立体几何类题解法

方昌武　林虹　编

吉林教育出版社

立体几何类题解法　　方昌武　林虹　编

责任编辑：阙家栋　　封面设计：王胜利

出版：吉林教育出版社　787×1092毫米 1/32开本　8.75印张　193,000字

发行：吉林省新华书店　1991年8月第1版　1991年8月第1次印刷

印数：[illegible]—3,[illegible]03册　定价：2.75元

印刷：长春科技印刷厂　ISBN 7-5383-1392-3/G·1230

修订本前言

本书是《中学数学学习与思维丛书》(修订版)中的一种，供高中学生学习和复习立体几何时使用。

随着高中毕业会考制度的实施和高考制度的改革，对高中数学教学的内容和要求均作了适当地调整，为了适应这种变化，我们特对《中学数学学习与思维丛书》作了全面修订，以满足不同层次的高中学生学习和复习数学的需要。

本书具有如下特点：

1. 坚持贯彻“指导学习，激励思维”的编写宗旨. 在总体上，致力于揭示学科结构，展示学科的内容；在具体问题的分析上，力求充分暴露数学思维过程。从而将“学”与“思”两者有机地结合起来。

2. 采用上、下编的编写结构，分别适应会考与高考的要求。

上编严格与课本同步，全编以课题(小节)为基本单元。在课题中分设“知识讲解”、“技能训练”、“方法剖析”、“解题指导”等专栏。其中“知识讲解”着重阐明重要概念、定理产生的背景和根据；分析定理、公式推导的思路，揭示知识间的层次结构和内部联系，以达到帮助学生透彻地理解数学知识的目的。“技能训练”则围绕着重要的技能训练点，设置若干小型题组，总结解决常规问题的具体步骤，提供技能训练题，让学生通过多次、反复的练习，形成熟练的技能，为数学思维的训练扫清障碍并打好基础。“解题指导”与“方法剖

是帮助学生发展数学思维能力的重要辅导材料．它们分别围绕着典型例题或典型方法，着重分析数学思维过程(特别是概略性解决问题的思维层次)，以期达到提高数学思维能力的目的．

通过上编的学习，学生不仅可以达到高中会考对立体几何考查的要求，而且为下编的学习准备了良好的条件．

本书的下编在上编的基础上，系统地展开了对立体几何的解题研究．通过对复杂的问题的分析，系统地介绍立体几何的解题方法和技巧，并概括出解决立体几何问题的一般思路、策略和解题程序，迅速而有成效地提高解决问题与分析问题的能力，以适应高考对立体几何考查的需要，因此可以选作立体几何总复习的材料．

3. 修订本在保持上述特点的基础上，对例题、习题作了大幅度的调整，以适应近年来高考的要求，并及时地反映出时代的气息和高考的变化趋势．

本书由江苏省特级教师张乃达、汤希龙主编．尤善培、吕明、李亦通和水易老师参加了编写和修订工作．

衷心地希望读者提出宝贵意见．

编　者

1991年3月于扬州

目　　录

上　　编

下　　编

上　　篇

第一章　直线和平面

内 容 提 要

本章知识结构用框图表示如下：

- 直线和平面
  - 平面—平面的基本性质
  - 直线和平面的位置关系
    - 空间两条直线
      - 共面
      - 异面—异面直线
    - 空间直线和平面
      - 直线在平面内
      - 直线在平面外
        - 平行
        - 相交
    - 空间两个平面
      - 平行
      - 相交
        - 二面角
        - 垂直

立体几何是在平面几何的基础上，研究空间图形的位置关系及其性质的. 因此，发展空间想象能力，实现空间图形向平面的转化，是解决立体几何问题的关键.

