围较广的内容以及突出算法等方面,做了很多工作.同时,在内容简明、准确可靠、便于检索等方面,继续做了不少努力。

由于修订时间比较仓促,更由于我们的学术水平有限,缺点和错误在所难免,我们真诚地欢迎读者批评、指正。

我们要感谢多年来不断提出建议帮助我们进行修订的读者。

我们要感谢科学出版社的吕虹、张扬同志,他们为组织本次修订做了大量细致的工作,同时在修订过程中也提出了许多宝贵的意见。

第 1 版前言

广大科学技术工作者、高等工科院校教师和中学数学教师、工程技术人员以及理工科大学学生需要这样一本数学手册：全面系统、准确简明、篇幅不大、信息丰富、检索方便，并能兼顾基本理论与应用领域。这本手册就是为适应这种要求编写的。

本手册以高等数学为主，为便于广大读者使用，也用极少篇幅概述了初等代数、几何与三角的基本概念、定理和公式。全书主体分为两大部分。第一部分属于基础数学，从第 4 章到第 13 章，分别概述解析几何学、线性代数学、微积分学、复变函数论、常微分方程论、偏微分方程论、微分几何学、积分方程论、变分法与概率论的基本概念和理论。考虑到不少现代数学分支已广泛应用于科学技术领域，我们还编写了题为“纯粹数学选题”的第 14 章，简略介绍集论、代数结构、一般拓扑、勒贝格积分、泛函分析与微分流形的一些基本内容。第二部分属于应用数学，从第 15 章到第 28 章，分别概述向量分析和张量分析、积分变换、特殊函数、数值分析、组合论、图论、随机过程论、数理统计、运筹学、控制理论、最优化方法、有限元方法、计算机科学与信息论的基本理论和方法。应当说，本书内容既比较全面，又突出重点。

本手册特别注意兼顾基础数学与应用数学。从上段列举的章目中不难看到，在这本手册中，读者不但可以查到高等数学各个领域的基本内容，而且可以查到应用数学各个领域的常用工具和方法。象数理统计、数值分析、最优化方法、有限元方法、运筹学、图论、信息论等，在小型数学手册中，一般都是查不到的。应当说，本书兼顾了基本理论与实际应用，有较大的容量和广泛的适应性。

手册必须可信。在编写过程中，我们参考了不少与各章内容有关的权威著作，并对手稿反复进行了讨论、检查与核对。同时，我们也注意文字简明扼要，竭力避免公式堆砌，并使各章尽可能互相呼应。应当说，本书的科学性、准确性和简明性是有保证的。

手册是为广大读者随时查阅用的，必须便于检索。我们在这方面下了一些功夫。凡是正文中初次阐释的定义、概念、具有称谓的定理和公式，其名称均以黑体字印刷。书后有按汉字笔画为序的名目索引，读者极易通过它找到所需查阅的内容的所在的页码。数学各部分联系很多，所以书中经常提示读者参看有关章节。考虑到可能有时读者连所需查阅的内容的名目都不太记得，因此我们有意识地编排了一个比较详尽的目录，读者也可通过目录查找内容。经过这样的安排，应当说，检索本手册是迅速方便的。

本书先由编者分头编写，然后互相校阅、讨论修改，再由兄弟院校专家审阅，由编者再修改，最后由编者之一的沈永欢教授通观全书定稿。我们特别约请陈祖荫教授编写了第 22 章数理统计，汪树中副教授编写了第 26 章有限元方法，袁一林同志编写了

第 20 章图论,姜跃妮同志编写了第 27 章计算机概论.高旅端副教授和陈志副教授分别阅读了第 18 章数值分析和第 25 章最优化方法的修改稿,并提出了很多建议.北京理工大学与北京航空航天大学应用数学系的有关教授为审阅本书付出了辛勤的劳动,提出了许多宝贵的意见.对于这些同志的大力协助,我们谨致衷心的感谢.

编者学识浅陋,又缺乏编写手册的经验,缺点错误在所难免,欢迎读者批评指正.

