中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

复变函数

潘永亮　汪琥庭
汪芳庭　宋立功　编

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学数学教学丛书

复变函数

潘永亮　汪琥庭　
汪芳庭　宋立功　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是编者在中国科学技术大学多年的教学实践中编写而成的，其内容主要包括：复数，平面点集的初等知识，复变函数的概念与解析性，初等解析函数，解析函数的积分表示，解析函数的级数展开，留数及其应用，解析开拓，调和函数，保形变换及其应用，拉氏变换及其应用等. 各章配备了较多的例题、思考题、习题，书末附有习题答案或提示.

本书理论性较强，结构上注意了其系统性和完整性，编写上很注意便于读者自学.

读者对象：高等院校理工科非数学各专业本科生.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/潘永亮等 编.— 北京：科学出版社，2004
（中国科学技术大学数学教学丛书）
ISBN 7-03-013300-5

Ⅰ. 复… Ⅱ. 潘… Ⅲ. 复变函数－高等学校－教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 055099 号

责任编辑：杨 波/责任校对：鲁 素
责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 7 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2004 年 7 月第一次印刷 印张：14 1/4
印数：1—3 000 字数：269 000

定价：19.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

前　言

复变函数论以解析函数为主要研究对象, 不仅理论优美, 而且在数学与物理的各个分支中都有广泛应用. 复变函数作为理工科大学生一门重要的数学基础课, 是大学微积分的自然延伸, 对于大学生培养良好的数学素养有着难以替代的作用.

21 世纪之初, 中国科学技术大学学制由五年改为四年. 理学院为此召开教学研讨会, 专门研究了非数学系数学基础课教材建设的问题, 提出了编写新教材的任务. 我们受数学系领导的委托负责编写《复变函数》. 在认真听取了各方面的意见后, 我们明确了复变函数新教材的编写思想. 随后两年, 在教学实践以及反复研讨的过程中完成了本书的编写工作.

我们编写本书的主要指导思想是: 少而精, 分层次, 尽可能地突出课程的核心内容. 这些内容是: 解析函数的微分理论 (Cauchy-Riemann 方程), 积分理论 (Cauchy 积分定理与积分公式), Weierstrass 的级数理论 (Taylor 级数与 Laurent 级数) 及 Riemann 的几何理论 (共形映射初步). 这些内容以主要定理的形式形成了该课程的一条主线. 关于理论的应用, 则突出了留数与 Laplace 变换这两部分. 此外, 其他相关内容作为阅读材料 (带 * 号的内容, 思考题, 带 * 号的习题, 附注等) 供师生在教学过程中选教选读.

长期以来, 中国科学技术大学理科非数学各专业使用的是严镇军教授编著的《复变函数》一书. 这次编写, 我们认真听取了严先生的宝贵意见. 本书在严先生编写的《复变函数》一书的基础上编成, 力求保持严先生一书内容丰富、说理严谨、系统性强等特点.

为了便于自学, 本书对习题与思考题给出了提示或解答. 编者建议, 读者在思考及动手解题的过程中, 不要轻易去参看这些提示或解答, 以免干扰了读者自己的原创思维.

本书不妥与不足之处, 敬请识者指正、指教.

最后, 对关心本教材编写并从各方面给予我们大力支持的程艺、叶向东、章璞等校院系领导及教务处领导表示感谢.

