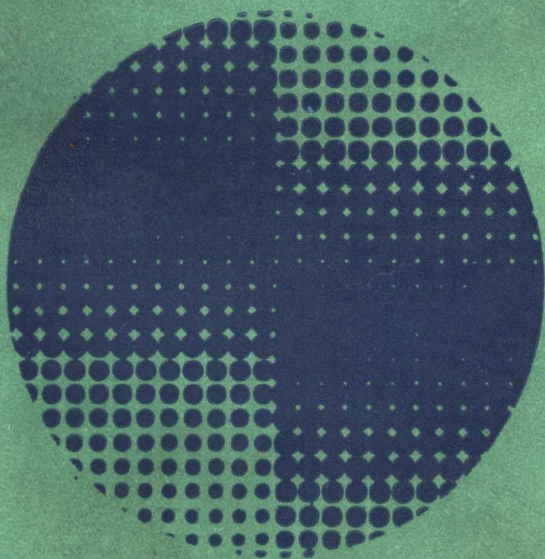


中学生数学思路开拓丛书

集 合 趣 谈

● 韩文法
● 河南教育出版社



JI HE QU TAN

中学生数学思路开拓丛书

集合趣谈

韩文法 著

河南教育出版社

中学生数学思路开拓丛书
集合趣谈

韩文法 著

责任编辑 张国旺

河南教育出版社出版

河南郑州中华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 4印张 81千字

1993年4月第1版 1993年4月第1次印刷

印数1— 2,000册

ISBN 7-5347-0938-5/G·779

定 价 1.15元

前 言

集合论的概念、方法、结论已渗透到几乎所有的数学分支，毫无疑问，在初等数学中它也占有重要的地位。

为了将集合的一些基本概念和结果，在中学师生中进行普及，我通俗地、趣味地、深入浅出地写成了《集合趣谈》一书，阅读此书时，对这些知识不会望而生畏，减少枯燥感、神秘感，目的是力求使读者在较短时间内对集合论的一些重要概念和结论获得必要知识。本书将成为广大中学师生有益的课外读物。

在编写本书的过程中，我参考了有关书目、资料，在此一并向有关作者致以深切的谢意。

限于知识水平，本书不足和疏漏之处可能不少，诚恳希望读者批评指正。

作 者

1990年7月

目 录

一、集合是什么?.....	(1)
二、子集、空集、幂集	(4)
三、集合的运算	(10)
四、有限集与可数集	(15)
五、有穷集的元素个数	(21)
六、鸽笼里几只鸽子?	(23)
七、集合论的创立	(26)
* * * *	
八、直积集	(30)
九、关系	(33)
十、映射	(36)
十一、一一对应	(39)
十二、归纳法	(42)
* * * *	
十三、无限集的特征	(45)
十四、基数的概念	(47)
十五、基数的比较	(50)
十六、什么是大基数	(55)
* * * *	
十七、有序集	(58)
十八、序型	(61)

十九、序数 (66)

二十、基数与序数有何关系? (68)

* * * *

二十一、悖论 (71)

二十二、理发师的头谁给理 (76)

* * * *

二十三、集合论公理系统 (77)

二十四、选择公理 (80)

二十五、连续统假设 (83)

二十六、分球怪论 (85)

二十七、力迫法 (88)

* * * *

二十八、点集的几个概念 (91)

二十九、闭集和开集有哪些性质? (94)

三十、连通集、列紧集 (99)

三十一、什么是曲线? (103)

三十二、康托三分集 (106)

三十三、点集的测度 (109)

* * * *

三十四、模糊集合 (115)

主要参考书目

一、集合是什么？

集合是什么？这是我们随时随地都会碰到，而又无法定义的一个基本概念。

在集合论的研究中，一开始人们就想对集合的概念加以定义，譬如有以下说法：

若干个事物的总体，叫做集合；

把一个个东西汇集起来，成为一个整体，就是一个集合；

把一堆东西收集起来，当成一个单体来考虑，这便是一个集合；

一些具有某种性质的对象的全体、叫做一个集合；

……

等等。

我们说，上面的这些说法都不是集合的定义，因为总体、整体、单体、全体等概念的意义是含混不清的，它们本身又需要加以定义，事实上，这些概念和集合是自相定义的。

集合论的创始人，德国数学家康托（G·cantor）曾给集合下过这样的定义：

“集或集合是我们的直观或我们的思维中被看作一个整体的、确定的、相异的对象的总体”。

“对象称为集的元素，集包含它的元素，或者元素属于集”。

这个定义也不能算是对集合的完善无缺的科学定义，因为在这个定义中，所说的“直观的”、“思维的”、“整体”、“确定的”、“相异的”等等也都是含混不清的概念，始终未能清楚地说明集合究竟是什么。

