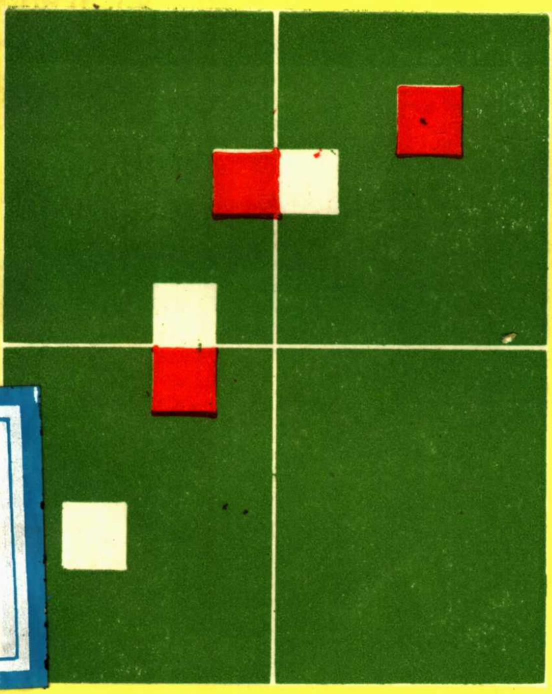
中学数学奥林匹克系列专题

递归关系60例

张宁生 田利英 编著

新华出版社



中学数学奥林匹克系列专题

递归关系60例

张宁生　田利英　编著

新　华　出　版　社

中学数学奥林匹克系列专题

递归关系60例

张宁生　田利英　编著

*

新华出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

北京燕山印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　2.5印张　47,000字

1990年12月第一版　1990年12月北京第一次印刷

印数：1—15,000册

ISBN 7—5011—0937—0/G·291　定价：1.50元

引　言

递归方法是一种探索数学规律的重要方法。由于计算机的操作采取离散的即数字和递归的方式，因此建立递归关系显得尤为重要，它显示了一个人的聪明才智。阅读此书，读者将体会到建立递归关系是饶有趣味的。

本书是作者在北京市奥林匹克数学学校高二组、北京市海淀区、西城区奥林匹克数学学校高二组等处所用讲稿的基础上，整理、扩充而成。

目　录

§1 基本概念

设数列$\{x_n\}$：x_0，x_1，$\cdots$，x_n，$\cdots$的一个关系到x_n与x_{i_1}，x_{i_2}，$\cdots$，x_{i_k}($K\leqslant n$，$0\leqslant i_1$，i_2，$\cdots i_k\leqslant n-1$）的方程称为递归关系

例1　在数列$\{x_n\}$中

(1)　$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$是递归关系

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \end{cases}\quad \text{称为初始值}$$

(2)　$x_n=x_{n-1}+9x_{n-2}-9x_{n-3}(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$是递归关系。$x_0=0$，$x_1=1$和$x_2=2$是初始值。

从计算的观点看，有时一个公式还不如一个递归关系那样有价值。

例2　$\begin{cases} x_n=4x_{n-1}-x_{n-2} \text{是给出的递归关系与初始值。} \\ x_1=3 \\ x_2=11 \end{cases}$

$$x_n=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$$

是给出的通项公式

今求$x_4=?$

显然$x_4=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^4+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^4=?$

并不好算，但是利用递推关系，则有

$$x_3=4x_2-x_1=4\times11-3=41$$

$$x_4=4x_3-x_2=4\times41-11=153$$

结果很快就得到了。

练习1 假设$x_1=97$，对$n>1$，$x_n=\frac{n}{x_{n-1}}$，计算乘积

$$x_1x_2\cdots x_8$$

（第三届美国数学邀请赛试题）

练习2 一个数列x_1，x_2，x_3，…定义为

$$x_1=\sqrt[3]{3} \qquad x_2=(\sqrt[3]{3})^{\sqrt[3]{3}}$$

$$x_n=(x_{n-1})^{\sqrt[3]{3}}\ (n>1)$$

使x_n是整数的最小的n是

(*A*) 2 (*B*) 3 (*C*) 4 (*D*) 9 (*E*) 27

（第三十六届美国中学数学竞赛试题）

练习3 循环数例$\{u_n\}$，$u_1=a$（a为任意正数），$u_{n+1}=-\frac{1}{u_n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$下列数值中能使$u_n=a$的n的值是____