编者

2004. 3

目　录

第 1 章　复数域 1

1.1　什么是复数 1

1.1.1　复数域的概念 1

1.1.2　复数的几何表示 4

1.1.3　复数的乘方与开方 7

习题 1.1 9

1.2　复数列 9

1.2.1　复数列的极限 9

1.2.2　无穷远点与复数的球面表示 11

1.3　平面曲线与区域 12

1.3.1　平面点集 12

1.3.2　有界闭集 14

习题 1.3 16

第 2 章　解析函数 18

2.1　复函数的极限 18

2.1.1　复函数 18

2.1.2　极限与连续 20

习题 2.1 23

2.2　导数与解析函数 23

习题 2.2 26

2.3　Cauchy-Riemann 方程 26

习题 2.3 30

2.4　指数函数与三角、双曲函数 31

习题 2.4 34

2.5　常见多值函数 35

2.5.1　辐角函数 35

2.5.2　对数函数 36

2.5.3　根式函数 37

2.5.4 其他初等函数 40
习题 2.5 42
第 3 章 复积分 43
3.1 复积分的概念 43
习题 3.1 48
3.2 基本定理 49
3.2.1 Cauchy 积分定理 49
3.2.2 原函数 51
习题 3.2 54
3.3 Cauchy 积分公式 54
3.3.1 Cauchy 积分公式的导出 54
3.3.2 解析函数的无穷可微性 57
3.3.3 最大模原理 61
习题 3.3 63
3.4 调和函数 64
习题 3.4 70
第 4 章 解析函数的级数展式 71
4.1 Weierstrass 定理 71
习题 4.1 76
4.2 幂级数 77
习题 4.2 81
4.3 Taylor 级数 82
习题 4.3 84
4.4 唯一性定理 85
习题 4.4 86
4.5 解析开拓 87
习题 4.5 89
4.6 Laurent 级数 89
4.6.1 Laurent 展式 90
4.6.2 孤立奇点 93
4.6.3 整函数与亚纯函数 97
习题 4.6 98
4.7 Γ 函数* 99

第 5 章　留数 104
5.1　留数定理 104
习题 5.1 108
5.2　积分计算 109
5.2.1　用留数计算实积分 111
5.2.2　多值函数的积分 * 118
5.2.3　杂例 * 120
习题 5.2 124
5.3　辐角原理 125
习题 5.3 133
第 6 章　共形映射 134
6.1　共形映射的概念和若干基本性质 134
6.1.1　共形映射的概念 134
6.1.2　共形映射的若干性质 136
习题 6.1 138
6.2　分式线性变换 138
习题 6.2 147
6.3　初等函数构成的共形映射 147
6.3.1　指数函数与对数函数 147
6.3.2　幂函数 149
6.3.3　儒可夫斯基映射 150
6.3.4　共形映射的几个综合例题 151
习题 6.3 156
6.4　Schwarz-christoffel 映射 * 156
6.5　解析函数在平面向量场中的应用* 165
第 7 章　Laplace 变换 176
7.1　Laplace 变换的定义 176
7.2　拉氏变换的基本性质 178
7.2.1　线性关系 178
7.2.2　相似定理 179
7.2.3　本函数的微分法 179
7.2.4　本函数的积分法 182
7.2.5　像函数的微分法 183

7.2.6 像函数的积分法 184
7.2.7 关于 t 的位移性质 —— 延迟性 185
7.2.8 关于 p 的位移性质 187
7.2.9 周期函数的像函数 187
7.2.10 卷积定理 188
7.3 由像函数求本函数 190
7.3.1 部分分式法 190
7.3.2 拉氏变换的反演公式 192
7.3.3 其他方法 * 194
习题 7.3 195
附录 三次方程的 Cardano 公式 198
附表 1 基本法则表 200
附表 2 Laplace 变换表 201
习题与思考题提示或解答 205

第 1 章　复　数　域

谈起数, 人类最先认识的是自然数. 后来, 人们在实践中除了做加法和乘法, 还需做减法和除法. 为了顺利做减法, 需要有负数的概念; 为了顺利做除法, 需要有分数的概念. 这样, 人们经过长时间的努力建立了有理数域, 在其中, 四则运算可以顺利进行 (用零除除外). 但有理数在数学及其应用中并不够用, 因为有理数域对极限运算是不封闭的. 为了更精确地研究运动和变化, 人们建立了包括无理数在内的完备的实数域.