集合论产生的初期，有人把集合定义为：

“所有满足某一性质的事物的全体”。

若 $P(x)$ 指满足性质 P 的一切 x ，则 $\{x \mid P(x)\}$ 就是一切 x 所构成的集合。

不久，英国数学家罗素(Russell·B)提出了一个悖论，意思说：

设 $Z = \{x \mid x \notin x\}$ ，

如果 Z 是集合，显然 Z 是一个事物，因此， $Z \in Z$ 和 $Z \notin Z$ 两者不能同时成立。

若 $Z \in Z$ ，那么 Z 应满足 $x \notin x$ ，从而推出 $Z \notin Z$ ，这就自相矛盾；

若 $Z \notin Z$ ，那么 Z 满足条件 $x \in x$ ，因此 $Z \in Z$ ，又自相矛盾。

罗素悖论实际成为对以 $\{x \mid P(x)\}$ 为集合定义的明显否定。

在对集合概念无法严格定义的情况下，人们只能用上述种种说法来描述集合的概念了。

为了运用集合这个概念，我们有以下规定：

1° 集合简称为集，组成集合的每一个对象，叫集合的一个元素，我们常用大写字母 A 、 B 、 C …表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c …表示元素。若 a 是集合 A 的元素，我们写成

$a \in A$ 或 $A \ni a$ (读 a 属于 A)

若 a 不属于 A , 写成 $a \notin A$ (或 $a \notin A$)

集合、元素、属于是集合论中最基本的概念, 其他一切概念均可由此引申出来。

2° 集合的表示方法

通常有两种方法表示集合, 一种叫列举法, 就是把所有属于集合的元素用括号括起来。例如, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。另一种叫特征法, 就是上边提到的, 用“性质”(或特征)来刻画集合。例如, 集合 $B = \{x \mid x > 3, x \in R\}$ 。

3° 构成集合的元素, 可以是具体的事物, 也可以是抽象的事物, 既有具体事物, 又有抽象事物, 也可以当成元素构成集合。例如可以把一张桌子, 一册画报, 素数 7, 孔子的教育思想作为元素构成一个集合。

4° 对一个集合说, 某个事物属于它, 不属于它是非非常明确的, 不能是含混不清、模棱两可的。例如“很大的数”就不是一个集合, 因为 100, 1000, 10000 等等, 究竟属不属于这个集合, 谁也说不清楚。

5° 包含一个元素的集合, 叫单元集。单元集 $\{a\}$ 和 a 的含义是不相同的。

例如 若 $a = \{1, 2, 3\}$, 则 $\{a\}$ 包含一个元素 a , 而 a 却是包含 1, 2, 3 三个元素的集合。

6° 应当知道, 把集合当成元素, 组成另一个新的集合是允许的。例如北京市学校的学生集合为 $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$, 则北京市学校集合为 $\{A_1, A_2, A_3 \cdots A_n\}$ 。

但是要特别注意, 以所有集合为元素的集合是不存在的。因为若 S 为以所有集合为元素的集合, 那么 S 又成为 S 的一个元素, 这就无法想象, 这样的集合是什么样子。

二、子集、空集、幂集

(一)子集

在讨论集合之间的相互关系时，子集是一个重要概念。

集合 M 的部分元素所构成的集合 N ，叫做 M 的子集， M 叫 N 的扩集。

当 N 是 M 的子集时，记为 $N \subseteq M$ ，读为：“ N 包含在 M 中”或“ M 包含 N ”。

例如：

$$\{2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$\{\{3\}\} \subseteq \{4, 5, \{3\}, 2\}.$$

$$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}.$$

$$N \subset Q, Q \subset R.$$

很明显， $M \subseteq M$ ，这意思是说，任何一个集合，必定是这个集合本身的子集。

如果 $N \subset M$ ，且 $N \neq M$ ，则 N 叫 M 的真子集。这意思是说， N 的所有元素，都是 M 的元素，但 M 至少要有一个元素不属于 N 。