编 者

目 录

第2版前言	i
第1版前言	iii
1. 初等代数	1
§ 1.1 代数运算	1
1.1.1 数系	1
1.1.2 数的基本运算规律	1
1.1.3 指数	1
1.1.4 对数	2
1.1.5 复数	2
1.1.6 乘法与因式分解公式	4
1.1.7 分式	4
1.1.8 比例	6
1.1.9 根式	7
1.1.10 不等式	7
§ 1.2 数列	8
1.2.1 等差数列	8
1.2.2 等比数列	9
1.2.3 等比级数	9
1.2.4 常用的求和公式	9
§ 1.3 排列、组合与二项式定理	10
1.3.1 排列	10
1.3.2 组合	10
1.3.3 二项式定理	11
§ 1.4 一元多项式	11
1.4.1 一元多项式的运算	11
1.4.2 整除	12
1.4.3 最大公因式	13
1.4.4 因式分解定理	14
§ 1.5 二阶、三阶行列式与代数方程	15
1.5.1 二阶、三阶行列式	15
1.5.2 三元一次方程组的解法	16
1.5.3 一元二次方程	16

1.5.4	一元三次方程	16
1.5.5	一元四次方程	17
1.5.6	根与系数的关系	17
2.	初等几何	19
§ 2.1	平面几何	19
2.1.1	直线 角	19
2.1.2	三角形	20
2.1.3	四边形	21
2.1.4	正多边形	22
2.1.5	圆	23
§ 2.2	立体几何	24
2.2.1	直线与平面	24
2.2.2	多面体	26
2.2.3	旋转体	28
2.2.4	立体角	30
§ 2.3	证题法概述	30
2.3.1	命题 命题之间的关系	30
2.3.2	证明方法	31
3.	三角学	35
§ 3.1	平面三角	35
3.1.1	角的两种度量制	35
3.1.2	三角函数的定义和基本关系	35
3.1.3	三角函数的诱导公式 三角函数的图形与特性	37
3.1.4	两角和的三角函数公式 倍角公式与半角公式	42
3.1.5	三角函数的和差与积的关系式	43
3.1.6	三角形基本定理	44
3.1.7	斜三角形解法	45
3.1.8	三角形面积公式	45
3.1.9	反三角函数	46
3.1.10	三角方程	48
§ 3.2	球面三角	51
3.2.1	球面角 球面二角形 球面三角形	51
3.2.2	球面三角形的性质	52
3.2.3	球面三角形的计算公式	52
3.2.4	球面直角三角形解法	54
3.2.5	球面斜角三角形解法	55

4. 解析几何	56
§ 4.1 笛卡儿直角坐标系	56
4.1.1 笛卡儿直角坐标系	56
4.1.2 两点间的距离	57
4.1.3 分线段为定比的分点的坐标	58
4.1.4 坐标变换	59
§ 4.2 曲线方程与曲面方程	60
4.2.1 基本概念	60
4.2.2 曲线的参数方程	61
4.2.3 交点与交线	61
§ 4.3 平面上的直线	62
4.3.1 平面上的直线方程	62
4.3.2 点到直线的距离 直线的法方程	63
4.3.3 两直线的夹角及平行、垂直条件	63
4.3.4 直线束 三直线共点的条件	64
§ 4.4 二次曲线	64
4.4.1 圆	64
4.4.2 椭圆	65
4.4.3 双曲线	66
4.4.4 抛物线	67
4.4.5 圆锥曲线	68
4.4.6 一般二次曲线	71
§ 4.5 常用的平面曲线	73
§ 4.6 平面、空间中的直线	77
4.6.1 平面方程	77
4.6.2 点到平面的距离 平面的法方程	78
4.6.3 空间中的直线方程	79
4.6.4 直线、平面的相互位置	79
§ 4.7 二次曲面	82
4.7.1 球面	82
4.7.2 椭球面	83
4.7.3 双曲面	84
4.7.4 抛物面	85
4.7.5 柱面	85
4.7.6 锥面	87
4.7.7 一般二次曲面	87