一、平　面

1.1　平面及其基本性质

知 识 讲 解

1. 平面及其公理化的意义

平面和点、直线一样，是不加定义的原始概念．它们本身不再用其它概念来定义，而是定义其它概念的基础．

数学中绝大多数的概念，总是用下定义的方法来约定它的意义的．例如，我们将平行线定义如下：

平面内两条永远不相交的直线称为平行线．这里，“平面”、“直线”就是定义平行线的基础概念．

由此可见，定义实质上是用已知概念来解释新概念的．这样，追根寻源，层层上溯，就会推出一些无法再用其它的概念来表述的原始概念，那么用什么方法来确定原始概念的意义呢？这时，我们就通过认定的一组公理，来揭示原始概念所应具有的性质，从而来约定原始概念的意义——这就是数学中的公理化方法．

平面的基本公理，就是这样的一组公理，它们一方面揭示了平面的基本性质，另一方面，又可以用来约定“平面”的意义．不论是什么对象，只要它不满足公理中对“平面”提出的任一项要求，就不能称为“平面”；反之，若有某种对象，能满足公理中对“平面”提出的全部要求，就可以看成是平面．

课本上列举了平面性质的三条公理及三个推论，它们都是对平面基本性质的约定，分别描述了平面的“平”、“无限”、“连续”. 它们和平面几何中给出的有关“直线”的公理，成为推出立体几何知识的基础.

同步练习

1. 判断下列语句是否正确，为什么？

(1) 一个平面的面积是 $25cm^2$；

(2) 10 个平面重叠在一起比 5 个平面重叠在一起要厚；

(3) 篮球的表面是平面；

(4) 在空间的平面 $ABCD$，是指平行四边形 $ABCD$ 的四条边围起来的部分；

(5) 如图 1-1 的纸片表面，是不是平面的一部分？

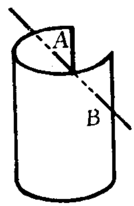

图 1-1

技 能 训 练

2. 平面的画法与表示

通常画一个平行四边形来表示平面，如图 1-2 表示水平放置的平面，图 1-3 表示竖直放置的平面.

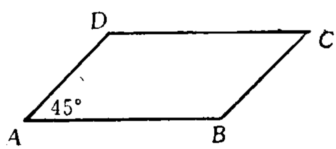

图 1-2

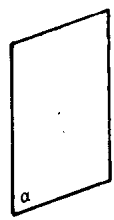

图 1-3

画两个或三个相交平面时，应注意：

①两个平面相交要画出交线；

②为了增强立体感，把被遮住的线画成虚线或不画出.

画相交平面的步骤如图 1-4、图 1-5 所示.

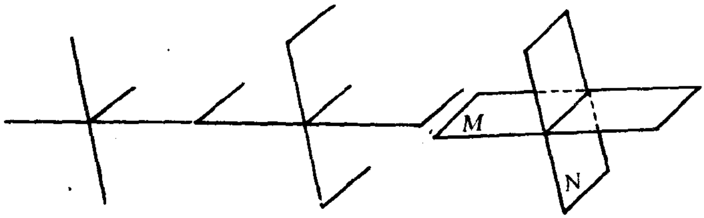

图 1-4

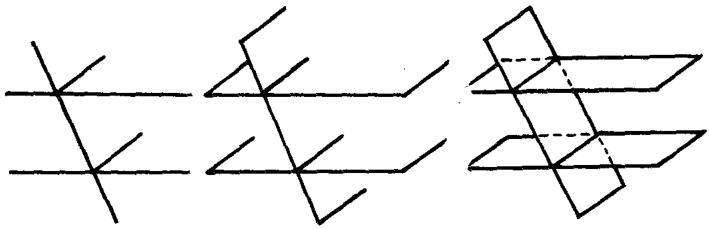

图 1-5

为了方便，也可以用三角形、圆等平面图形来表示平面. 如图 1-6 所示，三棱锥中的底面就是用三角形 ABC 表示的，如图 1-7，圆锥中的底面就是用圆 O 来表示的.

平面通常可用一个或几个字母来表示.