(A) 14　(B) 15　(C) 16　(D) 17　(E) 18

（第四十届美国高中数学竞赛试题）

例3　斐波那契(*Fibonacci*)数

在一年开始时把一对兔子放入围场中，雌兔每月产雌雄各一的一对小兔子，第二个月开始，每对新兔子也是每月产一对小兔子，在n个月后围场中有多少对兔子？

解　对于每个$n=1,2,\cdots$令x_n表示第n个月开始(即第$n-1$个月结束)时围场中兔子的对数

$a_1=1$

$a_2=2$

$a_3=$第二个月开始时的兔子对数a_2+第一个月开始时有的兔子对数a_1(即在第二个月末生的小兔子对数a_1)$=2+1=3$

$a_4=$第三个月开始时的兔子对数a_3+第二个月开始时有的兔子对数a_2(即在第三个月末生的小兔子对数a_2)$=3+2=5$

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
大兔对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
小兔对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
总 对 数	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

a_n = 第$n-1$个月开始时的兔子对数a_{n-1} + 第$n-2$个月开始有的兔子对数a_{n-2}(即在第$n-1$个 月末生的 小兔子对数a_{n-2})

故 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

(通项公式见例12)

例4 今用1分、2分两种邮票粘贴在一长排上，求贴足n分的方法数

解 设x_n表示用两种邮票 粘贴在一长 排上贴足n分的方法数

则 x_n = 先贴一张1分再贴足$n-1$分的所有情形数x_{n-1} + 先贴一张2分再贴足$n-2$分的所 有情形数x_{n-2}

故 $x_n = x_{n-1} + x_n - 2$，其中$x_1 = 1$，$x_2 = 2$为 初始值。

(通项公式见例12)

例5 设有一楼梯共n级，如果规定每步 只 能 跨上一 级或二级，要登上最后一级，有多少种不同的走法？

解 设x_n表示登上第n级的不同走法数。

(1) ∵登上第1级只有一种走法

∴ $x_1 = 1$

(2) ∵登上第2级可以是一级一级 的上，也 可以是登二级

∴ $x_2 = 2$

(3) 当$n \geqslant 3$时，欲求x_n，可分成两类情形讨论之

1) 如果第一步登一级，则从第 2 级登到第n级有x_{n-2}种走法

故 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_n - 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

(通项公式见例12)

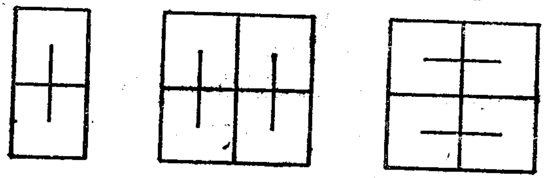
例6　$2 \times n$棋盘存在多少个完全覆盖？

解　设x_n表示$2 \times n$棋盘的完全覆盖数。

则

$x_1 = 1$　　如图1(1)

$x_2 = 2$　　如图1(2)



(1)　　　　(2)

图1

当　$n \geqslant 3$时，如图2

故　$x_n = 1 \times x_{n-1} + 1 \times x_{n-2}$

即 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

(通项公式见例12)

说明　例3、例4、例5、例6来自不同的实际问题，但反

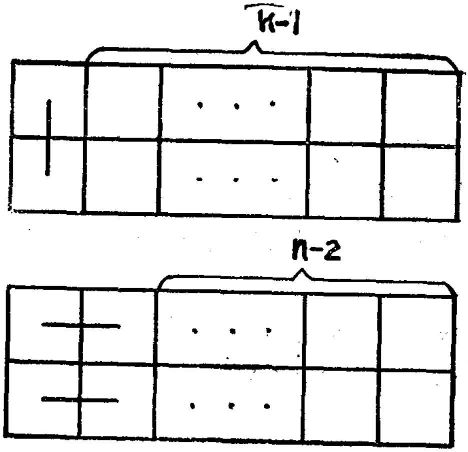


图2

映出来的本质特征——递归关系是相同的。

例7　用1、2两个数字排成n位数，要求数字1、1不相邻，问有多少种排法？

解　设x_n表示排法总数

（1）当首位数字是2时，则剩下的$n-1$位数有x_{n-1}种排法。

（2）当首位数字是1时，则第2位数字一定是2，剩下的$n-2$位数有x_{n-2}种排法

故　$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$，$x_1 = 2$，$x_2 = 3$

（通项公式见练习10）

练习4　考虑一个$1\times n$棋盘，假定我们对棋盘的每个方格用红或蓝两个颜色之一去着色，对$n=1, 2, 3, \cdots$，令x_n表示没有任何两个着红色的方格是相邻的着色的个数，求x_n所