对数学发展起了重要作用的一件大事是在数学中引进了复数. 引进复数, 人们最初是被迫的: 谁敢于对负数开方, 谁才能成功地求解各种类型的三次方程 (参见书末附录). 随着分析数学的深入发展, 当人们把眼光从实函数移向复函数, 便发现了一个新的更大的空间; 站在这个空间, 人们不仅发现了原来在实函数空间中未曾见过的新现象和新结果, 还找到了研究实函数的新视角和新方法, 从而有利于把实函数研究得更清楚.

1.1　什么是复数

1.1.1　复数域的概念

把实数域记作 $\mathbf{R}$. 我们已经熟悉实数及其运算的性质. 现在, 我们把实数的有序对的全体记作 $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbf{R}\}.$$

我们知道, 有序对具有这样的性质:

$$(a,b)=(c,d)\quad\Leftrightarrow\quad a=c,\ b=d.$$

在 $\mathbf{C}$ 中定义加法运算如下:

$$(a,b)+(c,d)\ =\ (a+c,b+d)\quad (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}).$$

为什么要用这种方式而不是别的方式来定义加法? 理由是: 从向量代数知道, 实数的 “有序对” 对应于向量; 上面规定的加法, 正符合向量加法的平行四边形法则, 而这个法则正是一些物理量 (如速度、加速度、力等) 的合成法则.

在 $\mathbf{C}$ 中还可如下定义乘法:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \quad (a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}).$$

容易验证, $\mathbf{C}$ 中如上定义的加法与乘法具有以下性质:

1. 交换律

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b);$$

2. 结合律

$$((a,b)+(c,d))+(s,t)=(a,b)+((c,d)+(s,t)),$$

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(s,t)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(s,t));$$

3. 分配律

$$(a,b)\cdot((c,d)+(s,t))=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(s,t);$$

4. 单位元的性质

$$(x,y)+(0,0)=(x,y),$$

$$(x,y)\cdot(1,0)=(x,y);$$

5. 加法与乘法逆元

$$(x,y)+(-x,-y)=(0,0),$$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=(1,0).$$

以上性质来源于实数的性质. 连同具有以上性质的运算, $\mathbf{C}$ 叫做复数域. $\mathbf{C}$ 的元素叫做复数.

复数域 $\mathbf{C}$ 有个重要子集 $\overline{\mathbf{R}}=\{(x,0)|x\in\mathbf{R}\}$, 它对加法与乘法是封闭的:

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0),$$

$$(x,0)\cdot(y,0)=(x\cdot y,0).$$

令 $f(x)=(x,0), x\in\mathbf{R}$, 则所得映射 $f{:}\mathbf{R}\longrightarrow\overline{\mathbf{R}}$ 使运算保持:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

往后, 我们把 x 与 $(x,0)$ 等同, 叫做 (新) 实数, 例如, 用 0 代替 $(0,0)$, 用 1 代替 $(1,0)$. 于是 $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

引进符号 $i = (0,1)$, 于是有

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

不难验证对任何 $y \in \mathbf{R}$, 总有

$$(0,y) = (0,1) \cdot (y,0) = i \cdot (y,0) = iy.$$

i 叫做虚单位, yi 叫做纯虚数.

对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 总有

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x + yi.$$

这样, 任何复数都可表示成 $x + yi$ 的形式, 其中 x 与 y 分别叫做该复数的实部与虚部, 记做

$$\mathrm{Re}(x+yi) = x,$$

$$\mathrm{Im}(x+yi) = y.$$

以上我们完成了复数系的构造过程: 用"实数对"来定义复数, 由实数的性质推演出复数的性质, 从而将实数域扩张成复数域; 关于通常的四则运算, 复数与实数有相同的性质. 这使我们有理由相信, 我们对复数域认识得越深刻, 便对实数域也认识得越深刻. 不仅如此, 我们还认识到, 复数之间任何确定的关系实际上都是实数之间内在关系的体现, 并不神秘. 进而我们看到, 虚数、复数这种数学对象并不是没有内容的纯形式的数学对象, 只不过人们在历史上一段时期内不清楚其中的内容罢了.