5. 线性代数	92
§ 5.1 行列式	92
5.1.1 n 阶行列式的定义	92
5.1.2 行列式的性质	93
5.1.3 行列式的计算	95
5.1.4 拉普拉斯展开 行列式的乘法公式	96
5.1.5 范德蒙德行列式与格拉姆行列式	97
5.1.6 连加号 Σ 与连乘号 Π	98
§ 5.2 矩阵	99
5.2.1 n 维向量空间	99
5.2.2 向量组的线性关系	100
5.2.3 矩阵及矩阵的秩	101
5.2.4 矩阵的运算	102
5.2.5 矩阵的逆	105
5.2.6 矩阵的分块 初等矩阵	105
5.2.7 几种特殊的矩阵	107
§ 5.3 线性方程组	109
5.3.1 含 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组	109
5.3.2 一般线性方程组	110
§ 5.4 线性空间	114
5.4.1 线性空间的维数 基与坐标	114
5.4.2 线性子空间	114
5.4.3 子空间的交、和、直和	115
§ 5.5 线性变换	115
5.5.1 线性变换的定义与运算	115
5.5.2 线性变换的矩阵	116
5.5.3 本征值与本征向量	117
§ 5.6 若尔当典范形	120
5.6.1 最小多项式	120
5.6.2 λ 矩阵的典范形	121
5.6.3 不变因子与初等因子	122
5.6.4 若尔当典范形	122
§ 5.7 二次型	123
5.7.1 二次型及其矩阵表示	123
5.7.2 标准形	124
5.7.3 二次型的惯性指数	124
5.7.4 正(负)定二次型	125

§ 5.8 欧几里得空间	126
5.8.1 度量矩阵	126
5.8.2 规范正交基	126
5.8.3 正交变换与对称变换	127
5.8.4 实对称矩阵的对角化	128
5.8.5 酉空间	129
6. 微积分	130
§ 6.1 分析基础	130
6.1.1 实数	130
6.1.2 数列的极限	132
6.1.3 函数	136
6.1.4 函数的极限	140
6.1.5 无穷小、无穷大的比较	142
6.1.6 函数的连续性	143
6.1.7 $\mathbb{R}^n$ 中的点集	144
6.1.8 n 元函数的极限	145
6.1.9 n 元函数的连续性	146
§ 6.2 微分学	147
6.2.1 函数的导数与微分	147
6.2.2 多元函数的偏导数与全微分	151
6.2.3 隐函数	155
6.2.4 微分学基本定理	160
§ 6.3 微分学的应用	164
6.3.1 单元函数微分学的应用	164
6.3.2 多元函数微分学的应用	167
§ 6.4 不定积分	171
6.4.1 基本概念与性质	171
6.4.2 积分法	172
6.4.3 原函数可表为有限形式的几类函数	177
6.4.4 不定积分表	181
§ 6.5 定积分	192
6.5.1 定积分的定义	192
6.5.2 可积函数类	193
6.5.3 定积分的性质	193
6.5.4 定积分的中值定理	194
6.5.5 微积分学基本定理	195
6.5.6 定积分的计算	195

§ 6.6 重积分	196
6.6.1 二重积分	196
6.6.2 三重积分	198
6.6.3 n 重积分	201
§ 6.7 定积分与重积分的应用	202
6.7.1 平面图形的面积	202
6.7.2 曲面的面积	203
6.7.3 体积	204
6.7.4 弧长	204
6.7.5 质量	205
6.7.6 重心	205
6.7.7 转动惯量	206
§ 6.8 斯蒂尔切斯积分	206
6.8.1 有界变差函数	206
6.8.2 可求长曲线	208
6.8.3 斯蒂尔切斯积分的定义	208
6.8.4 斯蒂尔切斯积分存在的条件	209
6.8.5 斯蒂尔切斯积分的性质	209
6.8.6 斯蒂尔切斯积分的计算	211
§ 6.9 曲线积分与曲面积分	211
6.9.1 第一型曲线积分	211
6.9.2 第二型曲线积分	213
6.9.3 第一型曲面积分	216
6.9.4 第二型曲面积分	218
§ 6.10 级数	222
6.10.1 数项级数与无穷乘积	222
6.10.2 函数项级数	228
6.10.3 幂级数	232
6.10.4 傅里叶级数	236
§ 6.11 广义积分	242
6.11.1 无有限的广义积分	242
6.11.2 无界函数的广义积分	243
6.11.3 常用的广义积分公式	245
§ 6.12 含参变量积分	246
6.12.1 含参变量的常义积分	246
6.12.2 含参变量广义积分的一致收敛性	247
6.12.3 由含参变量广义积分所确定的函数	247