由此知道，任何一个集合，都不可能是它本身的真子集。而且， N 为 M 的真子集和 M 为 N 的真子集，两者不能同时成立。

可以看到，集合的包含关系有如下性质：

1° $\subseteq$ 的自反性，即 $A \subseteq A$ 。

这由子集定义，直接得到。

2° $\subseteq$ 的反对称性，即

若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。

证明：因为 $A \subseteq B$ ，

若 $x \in A$ ，则 $x \in B$ ；

又因 $B \subseteq A$ ，即若 $x \in B$ ，则 $x \in A$ ，

两者合起来，有 $A = B$ 。

3° $\subseteq$ 的传递性，即若 $A \subseteq B$ ， $B \subseteq C$ ，

则 $A \subseteq C$ 。

证明：

若 $x \in A$ ，由于 $A \subseteq B$ ，

所以 $x \in B$ 。

又由于 $B \subseteq C$ ，从而有 $x \in C$ ，

两者合起来，有 $A \subseteq C$ 。

在区分“元素”和“子集”时，必须十分注意 $\subset$ 和 $\in$ 的运用。 $\subset$ 表示集合与集合之间的包含关系； $\in$ 表示元素和集合之间的隶属关系，

例如：

$0 \in \{0\}$ 表示 0 是集合 $\{0\}$ 的元素。

$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$ 表示 $\{3\}$ 不是 $\{\{3\}, 4, 2\}$ 的子集。

$\{1, 3\} \notin \{0, 1, 3\}$ 表示 $\{1, 3\}$ 不是 $\{0, 1, 3\}$ 的元素。

$\{3\} \in \{\{3\}, 4, 2\}$ 表示 $\{3\}$ 是集合 $\{\{3\}, 4, 2\}$ 的元素。

(二) 空集

不含任何元素的集合，叫空集。通常记为 $\emptyset$ （丹麦文，读欧）。换句话说，空集的元素个数为零。

没有任何元素为什么也能构成一个集合呢？因为有些集

合，往往我们不知道它是否有元素，出于方便，人们规定没有元素的集合叫空集。

例如任何一个大偶数可以表示成两个素数之和。这个问题的解集就是空集，因为迄今人们还未能证明这个结论是否成立。

再如 $\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\}$ 也是个空集。

空集是一个特殊的集合，它有一些性质，应用时要特别加以注意：

1° 空集 $\emptyset$ 是一切集合的子集

证明：

若 S 为任意一个集合，且 $\emptyset \neq S$ 。那么必有一个元素 x ，使

$$x \in \emptyset, \quad \text{且 } x \notin S.$$

显然这是不可能的，因为 $\emptyset$ 中没有任何元素。

从而得出， $\emptyset$ 是一切集合的子集。

因此，有

$$\emptyset \subset \emptyset, \quad \emptyset \notin \emptyset,$$

$$\emptyset \subset \{\emptyset\}, \quad \emptyset \in \{\emptyset\},$$

$$\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset\} \notin \{\emptyset\},$$

$$\emptyset \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

.....

2° 空集只有一个

因为假若有两个不同的空集 $\emptyset, \emptyset_1$ ，而 $\emptyset, \emptyset_1$ 中却没有不同元素，所以

$$\emptyset = \emptyset_1.$$

3° 空集可以定义自然数

若 $0 = \emptyset$, 则有

$$1 = \{0\} = \{\emptyset\},$$

$$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

.....

这里, 应当注意的是:

$\{ \}$, $\emptyset$, 0 都可以看成是不含任何元素的空集, 但 $\{\{ \}\}$, $\{\emptyset\}$, $\{0\}$ 却都不是空集, 它们的元素分别是 $\{ \}$, $\emptyset$, 0 .

(三) 幂集

由集合 S 的一切子集组成的集合, 叫 S 的幂集, 记为 $P(S)$ 或 US . 幂集是一个极其重要的概念, 有着广泛的应用.

一个集合究竟有多少子集? 先看个简单例子:

$A = \{1, 2, 3\}$ 的子集为:

1° 不包含元素的子集, 即 $\emptyset$.

2° 包含一个元素的子集, 即

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}.$$

3° 包含两个元素的子集, 即

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}.$$

4° 包含三个元素的子集, 即

$$\{1, 2, 3\}.$$

所以 $A = \{1, 2, 3\}$ 共有 2^3 个子集, 由这些子集作为元素, 组成的集合, 叫 A 的幂集. 即

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

现在讨论一般情况:

若集合 S 的元素个数为 $\overline{S}$, $P(S)$ 的元素个数为 $\overline{P(S)}$,

则

$$\overline{P(S)} = 2^{\overline{S}}.$$

我们用 $A(n)$ 表示这个命题, 可以看出 $A(0)$ 是成立的.

因为 $\overline{S}=0$, $2^{\overline{S}}=1$,

而 $\overline{P(S)}=1$,

$A(1)$ 也是成立的,

因为 $\overline{S}=1$, 所以 $\overline{P(S)}=2$.

