名师启迪丛书

（上册）

高中数学学习指要

——献给高中同学

孔令颐　田　佣　孙维刚　乔家瑞　李广钧　陈剑刚　明知白　著

科　学　出　版　社

名师启迪丛书

高中数学学习指要

（上册）

孔令颐 王俑 孙维刚 张家瑞 李广约 陈剑刚 胡耘白 著

科学出版社

1991

内 容 简 介

数学是培养学生思维能力的学科，本书的作者们在这一领域里创造了出色的成绩，如本书作者之一孙维刚老师开创的“数学结构教育法”。其他作者也各有“绝招”．他们根据丰富的教学实践经验，按教学大纲规定的知识范围，从中等水平学生的实际出发，兼顾较差生和优等生的情况，引导学生深入理解所学的知识，提高解题能力．本书不采用“题海战术”的做法，而是精选目的明确而典型的例题，加以详细的分析说明，重点启发学生系统掌握基本知识，帮助总结解题规律，力求使学习能收到事半功倍之效，各章分“知识结构”、“学习指导”和“水平测试”三部分．叙述精辟，深入浅出，书中配有相应练习题及一定量的标准化练习题及综合测试题，可供自我测试和检验学习的水平和效果．

本书可供各类高中学生参考，也适于青年教师及自学者阅读．

名师启迪丛书

高中数学学习指要

（上 册）

——献给高中同学

孔令颐 田 佣 孙维刚 乔家瑞 李广钧 陈剑刚 明知白 著

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年6月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1991年5月第三次印刷 印张：12 1/2

印数：46 501—71 500 字数：280 000

ISBN 7-03-001136-8/G·57

定价：4.50 元

作者简介

孔令颐，男，1932年生，浙江桐乡人，1956年毕业于四川大学数学系。北京市特级教师。现任清华大学附属中学数学教研组长，高级教师。曾撰写《高中数学综合解题方法》、《平面解析几何》等著作和“线性齐次递进数列特征根法的一个初等证明”、“能力培养与第二课堂”等论文。曾参加国家教委组织的中小学教学指导和试验教材的编写工作。

田佣，男，1940年生，1963年毕业于北京师范大学数学系。毕业后一直从事中学数学教学工作，现在北京四中担任教学处主任工作，高级教师。

孙维刚，男，1938年生。北京教育学院数学系本科毕业，现在北京22中任教，北京市特级教师，兼任中国数学会高级教练。北京市东城区奥林匹克数学学校校长，东城区理科学会理事。在教学中实验“结构教学法”使学生得到超常发展，效果明显，曾参加《中学数学奥林匹克丛书》的编写，发表过多篇教学论文。

乔家瑞，男，1937年生，1961年毕业于北京师范学院数学系。现在北京教育学院崇文分院任教，高级教师，北京数学会辅导组成员，北京数学奥林匹克学校教练，并兼任一些地区和学校的教学顾问及教师进修辅导员。多年从事中学数学教学工作及数学教师进修教学工作，并长期从事中学数学教学的理论研究。曾参加编写《怎样辅导孩子学数学》、《中学生应该怎样学习》、《平面解析几何教案》、《数学基础知识与问题分析》等20余部著作，并发表短篇文章数十篇。

李广钧，男，1933年生，1954年毕业于东北师范大学后，直接到北京师大附中任教。30多年来，在数学教学方面，一直从学生实际出发，因势利导，发挥学生特长；在教学中重视启发和提高学生的思维能力。现任北京师大附中副校长，高级教师，兼任数学教学信息研究会理事，北京市高考委员会委员、《帮你学》出版委员会委员。曾主编《数学高考复习指导》、《高中数学学习指导》青年自学丛书等，并参加编著《中学实用教育学》等。

陈剑刚，男，1936年生，江苏海门人，1958年毕业于复旦大学数学系。北京市特级教师，现任北京大学附属中学数学高级教师，曾在《数学通报》上发表过“数学教学中培养学生的思维品质”和“改革教学方法、培养学生能力”等论文。

