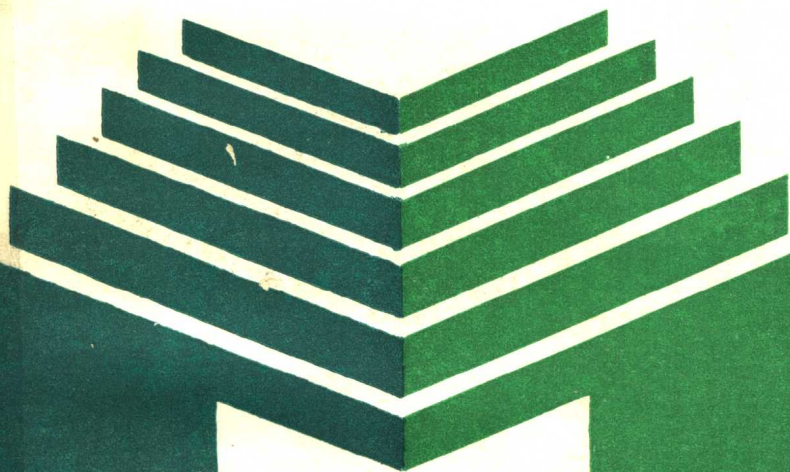


初中数学疑难 解答手册



CHUZHONG SHUXUEYINAN
JIEDASHOUCE

辽宁教育出版社

初中数学疑难解答手册

朱传礼 陈淑卿 马继民
金广成 李长盛 宋殿祯 编

辽宁教育出版社

1988年·沈阳

初中数学疑难解答手册

朱传礼 陈淑卿 马继民 编
金广成 李长盛 宋殿祯

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 朝阳新华印刷厂印刷

字数: 230,000 开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 11
印数: 1—21,531

1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷

责任编辑: 谭 坚 责任校对: 李晓晶
封面设计: 王 力

ISBN 7-5382-0348-6/G·280 定价: 1.75 元

前 言

本书是为了帮助初中学生和具有初中文化程度的青少年学习初中数学而编写的课外辅助性读物。

它是从加强基础知识和培养自学能力出发，紧密结合初中数学课本和当前的教学实际情况，并按初中学生的一般水平，把在教学和学生学习时，经常遇到的一些带有共性的疑难问题进行了解答，如数学概念问题和定理、公式、法则等基础知识问题以及某些易混易错的计算题和论证题等，依现行课本的知识体系分为二编，共编选出 168 个问题。第一编按代数一、二、三、四册，第二编按平面几何一、二册的顺序，把每个疑难问题立一个题目，通过浅释、剖析、解答、计算和论证等形式作简要、明确的分析和揭示。

每篇文章都从实际出发，不拘形式，有长有短，既有某些联系，又能独立成章，编写时，我们力求文字通俗、简炼、生动有趣和富于启发性，以培养和激发读者学习兴趣。

在本书编写过程中，我们参阅和借鉴了有关这方面的文章和资料，得到了很多启发和教益，在此，我们谨表谢意。

参加本书编写的有：朱传礼、陈淑卿、马继民、金广成、李长盛、宋殿祯，最后由朱传礼负责全书统稿审定。

限于水平，缺点和谬误难免出现，尚请读者指正。

编 者

1987年5月

目 录

第一编 代数

一	怎样理解“具有相反意义的量”	1
二	“带有正号的数叫做正数”，“带有负号的数叫做负数”对吗	2
三	如何认识“零既不是正数，也不是负数”	3
四	为什么要学习“数轴”	4
五	相反数的意义与作用	7
六	有关绝对值问题	8
七	非负数的意义及其应用	11
八	“正负术”简介	15
九	为什么“零不能作除数”	16
十	为什么要学习倒数	16
十一	关于近似数和有效数字	18
十二	方程的解与解方程	22
十三	最简方程 $ax=b$ 中，为什么要限定 $a \neq 0$	22
十四	代数式、方程和恒等式	23
十五	应用方程同解原理应注意什么问题	24
十六	解一元一次方程要弄清的几个问题	26
十七	列方程解应用题一般步骤简析	27