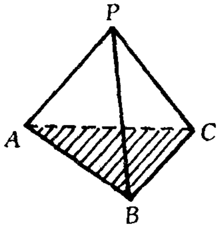

图 1-6

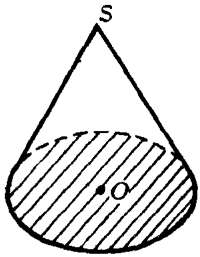

图 1-7

同步练习

2. 把下列各图中被遮挡的部分改成虚线，使图形具有立体感(其中图 1-10，平面 AA_1B_1B 在前面).

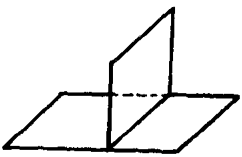

图 1-8

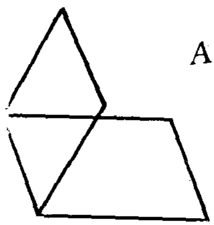

图 1-9

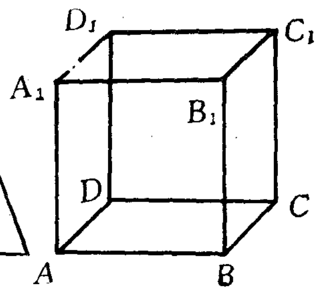

图 1-10

3. 在图形 1-10 中共有几个平面，并分别用两种方法表示出各个平面.
4. 画出三个平面两两相交，且有三条交线的空间图形，并用字母表示出这三个平面.

3. 确定平面的问题

公理 3 及其推论，给出了确定平面的方法. 这是作辅助平面的理论根据.

所谓确定一个平面，包括两层意思：

(1) 存在一个平面；(2) 只有一个平面.

我们经常遇到下面的这些问题：

(1) 不共面的四点可以确定几个平面；

(2) 三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面.

在这类问题中“所确定的平面”个数，是指给出的几何图形所构成的集合及其子集所能确定的平面数的总和.

如空间的四点 $M=\{A, B, C, D\}$，所确定的平面是指 M 及其子集所确定的平面. 当 A、B、C、D 不共面时，经过四点的平面是不存在的. 但是 (A, B, C)、(B, C, D)、(C, D, A)、(A, B, D) 各可以确定一个平面，所以空间不共面的四点，应可以确定 4 个平面(如图 1-6)，这样的四点构成的几何图形，我们称为四面体.

过四点(其中无任何三点共线)能确定几个平面？

解决这个问题需要讨论：

(1) 当四点共面时，这四个点确定一个平面；

(2) 当四点不共面时，这四点共确定四个平面，它们构成一个四面体.

在立体几何中，常常因点、直线、平面的位置关系不同，而要通过讨论来解决问题.

同步练习

5. 三条直线相交于一点，能确定几个平面？最多能确定几个平面；三条直线相交于两点，能确定几个平面？最多能确定几个平面；三条直线相交于三点能确定几个平面？

4. **点、直线、平面间关系的符号语言**

(1) 点 A 在直线 a 上，记作 $A\in a$；点 A 在直线 a 外，记作 $A\notin a$.

(2) 点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 A 在平面 α 外，记作 $A\notin\alpha$.

(3) 直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$；直线 a 在平面 α 外，记作 $a\not\subset\alpha$.

(4) 直线 a 与 b 交于 C，记作 $a\cap b=C$.

(5) 直线 a 与平面 α 交于 A，记作 $a\cap\alpha=A$.

(6) 平面 α 与平面 β 的交线为 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$.

同步练习

6. 如图 1-11，分别用文字语言和符号语言描述下列关系：

(1) P 与平面 α：__________；

(2) P 与直线 a：__________；

(3) 直线 a 与平面 α：__________.

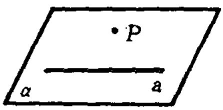

图 1-11

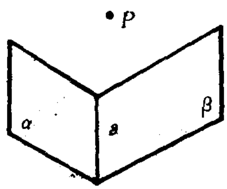

图 1-12

7. 如图 1-12，分别用文字语言和符号语言描述下列关系：

(1) 平面 α 与 β：__________；

(2) 点 P 与平面 α：__________.