明知白，男，1938年生。1963年毕业于北京大学数学系。在北京女二中任教近20年。现任北京市东城区教学研究科研中心数学教研员，高级教师，兼东城区理科学会数学分会秘书长，《中学生数学》杂志编委。

先后在《数学通报》、《中等数学》、《数学教师》、《中学生数学》、《中国教育报》等报刊杂志上发表文章100多篇，并编写（或合编）了《高中数学教学八十讲》、《高中数学精要》、《高中代数学习辅导》、《初中数学学习导引》、《初中常用数学方法》、《高中数学试验课本》、《初中数学试验课本》等十几部著作。

序

“师者，所以传道受业解惑也。”韩愈的这句话几乎成了千百年来教师们的座右铭。然而我们民族的后代不但应该掌握“道”与“业”，而且应该善于自己解“惑”，更富有创造性，换句话说，教师应该让自己的学生变得更聪明。目前我们的基础教育在这方面却不能适应未来的需要：过于偏重“业”的灌输了。试看年年层出不穷、屡禁不止、充斥于学校和家庭、压得学生喘不过气来的“难题详解”、“辅导材料”，就可以感到问题的严重了。

名师则不然。他们不但精熟自己执教的学科，更为重要的是，他们善于处理和驾驭学科的内容，激发学生的求知欲、探索欲，启发学生发挥自己的智慧潜能，引导学生综合运用已有的知识和技能去攀登科学的下一个阶梯，不断闯入新的领域，进入新的境界。把首都一些名师的半生心血结晶加以汇集，让更多的学生受惠，从填鸭式教学的苦难中挣脱出来，成为聪明的、善于思索的一代，这就是这套《名师启迪丛书》的编著目的。

名师者，著名之教师也。如今是名人蜂起的时代：名演员、名画家、名厨师、名企业家、名演说家……每天都要出现一大批，只是“名教师”却不大被提及。这是当前教师，特别是中小幼教师的社会地位所决定的，但也跟他们的接触范围较窄、宣传报道不够有关，诚所谓“登高而招，臂非加长也，而见者远”，盖势使之然。既然我们的优秀教师无愧于“名师”之号，我们就应该恭恭敬敬地这样称呼他们。借着

这套丛书的出版，为我们向名师们做点树碑立传的工作，让更多的人知道他们、学习他们，以便今后不断涌现更多的名师，这是编辑这套丛书的一个附带目的。

这套丛书一律以最新教材为依托，即：结合教材的难点和重点培养学生的基本功，训练学生科学的思路，而不是靠补充大量材料取胜。这是为了不无谓地增加学生负担，引导他们重视课内的学习，并在系统的学习中提高；同时，也是为了便于更多的教师甚至家长参考，从中受到启发。

现代科学证明，人的智力的成长从胎儿时期就开始了；幼儿“记事儿”前后思维和语言能力的培养、生活习惯和情趣的形成对人的一生都有着重要的影响。这跟我国古代重视“胎教”和所谓“三岁看大，七岁看老”的谚语不谋而合（但并非否定后天的教育）。为此，我们特请著名的幼教专家撰稿，介绍如何培养教育从0岁到6岁的儿童。与丛书中其它部分不同的是，关于幼儿教育的这六册是要给年轻的爸爸妈妈们以启迪，因为他（她）们是孩子的第一个、也是终其一生的老师。

愿这套丛书能成为中华教育大厦中的一块砖、一代代人才成长之路上的一个石阶，愿它伴着更多的后来者走过人生的关键阶段。

最后，应该感谢科学出版社。一个一向以出版高层次科学著作蜚声海内外的出版社对于提高中小学生的科学文化素质如此关注，社领导、编辑、工人们付出大量的劳动，让这套丛书得以在短时间内出版，这是值得全社会钦佩和尊敬的。