思考题 1 是否对任意复数 z_1, z_2 总有

$$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0 \Longrightarrow z_1 z_2 \neq 0?$$

思考题 2 能否在复数域 $\mathbf{C}$ 中用另外的方式定义乘法, 也具有通常的运算性质, 且满足:

(1) $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$,

(2) $(x,0) \cdot (y,0) = (xy,0)$,

(3) $(x,0) \cdot (0,1) = (0,x)$?

1.1.2　复数的几何表示

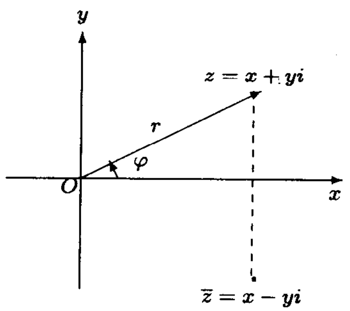

图 1.1

在平面上建立直角坐标系 Oxy 之后, 复数便与平面上的点 (或向量) 建立起一一对应 (图 1.1). 这样, 复数域被几何化为一个平面 —— 复平面. 复数与它对应的点或向量可以看作等同, 不加区别.

坐标系的 x 轴称为实轴, 其上的点与实数对应; y 轴称为虚轴, 其上的点 (原点除外) 与纯虚数对应. 点 z 到原点的距离 r 叫做 z 的模, 用 $|z|$ 表示

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

采用极坐标, 复数便有三角表示

$$z = r(\cos\varphi + r\sin\varphi),$$

其中 φ 叫做 z 的辐角, 记作 $\mathrm{Arg}\, z$. 当 $z = 0$ 时, 辐角没有意义; 当 $z \neq 0$ 时, $\mathrm{Arg}\, z$ 有无穷多个值. 例如,

$$\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

辐角的多值性是后面将要遇到的许多复函数具有多值性的根源. 我们把辐角在 $-\pi < \varphi \leq \pi$ 内的值称为辐角的主值, 记作 $\arg z$. 主值 $\arg z$ 由 z 唯一确定, 例如, $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$. 一般有

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y > 0, \\ -\pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

本书中有时我们也用符号 $\arg z$ 表示 z 的辐角的某一确定的值, 而不一定是主值, 这需要根据上下文来正确区分.

设 $z = x + yi$. $x - yi$ 叫做 z 的共轭复数, 记为 $\bar{z}$. z 与 $\bar{z}$ 二点关于实轴对称. 容易验证以下事实 (注意每个事实的几何意义):

1° $\bar{\bar{z}} = z$;

2° $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z, \quad z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}z$;

3° $z\bar{z} = |z|^2, \quad |\bar{z}| = |z|$;

4° $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

5° $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

6° $|\mathrm{Re}z| \le |z|$, $|\mathrm{Im}z| \le |z|$;

7° $|z| \le |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|$;

8° $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

9° $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$;

10° $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$;

11° $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$.

性质 8° 中不等式的几何意义是: 三角形两边之和大于第三边. 性质 8° 的证明如下.

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} && (\text{用性质 } 3^\circ)\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) && (\text{用性质 } 2^\circ \text{ 等})\\
&\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| && (\text{用性质 } 6^\circ)\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\\
&= (|z_1| + |z_2|)^2.
\end{aligned}$$

利用数学归纳法可将性质 8° 推广为

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

性质 9° 中不等式的几何意义是: 三角形两边之差小于第三边. 性质 9° 的证明可利用性质 8°.

关于性质 10°, 为证明 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, 可以用 z_1, z_2 的实部与虚部来进行, 但下面的方法更简单 (利用性质 3°):

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2.$$

性质 10° 的第二式两边各有无穷个数. 该式应理解为两个数集相等, 即对 $\mathrm{Arg}(z_1 z_2)$ 的任一值都有 $\mathrm{Arg}\, z_1$ 与 $\mathrm{Arg}\, z_2$ 的适当的值使等式成立.