满足的递归方程。

例8　今用1分、2分、3分、4分四种邮票粘贴在一长排上，求贴足8分的方法数？

解　设x_n表示贴足n分的方法数，则

x_n

= 先贴一张1分后再贴足$n-1$分的方法数

+ 先贴一张2分后再贴足$n-2$分的方法数

+ 先贴一张3分后再贴足$n-3$分的方法数

+ 先贴一张4分后再贴足$n-4$分的方法数

故　$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4} (n>4)$

显然　$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = 4$，$x_4 = 8$

$\therefore$　$x_5 = x_4 + x_3 + x_2 + x_1 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$

$x_6 = 15 + 8 + 4 + 2 = 29$

$x_7 = 29 + 15 + 8 + 4 = 56$

$x_8 = 56 + 29 + 15 + 8 = 108$

练习5　今用2分、3分、4分三种邮票粘贴在一长排上，求贴足10分的方法数。

练习6　假设在*Fibonacci*问题中，在开始时把2对兔子放入围场，n个月后围场中有多少对兔子？

例9　用红、白和蓝三色将$1\times n$棋盘上的方格着色，对于$n=1, 2, 3, \cdots$，令x_n表示没有两相邻方格都着红色这种着色的个数，求x_n所满足的递归关系

解　显然　$x_1 = 3$，$x_2 = 8$

当　$n\geqslant 3$时

（1）当第n格不着红色有两种方法，前$n-1$格着色有x_{n-1}种方法，共有$2x_{n-1}$种着色方法；

（2）当第n格着红色，则第$n-1$格有两种着色方法，前$n-2$格着色有x_{n-2}种方法，共有$2x_{n-2}$种着色方法。

故　$x_n=2(x_{n-1}+x_{n-2})$

（通项公式见例13）

练习7　在信道上传输仅用3个字母a，b，c且长度为n的词，规定有两个a连续出现的词不能传输，试确定这个信道容许传输的词的个数

练习8　由红、黑、白三种颜色的球排成一列，共n个球，任意两个白球不相邻，求排列方法种数x_n

例10　如图3所示

P是平面连通区域D_1，D_2，…，D_n的公共界点，用k种颜色给这n个区域染色，并且使相邻区域（有公共边界的区域）着色不同，令x_n表示不同的着色方案数，求递归关系（$n\geqslant2$）

解　（1）当$n=2$时，可对D_1着k色中任一色，有k种方法

D_2与D_1相邻，不能再着D_1中的颜色，可着另外$k-1$色之一，有$k-1$种方法，共有$k(k-1)$种

∴　$x_2=k(k-1)$

（2）当$n=3$时，$x_3=k(k-1)(k-2)$

（3）当$n\geqslant4$时，欲求x_n可分成两种情况讨论

1）当D_1与D_{n-1}异色时（相当D_1，D_{n-1}相邻），则在D_1，

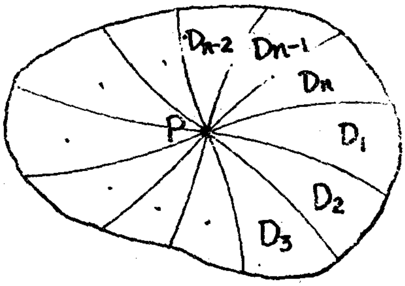


图3

D_2，…，D_{n-1}中有x_{n-1}种着色方案。

又　D_1，D_{n-1}着色既定，D_n有$k-2$种着色方案。

共有$(k-2)x_{n-1}$种方案。

2）当D_1与D_{n-1}同色时（相当D_1，D_{n-2}相邻），则在D_1，D_2，…，D_{n-2}中有x_{n-2}种着色方案。

又　D_1，D_{n-1}着色既定，D_n有$k-1$种着色方案

共有$(k-1)x_{n-2}$种着色方案

故
$$\begin{cases} x_n=(k-2)x_{n-1}+(k-1)x_{n-2} \\ x_2=k(k-1) \\ x_3=k(k-1)(k-2) \end{cases}$$