1989年

目 录

第一章 简易逻辑和一些证明方法

演绎推理是中学数学中主要的证明方法。本章将介绍一些简单逻辑知识，以及高中数学中常用的反证法和数学归纳法。

一、有关命题的知识

命题是数学中最基本的概念。发现并证明某个命题的真或假是数学中的重要问题。

1． 命题和它的真假

（1）命题

所谓命题是指判断一件事情的语句。

例如：对于事物A，作出B的判断。

我们把A称作命题的题设或前提，把B称做结论。上面的命题可记作$A \Longrightarrow B$。

于是，我们也可以认为，命题是指出两个事物有是或不是的关系。

我们还可以从集合的角度来理解命题的意义：认为事物A、B分别代表着两个集合，这时，$A \Longrightarrow B$表示，任意A的元素一定是B的元素。而$A \Longrightarrow \overline{B}$则表示，任意$A$的元素一定是$B$的补集的元素。

（2）真命题、假命题

成立或者说正确的命题称真命题，例如：对顶角相等；反之，则称为假命题，例如：对顶角不相等。

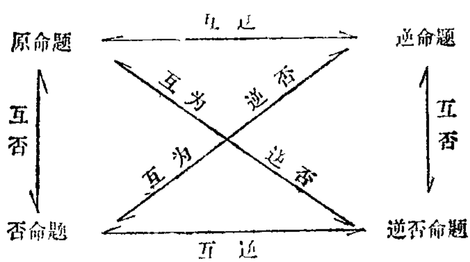
前面指出，$A\Longrightarrow B$表示，任意A的元素一定是B的元素。所以，如果在题设A的条件下，有时得到B的结论，有时得不到B的结论的命题，这时，$A\Longrightarrow B$也是假命题，例如说："对顶角互补"，虽然对顶角有时互补，但对顶角互补仍是假命题。

2. 四种命题和等价关系

（1）四种命题

当把$A\Longrightarrow B$称为原命题时，称$B\Longrightarrow A$为逆命题，称$\overline{A}\Longrightarrow\overline{B}$（不是$A$则不是$B$）为否命题，称$\overline{B}\Longrightarrow\overline{A}$为逆否命题。

"原""逆""否""逆否"只具有相对的意义。



否命题在形式上不一定有"不"字。因为$\overline{\overline{A}}=A$，如"不是有理数"的否定，为"是有理数"。

（2）命题的等价

两个命题能够同时成立，称它们是等价的。即命题甲成立时，命题乙也成立；而且，命题乙成立时，命题甲也成立。

（3）四种命题间的等价关系

一个命题和它的逆否命题等价，一个命题的逆命题和它原命题的否命题等价。

因而，一个命题和它的逆命题、否命题、逆否命题，只可能同真，或者同假，或者两真两假。

例1 求证 一个命题和它的逆否命题等价。

证 （用反证法）（1）用$A \Longrightarrow B$表示原命题成立。

若$\overline{B} \not\Longrightarrow \overline{A}$，则$\overline{B} \Longrightarrow A$，而已知$A \Longrightarrow B$，这样，$\overline{B} \Longrightarrow B$，矛盾。

故只能$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$。

（2）因为原命题是它的逆否命题的逆否命题，由(1)的结论可得，当一个命题的逆否命题成立时，原命题也必成立。

综合（1）、（2），原命题和它的逆否命题等价.即，它们同真或同假。

说明 对于原命题成立$A \Longrightarrow B$，可以理解为，若任意$x \in A$，必有$x \in B$，这时，A、B的关系如图1—1所示。

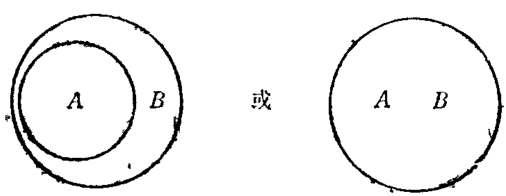


图1-1

显然，这时任意$x \notin B$，必有$x \notin A$，即$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$，逆否命题真。

与这个解释类似，若$\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$则$A \Longrightarrow B$。