性质 10° 给出了复数乘法的几何意义: $z_1 z_2$ 是由 z_1 逆时针转动角度 $\arg z_2$, 并使其模长变为 $|z_1|$ 的 $|z_2|$ 倍而得到. 特殊情况, 如果 z_2 是单位向量, 那么把向量 z_1 反时针转过角度 $\arg z_2$ 便得到 $z_1 z_2$. 例如, iz 就是由向量 z 反时针转动 90° 得到的向量.

对性质 11° 的理解与性质 10° 类似. 复数 $\dfrac{z_2}{z_2}$ 是由 z_1 顺时针转动角度 $\arg z_2$, 并使其模长变为 $|z_1|$ 的 $\dfrac{1}{|z_2|}$ 倍而得到. 按 11° 第二式, 向量 z_1 与 z_2 之间的夹角可用

$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ 来表示.

关于性质 10° 的第二式的证明, 可采用复数的三角式. 设

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

则有

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \end{aligned}$$

于是 $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

借用 Euler 公式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$(关于该公式详见第 2 章, 这里暂作为规定), 可以把复数 z 写成指数形式

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

例如 $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $-2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$, 等等. 此时复数的乘法可表示得更简单, 具体形式为

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

更一般, 我们有

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)}.$$

例 1.1.1 讨论运算 $w = 1/z$ 的几何意义.

倒数运算可分解为

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}, \qquad w = \overline{z'}.$$

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 那么

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

这表明 θ 也是 z' 的一个辐角, z' 和 z 的模的乘积为 1. 因此, 若 $|z|<1$, 过点 z 作射线 Oz 的垂线交单位圆周于 T, 过 T 作单位圆周的切线, 易见, 该切线与 Oz 的交点就是 z' (图 1.2). 若 $|z|>1$, 情形是类似的, 只需先作切线再作垂线. 这时我们称 z 和 z' 是关于单位圆周 $|z|=1$ 的对称点. 它们分别在单位圆周的内部和外部. 当 z 在单位圆周上时, 那么它的对称点就是它自身 (当 $|z|=1$ 时, $z'=z$, 两点重合). 从 z 到 z' 的变换称为关于单位圆周的对称变换. 至于 $w=\overline{z'}$, 显然关于实轴与 z' 对称. 因此 $w=1/z$ 是关于单位圆周的对称映射与关于实轴对称映射的复合.

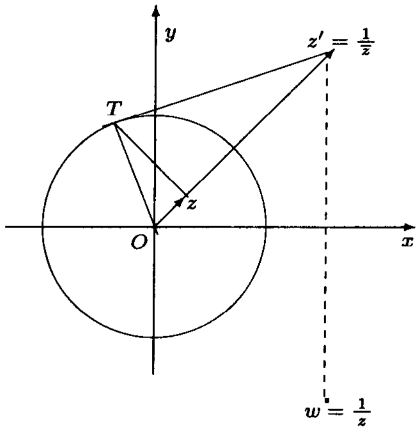

图 1.2

例 1.1.2 证明 $n \geq 2$ 时,

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \geq |z_1| - |z_2| - \cdots - |z_n|.$$

证 首先注意 $|z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_2| + \cdots + |z_n|$, 于是

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \geq |z_1| - |z_2 + \cdots + z_n| \geq z_1 - |z_2| - \cdots - |z_n|.$$

思考题 1 $\dfrac{z}{1+z^2}$何时是实数?

思考题 2 设 $0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$. 判断方程

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

在单位圆内 ($|z| < 1$) 是否有根.