8. 如图 1-13，在空格内分别填上集合符号 $\in$、$\notin$、$\subset$、$\cap$.

A ____ a，A ____ α，B ____ a，B ____ α，a ____ α，a ____ $\alpha=$ ____，b

____ α, B ____ b.

9. 根据下列语句画出图形：

(1) 直线 l 经过平面 α 内一点 P 和平面 α 外一点 Q；

(2) 平面 $\alpha\cap\beta=a$，直线 $l\cap\alpha=A$，$l\cap\beta=B$.

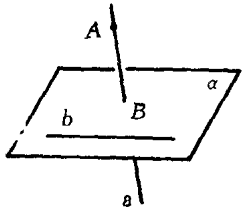

图 1-13

方 法 剖 析

5. 证诸线或诸点共面

例 1 过直线 l 外一点 P 引三条直线 PA、PB、PC 和直线 l 分别交于 A、B、C，求证：四条直线 PA、PB、PC 和 l 共面.

思路 根据条件先确定一个平面 $\longrightarrow$ 再证其它直线在这个平面内.

证明 如图 1-14，$\because$ $P\notin l$，

$\therefore$ 过 P 和 l 确定一个平面 α.

$\because$ $PA\cap l=A$，$A\in PA$，$P\in PA$，

$\therefore$ $A\in\alpha$，$P\in\alpha$，$PA\subset\alpha$.

同理，$PB\subset\alpha$，$PC\subset\alpha$.

$\therefore$ 直线 PA、PB、PC 及 l 共面.

注意 平面的基本性质公理及其推论是证明诸线共面的主要依据. 如果先过 PA 及 l 确定平面 α，再证 PB、PC 在 α 内，应该怎样证呢？

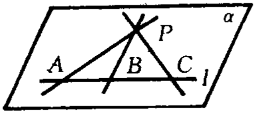

图 1-14

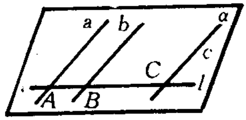

图 1-15

例 2 直线 $a/\!/b/\!/c$，直线 l 分别交 a、b、c 于 A、B、C，求证：四条直线 a、b、c 及 l 共面.

思路	过 a、b 确定平面 α ; 过 b、c 确定平面 β $\longrightarrow$ α、β 重合.

证明 如图 1-15，$\because$ $a/\!/b$，

$\therefore$ 过 a、b 确定一个平面 α.

$\because$ $a\cap l=A$，$b\cap l=B$，　$\therefore$ $A\in a$，$B\in b$.

$\because$ $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，　$\therefore$ $A\in\alpha$，$B\in\alpha$.

$\because$ $A\in l$，$B\in l$，　$\therefore$ $l\subset\alpha$.

即 a、b、l 共面于 α.

$\because$ $b/\!/c$，过 b、c 确定一个平面 β.

同理，b、c、l 共面于 β.

$\because$ 经过相交直线 l 和 b 只能确定一个平面.

$\therefore$ 平面 α 与 β 就是一个平面(即平面重合).

因此，a、b、c 及 l 共面.

说明 本题也可以用反证法证明.

同步练习

10. 证明梯形一定是平面图形.

11. 空间四点如果有三点共线，求证：这四点必共面.

12. 已知$\triangle ABC$在平面α外，它的三边所在直线分别交平面α于P、Q、R，求证：P、Q、R三点共线.

标准化自测题

1. 用符号语言表示下列各题：

(1) 点A在平面α内但不在平面β内：________；

(2) 直线a经过平面α内一点A，且a不在平面α内：________；

(3) 直线a交平面α于点A，平面α交平面β于b，且b不过A：________.

2. 根据下列符号语言画出图形：

(1) $a\cap b=A$，$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$；

(2) $\alpha\cap\beta=l$，$a\cap b=P$，$a\cap\alpha=A$，$b\cap\beta=B$.