例2 求证 一个命题的逆命题和它原命题的否命题等价。

证 因为一个命题的逆命题和它原命题的否命题有互为逆否的关系。那么，利用例 1 的结论，本例结论得证。

说明 证明一个任意命题和它的逆命题并不等价，只要举出一个反例即可，又由于逆命题和它原命题的否命题等价，所以，一个任意命题和它的否命题也不是等价的。

原命题真时，它的逆命题可能“真”，也可能“假”。这个关系可以描述如下。

当$A \Longrightarrow B$时，可以存在如下关系：

对于图 1－2 的情况，任意$x \in B$，必有$x \in A$，即$B \Longrightarrow A$（指$B \Longrightarrow A$成立）；但也可以存在如下关系。

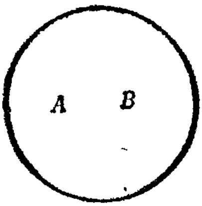


图1-2

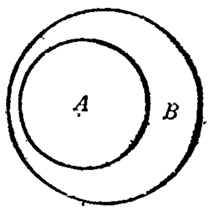


图1-3

对于图 1－3 的情况，若 $x \in B$，不一定$x \in A$，即$B \Longrightarrow A$为假命题。

例如：原命题“两直线平行，则同位角相等”是真命题，它的逆命题也真。这是因为，“两条平行直线”和“同位角相等时的两条直线”所刻画的是相等的集合，如图1-2所示。

而原命题“对顶角相等”是真命题，但它的逆命题却是假命题。这是因为，“是对顶角的两个角”的集合，只是“有相等关系的两个角”的真子集（一部分）。

3. 复合命题和它的否定

（1）用“或”字连接的复合命题

把一些基本命题用“或”字连接为一个命题，称为用“或”字连接的命题，例如，

命题A：10能被5整除；

命题B：10能被2整除；

那么，命题C：10能被5或2整除．就称为用“或”字连接的复合命题。

显然，当组成复合命题的各基本命题都成立或至少有一个成立时，用“或”字连接的复合命题就成立。

事实上，可以把用“或”字连接的复合命题看做是各基本命题的并集。

因此，“存在某个x如何如何”、“至少有一个x如何如何”等说法的意义是相同的，都是用“或”字连接的复合命题。

（2）用“且”字连接的复合命题

把一些基本命题用“且”字连接为一个命题，称为用“且”字连接的复合命题．“且”字有时也写作“和”、“与”。

例如，“10能被2和5整除”“矩形各内角都是直角”等命题，都是用“且”字连接的复合命题。

显然，当且仅当组成复合命题的各基本命题都正确时，用“且”字连接的复合命题才成立。

事实上，可以把用“且”字连接的复合命题看做是各基本命题的交集。

因此，“全体x都如何如何”、“任意x如何如何”、“无

论哪一个x都如何如何”等说法的意义是相同的，都是用“且”字连接的复合命题。

例3　判断正误：a代表实数，那么，

若$|a|=-a$，则$a\leqslant 8$。　　　　（　）

分析　很多人判它为“×”，理由是，$a=8$时，$|a|=8\neq -a$。这是犯了以为一个命题和它的逆命题等价的错误，要求一个真命题的逆命题也必须真。

判断一个命题的真假，只能从它的本身（或它的逆否命题）来分析：

若$|a|=-a$，则$a\leqslant 0$，而$a\leqslant 0$必有$a<8$。所以本命题为真。

有人又反驳说：“可是原结论中有$a=8$呀！”而$|a|=-a$时，a不会是8。

这是对于$a\leqslant 8$的错误理解，$a\leqslant 8$是$a<8$或$a=8$。根据前述，用“或”字连接的复合命题的各基本命题只要有一个成立，复合命题即真，那么，$a<8$时，当然$a\leqslant 8$。

（3）复合命题的否定

把一个命题的结论改为它的补集，称做对原命题的否定，又称命题的“非”。

对复合命题进行否定时，若原命题是用“或”字连接的复合命题，应把每个基本命题否定后再用“且”字连接；若原命题是用“且”字连接的复合命题，应把每个基本命题否定后，再用“或”字连接。

这是集合论的狄莫根公式（有的书译做德·摩根律或摩尔根法则）：

前者是$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$；

后者是$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$。

由于一个命题的题设部分、结论部分可以分别看作是一