1.1.3 复数的乘方与开方

设 $z = re^{i\varphi} \neq 0$, n 是自然数, 则有

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

特别当上式中 z 是单位向量 (即 $r = 1$) 时, $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, 即

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

这个公式就是有名的 De Moivre 公式. 当 n 为负整数时, 上式也成立:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n} &= \frac{1}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n}\\ &= \frac{1}{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}\\ &= \cos n\varphi-i\sin n\varphi\\ &= \cos(-n)\varphi+i\sin(-n)\varphi.\end{aligned}$$

设 z 是已知复数, n 是正整数. 对 z 开 n 次方的运算, 是指求满足方程 $w^n=z$ 的所有 w. 我们把该方程的解记作 $w=\sqrt[n]{z}$. 当 $z=0$ 时, $w=0$. 当 $z\neq 0$ 时, 设 $z=re^{i\varphi}$(给定的数), $w=\rho e^{i\theta}$ (未知数), 代入方程并利用 De Moivre 公式便得

$$\rho^n e^{in\theta}=re^{i\varphi}.$$

比较两端得

$$\rho^n=r,\quad n\theta=\varphi+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

于是可确定

$$\rho=\sqrt[n]{r}\ ,\quad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

即

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

这个公式里 k 虽然可以取任意整数, 但得出的复数只有 n 个是互不相同的, 即相当于 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 的情形:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right),\\ w_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),\\ &\cdots\cdots\\ w_{n-1} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

这 n 个 n 次根的模都是 $\sqrt[n]{r}$, 因此它们位于以原点为中心、以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆上. 由于相邻二根的辐角相差都是 $\dfrac{2\pi}{n}$, 所以这 n 个点刚好把圆周分成 n 等分, 它们是内接于圆的正 n 边形的顶点.

加、减、乘、除、开方及乘方这 6 种运算合称为代数运算. 从以上的讨论可见, 复数域对于代数运算具有封闭性, 这是复数域与实数域的一个重要区别.

例 1.1.3 求 $\sqrt[3]{-8}$ 的全部值.

解 把 -8 表成三角形式

$$-8=2^3(\cos\pi+i\sin\pi),$$

则

$$\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+zk\pi}{3}+i\sin\frac{n+2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2,).$$

即

$$\sqrt[3]{-8}=\begin{cases}1+i\sqrt{3}, & k=0,\\ -2, & k=1,\\ 1-i\sqrt{3}, & k=2.\end{cases}$$

习 题 1.1

1. 求 $\dfrac{1+z}{1-z}$ 的实部、虚部及模.
2. 用三角式或指数式表示下列复数, 并求它们的辐角.
   (1) $2-2i$;
   (2) $-\sqrt{3}i$;
   (3) $1-\cos\theta+i\sin\theta$ (θ 不是 2π 的整数倍).
3. 设 $\omega^3=1$, 且 $\omega\neq 1$. 求 ω.
4. 计算:(1) $\sqrt[3]{1+i}$; (2) $\sqrt[3]{-i}$; (3) $\sqrt[4]{-1}$.
5. 设 a,b 为实数, $x+iy=\sqrt{a+ib}$. 试用 a,b 表示出 x,y.
6. 证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, 并说明该式的几何意义.
7. 设 $z+z^{-1}=2\cos\theta$, $\theta=\arg z$. 证明 $z^n+z^{-n}=2\cos n\theta$.
8. 设 z_1+z_2 和 $z_1\cdot z_2$ 都是实数, 证明 z_1 和 z_2 或者都是实数, 或者是一对共轭复数.

1.2 复 数 列

1.2.1 复数列的极限

设 $z_1,z_2,\cdots,z_n\cdots$ 是一复数列, z_0 是一给定的复数. 若对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时总有 $|z_n-z_0|<\varepsilon$(即 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$), 则称复数列 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0, 或说 z_0 是复数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0 \ \text{或} \ z_n\to z_0 \ (n\to\infty).$$

设 $r>0$. 我们把点集

$$B(z_0,r)=\{z\in\mathbf{C}:|z-z_0|<r\}$$

叫做以 z_0 为中心、以 r 为半径的圆盘, 或叫做 z_0 的一个 r 邻域. 这样, 复数列 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0 这句话, 可几何地表述为: 对于任意 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时, 点 z_n 全部落入以 z_0 为圆心、以 ε 为半径的圆内, 即 $z_n\in B(z_0,\varepsilon)$.