6.12.4 常用的含参变量积分公式	248
§ 6.13 数值逼近	249
6.13.1 引论	249
6.13.2 魏尔斯特拉斯定理	249
6.13.3 最佳一致逼近多项式	250
6.13.4 切比雪夫多项式	250
6.13.5 切比雪夫多项式在数值逼近的领域里应用举例	251
6.13.6 线性内积空间的最佳逼近	253
6.13.7 函数的最佳平方逼近	254
6.13.8 正交多项式	255
6.13.9 用勒让德多项式作平方逼近	256
6.13.10 函数按切比雪夫多项式展开	257
7. 复变函数	258
§ 7.1 复平面	258
7.1.1 复平面上曲线的方程	258
7.1.2 复平面上的点集 区域	258
7.1.3 扩充复平面	260
§ 7.2 复变函数	261
7.2.1 复变函数	261
7.2.2 复变函数的极限与连续性	261
7.2.3 复数序列与复数项级数	262
7.2.4 复函数序列与复函数项级数	263
§ 7.3 全纯函数 柯西-黎曼方程	264
7.3.1 复变函数的导数	264
7.3.2 共轭调和函数	265
7.3.3 单叶函数及其反函数	266
7.3.4 多值函数 黎曼面	266
§ 7.4 初等复函数	268
7.4.1 有理函数	268
7.4.2 指数函数	268
7.4.3 三角函数 双曲函数	269
7.4.4 对数函数 幂函数	269
7.4.5 反三角函数	270
7.4.6 初等复函数	270
§ 7.5 复积分 柯西积分定理与柯西积分公式	270
7.5.1 复积分的定义与简单性质	270
7.5.2 柯西积分定理	272

7.5.3	柯西积分公式	273
7.5.4	柯西型积分	274
§ 7.6	全纯函数的级数表示	274
7.6.1	复幂级数	274
7.6.2	泰勒展开式	275
7.6.3	常用的泰勒展开式	276
7.6.4	洛朗展开式	278
§ 7.7	孤立奇点与留数	279
7.7.1	孤立奇点及其分类	279
7.7.2	解析函数在无穷远点的性态	280
7.7.3	留数 留数定理	281
7.7.4	利用留数计算定积分	282
7.7.5	辐角原理	283
§ 7.8	亚纯函数 整函数	284
7.8.1	亚纯函数	284
7.8.2	亚纯函数的部分分式展开	285
7.8.3	整函数的无穷乘积展开	286
§ 7.9	解析延拓	287
7.9.1	解析函数元素	287
7.9.2	解析延拓	287
§ 7.10	共形映射	289
7.10.1	全纯函数与共形映射	289
7.10.2	分式线性映射	289
7.10.3	某些初等函数的映射特性	290
7.10.4	对称原理 上半平面映射为多角形	290
7.10.5	黎曼映射定理 边界对应	291
7.10.6	常用共形映射表	293
§ 7.11	解析函数在解平面狄利克雷问题中的应用	295
§ 7.12	解析函数在流体力学中的应用	296
§ 7.13	解析函数在电磁学与热学中的应用	298
§ 7.14	解析函数在平面弹性理论中的应用	299
8.	常微分方程与动力系统	301
§ 8.1	一般概念	301
8.1.1	有关常微分方程的概念	301
8.1.2	有关方程的解的概念	301
§ 8.2	一阶微分方程	302
8.2.1	存在和唯一性定理	302