十八	列方程的两种基本思考方法	29
十九	怎样列方程解应用题	32
二十	关于不等式	56
二十一	实数的有关基本性质	58
二十二	不等式三条基本性质推证	59
二十三	怎样区别不等式的“解”与“解集”	61
二十四	关于不等式同解原理	62
二十五	怎样选择解二元一次方程组的方法	64
二十六	二元一次方程组的解的讨论	66
二十七	怎样正确理解因式分解定义	67
二十八	初中代数中因式分解的几种主要方法	69
二十九	分解因式的基本思路	75
三十	“检验”是解分式方程的必要步骤吗	76
三十一	为什么“可以运用平方运算求一个 数的平方根”	77
三十二	符号“ $\sqrt{\quad}$ ”的意义是什么	78
三十三	注意零在开方运算中的特殊性	79
三十四	什么叫“完全平方数”	80
三十五	怎样理解算术根的概念	81
三十六	一个数的算术平方根一定比原数小吗	82
三十七	“无理数就是开方开不尽的数”对吗	84
三十八	怎样证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数	85
三十九	从整数到实数	86
四十	为什么“被开方数的值逐渐增大时，平方根 的值也逐渐增大”	87

四十一	实数 a 开 n 次方与 a 的 n 次方根一样吗	88
四十二	实数 a 的 n 次方根与 n 次算术根有什么异同	88
四十三	怎样比较两个实数的大小	89
四十四	形如 $b\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的式子也叫二次根式吗	90
四十五	公式 $(\sqrt{a})^2 = a$ 和 $\sqrt{a^2} = a $ 为什么 后一个公式的右边取绝对值	91
四十六	$\sqrt{ab}$ 与 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 、 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 与 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 有何区别	92
四十七	2×2 为什么会等于 5	93
四十八	怎样求形如 $A \pm \sqrt{B}$ 式子的算术平方根	95
四十九	根式与无理式的异同	96
五十	算术根在解题中的应用	97
五十一	怎样求有理化因式	98
五十二	根式相等的特殊性质	100
五十三	怎样处理根式化简中的字母	101
五十四	二次根式四个公式的证明	103
五十五	关于运算顺序的要求	105
五十六	一元二次方程各种解法的主要特点	106
五十七	配方法及其应用	107
五十八	一元二次方程根的判别式的应用	110
五十九	一元二次方程根与系数的关系及其应用	112
六十	用一元二次方程的根分解二次三项式	114
六十一	无理方程的一些特殊解法	115
六十二	换元法及其在解方程中的应用	118
六十三	一些特殊方程组的解法	119

六十四	为什么“零的零次幂没有意义”	121
六十五	关于负整数指数	121
六十六	根式的基本性质为什么要求 $a \geq 0$ 这个条件	123
六十七	同类根式与同次根式	124
六十八	分数指数与根式	125
六十九	在 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 中, 为什么规定 $a > 0$	126
七十	要正确理解被开方数的指数	127
七十一	乘法公式在有理指数幂运算中的应用	128
七十二	简单指数方程的解法	128
七十三	在对数式中, 对底数、真数的取值有什么限定	130
七十四	什么是对数恒等式, 怎样应用	131
七十五	底的对数、1 的对数的值各是多少, 如何证明	133
七十六	掌握积的对数运算性质的证明思路有什么重要意义	133
七十七	怎样用对数恒等式证明积的对数运算性质	134
七十八	怎样应用对数的运算性质公式	135
七十九	关于常用对数的首数和尾数	137
八十	查反对数表求真数时容易出现的错误	139
八十一	掌握解增长率应用问题的规律	140
八十二	对一道习题的探讨	143
八十三	如何确定函数中自变量的取值范围	144
八十四	两个量成正比例关系和正比例函数之间有什么联系	147

八十五	证明正比例函数 $y=kx$ 的图象是经过 $O(0,0)$, $A(1,k)$ 这两点的一条直线.....	148
八十六	两个量成反比例关系和反比例函数 之间有什么联系.....	150
八十七	关于反比例函数增减性的一种错误说法.....	151
八十八	根据已知条件确定函数的关系式.....	152
八十九	如何作一次函数 $y=kx+b$ 的图象?	154
九十	一次函数 $y=kx+b$ 中, k, b 对图象的影响.....	155
九十一	根据已知条件, 确定一次函数的解析式.....	156
九十二	掌握二次函数解析式的三种形式.....	158
九十三	关于 $ x <a$, $ x >a$ 型的不等式的解集.....	167
九十四	如何解含字母已知数的不等式.....	170
九十五	角度在 0° 与 90° 间变化时, 三角函数 值的增减情况.....	171
九十六	怎样解直角三角形.....	172
九十七	已知一个三角函数值 m , 如何求 角 $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$	175
九十八	用几何方法证明余弦定理.....	176
九十九	用几何方法证明正弦定理.....	178
一〇〇	怎样解斜三角形.....	179
一〇一	要正确理解仰角、俯角、方位角、 象限角的概念.....	184
一〇二	一道测量应用题.....	186
一〇三	正、余弦定理的应用.....	188
一〇四	如何推导海伦——秦九韶公式.....	190