（通项公式见例18）

练习9　把一个圆分成$n(n\geqslant 2)$个扇形，每个扇形都可用红、白、蓝色之一着色，要求相邻扇形颜色不同，有多少种着色方法？

例11　设y_{2n}为$3\times 2n$棋盘的完全覆盖数，求递归关系

解　（1）当$n=1$时，如图4　知　$y_2=3$

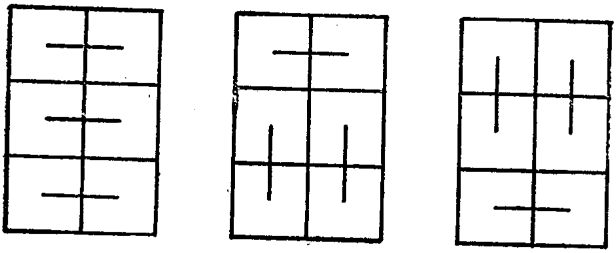


图4

（2）当$n=2$时，如图5　知　$y_4=3\times3+2=11$

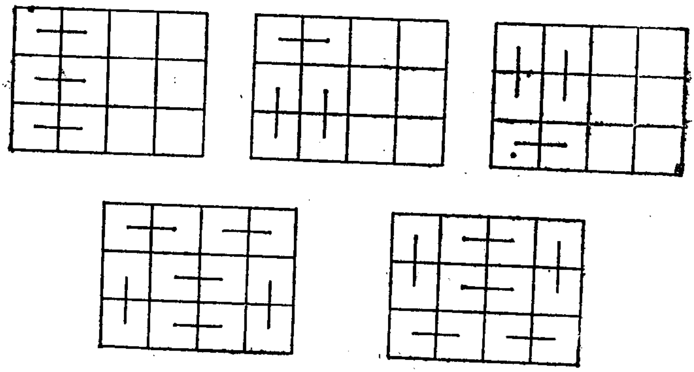


图5

即　$y_4=2y_2+2$

同理　$y_6=3y_4+2y_2+2$

$y_8=3y_6+2y_4+2y_2+2$

………

$$y_{2n}=3y_{2n-2}+2y_{2n-4}+2y_{2n-6}+\cdots+2y_2+2$$

$$y_{2n-2}=3y_{2n-4}+2y_{2n-6}+\cdots+2y_2+2$$

$\therefore \quad y_{2n}-y_{2n-2}=3y_{2n-2}-y_{2n-4}$

故 $\quad y_{2n}=4y_{2n-2}-y_{2n-4}$

（通项公式见例14）

§2 二阶齐次递归方程的解法

1 定义

若 $\quad x_n+ax_{n-1}+bx_{n-2}=0$ ①

其中a、b为常数且$b\neq0$，则称①为二阶齐次递归方程

称 $\quad x^2+ax+b=0$ ②

为①的特征方程，而②的根q_1, q_2称为特征根

2 定理

若初始条件为$\begin{cases}x_0=b_0,\\x_1=b_1\end{cases}$ 其中b_0, b_1为常数，

则

（1）当$q_1\neq q_2$时

$$x_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n \qquad ③$$

（2） 当 $q_1 = q_2 = q \neq 0$时

$$x_n = (c_1 + c_{2n})\, q^n \qquad ④$$

（3） 当 $q_1 = r^n e^{in\theta}$， $q_2 = r^n e^{-in\theta}$时

$$x_n = c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \sin n\theta \qquad ⑤$$

其中c_1、c_2是唯一确定的常数

证 （1） ③、④、⑤是①的通解

1） 当$q_1 \neq q_2$时，将③代入①得

左

$= c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + a(c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}) + b\ (c_1 q_1^{n-2}$

$+ c_2 q_2^{n-2})$

$= c_1\ (q_1^2 + a q_1 + b)\ q_1^{n-2} + c_2\ (q_2^2 + a q_2 + b)\ q_2^{n-2}$

$= 0 =$ 右

因此 $x_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$是①的通解

2） 当$q_1 = q_2 = q \neq 0$时，将④代入①得

左

$= (c_1 + c_2 n)\ q^n + a\ (c_1 + c_2\ (n-1) q^{n-1} + b(c_1 +$

$c_2(n-2)) q^{n-2}$

$= (c_1 + c_2 n)\ q^n + a\ (c_1 + c_2 n)\ q^{n-1} + b\ (c_1 + c_2 n)$

$q^{n-2} - (aq + 2b)\ c_2 q^{n-2}$

$= (c_1 + c_2 n)\ (q^n + a q^{n-2} + b q^{n-2}) - (aq + 2b) c_2 q^{n-2}$

$= (c_1 + c_2 n) \times 0 - 0 \times c_2 q^{n-2}$

$= 0 =$ 右

3） 当$q_1 = r^n e^{in\theta}$， $q_2 = r^n e^{-in\theta}$时

高 永 海