8.2.2	一阶微分方程的若干可积类型及其通解	303
8.2.3	奇解及其求法	308
§ 8.3	高阶微分方程	309
8.3.1	n 阶正规形微分方程与一阶正规形微分方程组的互化	309
8.3.2	存在和唯一性定理	310
8.3.3	高阶微分方程的若干可积类型及其通解	310
§ 8.4	高阶线性微分方程	312
8.4.1	朗斯基行列式	312
8.4.2	线性微分方程解的结构	313
8.4.3	常系数线性微分方程	315
8.4.4	欧拉方程	318
8.4.5	二阶齐次线性微分方程解的定性性质	318
8.4.6	二阶齐次线性微分方程的幂级数解法	319
§ 8.5	线性微分方程组	321
8.5.1	线性微分方程组解的结构	321
8.5.2	常系数线性微分方程组	322
§ 8.6	动力系统与稳定性理论初步	325
8.6.1	微分方程的解对初值的连续相依性与可微性	325
8.6.2	解对参数的连续相依性与可微性	326
8.6.3	动力系统的一般概念	326
8.6.4	二维定常系统的极限环	328
8.6.5	二维常系数线性微分方程组的奇点	329
8.6.6	李雅普诺夫稳定性的基本概念	332
8.6.7	稳定性与不稳定性的基本定理	333
8.6.8	齐次常系数线性微分方程组零解的稳定性	334
8.6.9	结构稳定性	335
§ 8.7	微分方程在力学、电学中的应用	335
8.7.1	机械系统的振动	335
8.7.2	简单电路	338
§ 8.8	差分方程	340
8.8.1	一般概念	340
8.8.2	线性差分方程	340
8.8.3	例	341
§ 8.9	分岔与混沌	342
8.9.1	连续系统的分岔	342
8.9.2	霍普夫分岔定理	343
8.9.3	离散系统的分岔	344

8.9.4 混沌概念	344
8.9.5 混沌的数值特征	345
9. 偏微分方程论	347
§ 9.1 一般概念	347
§ 9.2 一阶偏微分方程	348
9.2.1 一阶线性偏微分方程	348
9.2.2 一阶拟线性偏微分方程	349
9.2.3 一阶非线性偏微分方程	351
§ 9.3 一阶线性偏微分方程组	354
9.3.1 特征方程 特征方向 特征曲线	354
9.3.2 两个自变量的一阶线性方程组的分类	354
9.3.3 狭义双曲型方程组	355
§ 9.4 二阶线性偏微分方程的分类	357
9.4.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的化简和分类	357
9.4.2 n 个自变量的二阶线性方程的分类	358
§ 9.5 三类典型的二阶线性偏微分方程	358
9.5.1 一维波动方程与定解条件的提法	359
9.5.2 高维波动方程	360
9.5.3 热传导方程	362
9.5.4 拉普拉斯方程和泊松方程	364
§ 9.6 偏微分方程的分离变量法	366
9.6.1 线性齐次方程和齐次边界条件	366
9.6.2 线性非齐次方程和齐次边界条件	369
9.6.3 齐次化原理	370
9.6.4 非齐次边界条件的处理	372
§ 9.7 拉普拉斯方程的格林函数法	373
9.7.1 格林函数及其性质	373
9.7.2 利用格林函数解拉普拉斯方程的第一边值问题	373
9.7.3 利用格林函数解泊松方程的第一边值问题	377
§ 9.8 拉普拉斯方程的位势方法	377
9.8.1 单层位势 双层位势	377
9.8.2 用位势理论解拉普拉斯方程的边值问题	380
§ 9.9 偏微分方程的积分变换法	382
§ 9.10 δ 函数和基本解	384
9.10.1 δ 函数及其性质	384
9.10.2 基本解	385
§ 9.11 定解问题的适定性	389