一〇五	怎样理解总体和样本这两个基本概念	191
一〇六	统计的基本思想方法	192
一〇七	平均数、方差是统计中两个重要的特征数字	193
一〇八	怎样作出一个样本的频率分布	196

第二编 平面几何

一	点、线、面的抽象性	200
二	怎样理解“有且只有”	201
三	直线、射线、线段与折线的区别和联系	202
四	角的形成与定义	204
五	“平角与直线”、“周角与射线”、 “周角与平面”的区别是什么	205
六	怎样对角进行分类	206
七	正确理解对顶角的性质	207
八	怎样区别垂直与垂线,垂线段与点到直线的 距离	209
九	怎样找“三线八角”	210
十	命题、定义、公理、定理	212
十一	要注意区别平行线的判定定理与性质定理	214
十二	三角形的分类	215
十三	正确理解三角形中的大边对大角,小边对小角	216
十四	怎样的三条线段可以构成三角形	217
十五	关于三角形全等问题	220
十六	注意二个三角形的对应关系	221
十七	为什么直角三角形全等多一个判定定理	222

• • •

十八	逆命题与逆定理.....	223
十九	怎样证明：有一角是 30° ，且 30° 角的对边是另一边一半的三角形是直角三角形.....	225
二十	试证角平分线与这角对边的中线重合的 三角形是等腰三角形.....	226
二十一	利用轴对称作图举例.....	228
二十二	哪些四边形具有对称性.....	229
二十三	“两角相等”多种证法一例.....	230
二十四	这道题怎么证.....	232
二十五	有两条角平分线相等的三角形是等腰三角形.....	234
二十六	再介绍一种间接证明方法.....	235
二十七	计算与证明.....	237
二十八	根据面积证题一例.....	239
二十九	怎样写已知条件.....	241
三十	诡辩——任何三角形都是等腰三角形.....	243
三十一	关于比例的几个重要概念.....	244
三十二	关于比例与等积式的互化、比例变形.....	247
三十三	怎样运用比例变形来解比例计算题.....	249
三十四	$\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a^2}{b^2}$ 一定相等吗.....	253
三十五	“两条线段的比”和“比例线段”的区别.....	254
三十六	关于黄金分割.....	256
三十七	怎样掌握平行线分线段成比例定理及其推论.....	258
三十八	第四比例项的作图及按定比分割已知线段.....	262
三十九	三角形角平分线性质定理的证明方法.....	264

四 十	证明 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 型问题的一种方法	266
四十一	正确用 “ $\Rightarrow$ ” 的推理格式	271
四十二	莫把两个相似三角形的相似比搞错	275
四十三	三角形相似判定定理的证明	276
四十四	运用比例线段证明两条线段相等	280
四十五	三角形重心定理的证明及应用一例	282
四十六	相似三角形中的对应线段的比	285
四十七	一道习题的几种证法	290
四十八	圆的三种定义及点与圆的位置关系	292
四十九	关于垂径定理	293
五 十	圆周角的两个特征	295
五十一	为什么圆周角定理要分三种情况证明	297
五十二	一个例题的变形	304
五十三	反证法举例	305
五十四	怎样证明四点共圆	312
五十五	怎样判定直线与圆相切	315
五十六	怎样作含有已知角的弓形弧	318
五十七	两条已知线段的比例中项的作法	320
五十八	证明与圆有关的问题怎样引辅助线	322
五十九	计算阴影部分面积十例	326
六 十	基本轨迹的应用举例	332

第一编 代数

一 怎样理解“具有相反意义的量”

在初中代数中，为了定义正数和负数，提出了“相反意义的量”这个概念。“相反意义的量”的内涵有两层意思：一是意义相反；二是表示一定的数量（这里必须说明的是，“具有相反意义的量”它们在数量上，不一定必须完全相同）。例如，向西8米和向东3米；支出100元和收入300元；零下 10°C 和零上 10°C 等，都是两个相反意义的量。明显看出，它们不但在意义上相反，而且还都表示一定的数量。但需要注意的是，向西和向东、支出和收入、零下和零上等，它们都不是两个“具有相反意义的量”。这是因为，向西和向东、支出和收入、零下和零上等，它们都没有表示出数量，而只是一对反义词。因此，学习时一定要注意把反义词和相反意义的量区别开来。