假设 $A(n)$ 是成立的, 即

S 有 n 个元素, $\overline{P(S)}=2^n$,

若 S_1 有 $n+1$ 个元素时, 有 $\overline{P(S_1)}=2^{n+1}$ 就算证明了我们

的问题.

若 $a \in S_1$, $a \notin S$, 且 $S_1 = S \cup \{a\}$,

则有 $\overline{P(S_1)} = 2 \cdot \overline{P(S)}$.

所以 $\overline{P(S_1)} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

这个命题等价于:

n 个元素的集合含有 m 个元素的子集有 $\binom{n}{m}$ 个. 一切子集共有

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ 个.}$$

这里, 我们给出著名的康托定理的证明:

康托定理: 幂集的元素个数永远大于集合的元素个数.

证明:

若 S 的元素个数为 $\overline{S}$,

$P(S)$ 的元素个数为 $\overline{P(S)}$,

显然, $\overline{P(S)}$ 和 $\overline{S}$ 的大小有三种可能:

$$1^\circ \quad \overline{\overline{P(S)}} < \overline{\overline{S}},$$

$$2^\circ \quad \overline{\overline{P(S)}} = \overline{\overline{S}},$$

$$3^\circ \quad \overline{\overline{P(S)}} > \overline{\overline{S}}.$$

首先看出， 1° 是不可能成立的，因为把 S 的每个元素看成一个子集时，就能得到这个结论。

现在证明 2° 也不可能成立：

若 $\overline{\overline{P(S)}} = \overline{\overline{S}}$ ，则 S 的元素 x 和 $P(S)$ 的元素 X 必然一一对应，我们考虑 S 的一个元素 x ， $x \notin X$ ，即 x 不属于它对应的 X 。令 Y 是 S 中所有这样元素作成的子集，那么 Y 必和 S 中一个元素 y 对应，由 Y 的定义知道：

当 $y \notin Y$ 时， y 又属于 Y ，

当 $y \in Y$ 时， y 又不属于 Y ，

上述矛盾说明 $\overline{\overline{P(S)}} \neq \overline{\overline{S}}$ 。

从而得到 3° 成立的结论。

三、集合的运算

(一)集合的运算有以下几种:

1° 并集(也称和)

设 A, B 为两集, 称 $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$ 为 A 与 B 的并集, 即以 A, B 所有元素为元素组成的集合.

例 1 若

$$A = \{1, 3, \dots, 2n-1, \dots\},$$

$$B = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\},$$

$$\text{则 } A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

例 2 若

$$A = \{x \mid x \in Z, 0 < x < 3\},$$

$$B = \{x \mid x \in Z, 2 < x < 6\},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } A \cup B &= \{x \mid x \in Z, 0 < x < 3\} \cup \{x \mid x \in Z, 2 < x < 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

2° 交集(也叫通集)

若 A, B 为两集, 称 $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ 为 A 与 B 的交集, 即同时属于 A, B 的元素构成的集合.

例 1 若

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

$$\text{则 } A \cap B = \{2, 4\}.$$

例 2 求

$$\begin{cases} x-y+1>0 \\ 2x+y-2<0 \end{cases} \text{ 的解集.}$$

解：二不等式的解集分别为：

$$S_1 = \{(x, y) \mid x-y+1>0\},$$

$$S_2 = \{(x, y) \mid 2x+y-2<0\}.$$

可看出： S_1 表示 $x-y$

$+1=0$ 的右侧

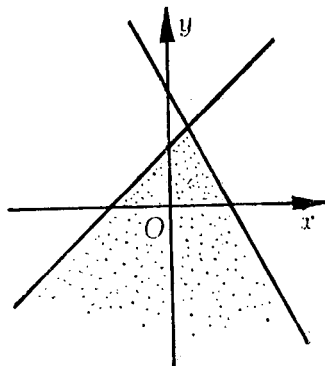
区域，

S_2 表示 $2x+y$

$-2=0$ 的左侧

区域。

则 $S = S_1 \cap S_2$ 指图的阴影部分。



3° 差集

设 A, B 是两个集合，
称

$A \setminus B = \{x; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ 为 A 与 B 的差集。换句话说，差集 $A \setminus B$ 就是所有在 A 内，而不在 B 内的元素组成的集合。

例 1 若

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\},$$

$$\text{则 } A \setminus B = \{1, 3, 5\}.$$

例 2 若

$$A = \{a, b, c\},$$

$$B = \{a, b, c, d, e\},$$