3. 选择题

(1) 有四个命题：①过三点确定一个平面；②矩形一定是平面图形；③三条直线两两相交可以确定一个平面；④两个相交平面把空间分为四个区域. 其中错误的命题是(　　).

(A) ①、②；　　(B) ①、③；

(C) ②、④；　　(D) ②、③.

(2) 三条直线两两平行，它们可以确定(　　).

(A) 一个平面；　　(B) 两个平面；

(C) 三个平面；　　(D) 一个或三个平面.

(3) 三角形、四边形、正六边形、圆，其中一定是平面图形的有(　　).

(A) 1个；(B) 2个；(C) 3个；(D) 4个.

1.2 水平放置的平面图形的直观图的画法

技能训练

水平放置的平面图形的直观图的基本画法的步骤如下：

(1) 选取坐标　在已知图形中取互相垂直的轴 ox、oy. 画直观图时，把它画成对应的轴 $o'x'$、$o'y'$，使$\angle x'o'y'=45°$(或 135°).

(2) 画平行线段　已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴或 y'轴的线段.

(3) 截取长度　已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

平面多边形直观图的画法的关键在于确定多边形顶点的位置. 课本(必修)$P6$ 例 2，还可以采用另一种画法.

画法　如图 1-16，

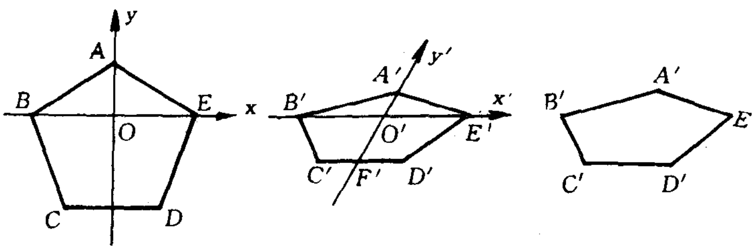

图 1-16

(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ 中，取对角线 BE 所在直线为 x 轴，取对称轴 AF 为 y 轴，画对应的 x'轴、y'轴，使

$\angle x'o'y'=45°$.

(2) 以 O' 为中点在 x' 轴上截取 $B'E'=BE$，在 x' 轴的一侧的 y' 轴上取一点 A'，使 $O'A'=\frac{1}{2}OA$，另一侧的 y' 轴上取一点 F'，则 $O'F'=\frac{1}{2}OF$.

(3) 过 F' 作 $C'D' \parallel O'x'$，且在 $C'D'$ 上取对应点 C'、D' 使 $C'F'=CF$，$F'D'=FD$.

(4) 连结 $A'B'$、$B'C'$、$D'E'$、$E'A'$ 所得的五边形 $A'B'C'D'E'$，就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图.

同步练习

1. 画出下列图形的直观图.

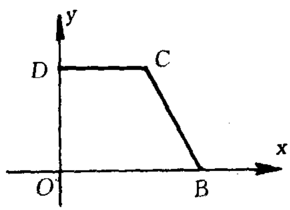

图 1-17

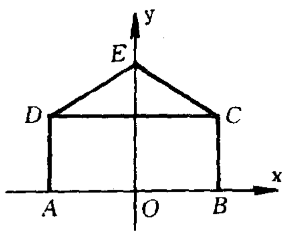

图 1-18

2. 把下列图形还原为一般的平面图形.

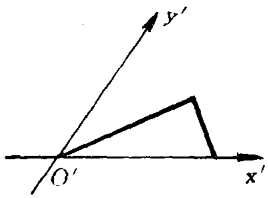

图 1-19

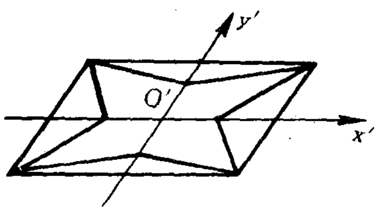

图 1-20