关于“具有相反意义的量”还有几点需要明确的：

1. 一个量的相反意义的量不是只有一个，它可以有无数多个。例如，运出 $3\frac{1}{2}$ 吨的相反意义的量，可以有运进0.16吨、运进 $3\frac{1}{2}$ 吨、运进50吨等等，它们都是运出 $3\frac{1}{2}$ 吨的相

反意义的量，不要把它理解为只有运进 $3\frac{1}{2}$ 吨才是运出 $3\frac{1}{2}$ 吨的相反意义的量。

2. 并不是所有的“量”都具有相反意义。例如，某物体的重量是100克；某人跑百米用时10秒等等，这些量都不具有相反意义。

3. 对于某一“量”的两种相反意义，究竟规定哪一种意义为正，哪一种意义为负，并不是绝对的。正如恩格斯所指出的：“正和负可以看作彼此相等的东西——不管把哪方面当作正，把哪方面当作负，都是一样的”。（《自然辩证法》）

二 “带有正号的数叫做正数”，“带有负号的数叫做负数”对吗

正数和负数都是由于人类在生活和生产劳动中的实际需要而产生和发展的，它们都是数学的基本概念。在代数课本中是通过表示“相反意义的量”的实际问题来描述正数和负数的概念的：如“象 $+5$ 、 $+8\frac{1}{2}$ 、 $+5.2$ 等带有正号的数叫做正数（正号也可省略不写），象 -5 、 $-4\frac{1}{2}$ 、 -3.6 等带有负号的数叫做负数，零既不是正数也不是负数”。因此，学习时能正确理解正数和负数的概念是一个很重要的问题，我们学习正、负数概念时，一定不要忽略了“象 $+5$ 、 $+8\frac{1}{2}$ 、 $+5.2$ 等”，“象 -5 、 $-4\frac{1}{2}$ 、 -3.6 等”这样一些描述性的文字，而仅把它们简单地理解成“带有正号的数叫做正数”，“带有负号的数叫做负数”。这样理解的结果，往往会造成初学代数的学生错误地认为：“在一个数的前面

添上一个正号(+)就是正数;“在一个数的前面添上一个负号(-)就是负数”。这样就会给以后学习“字母表示数”时,带来了严重的障碍。例如,在学习或解题过程中,有些学生常常错误的认为,在 a 的前面是一个“-”号,即 $-a$,一定是个负数,在 a 的前面是一个“+”号,即 $+a$,一定是个正数,其原因就是没有正确地理解正数和负数的概念所致。因此,我们在学习时,务必要弄清楚在一个什么数的前面添上“+”号才是正数,在一个什么数的前面添上“-”号才是负数。并不是随便在一个数的前面添上个“+”号或“-”号就都能成为正数或负数的。如在 -3 前面添上一个“+”号,即 $+(-3)$,仍等于负3;在 -3 前面添上一个“-”号,即 $-(-3)$,就等于正3了。

三 如何认识“零既不是正数,也不是负数”

在小学里对数“零”已有了一定的认识,它是一个很有特性的数,在运算中不容忽视。进入中学后,对数“零”要进一步的认识。在代数课本中“零既不是正数,也不是负数”,是与正、负数概念同时提出来的。我们在日常生活中经常会遇到没有事物的情况。例如,会议室现在还一个人也没有;今天没有体育课等,为了表示“没有”,就用符号“0”来表示。另一方面,“0”作为一个独立的数,它不仅仅可以表示“没有”,而且“0”还具有完全确定的意义。例如,在温度计上,今天的气温是 0°C ,这是表示在标准大气压下,纯水的冰点这样一个完全确定的温度。因此, 0°C 是作为一个计量的结果,而并不是没有温度。

通过温度计或数轴,可以更清楚的了解“0”的特殊地位:(1)“0”不是正数,也不是负数,它是正数和负数

的分界数。(2) 如果习惯上把正号、负号叫做数的性质符号, 从这个意义上来说, “0” 是唯一的中性数。

由于“0”这个数所处的特殊地位, 今后不管是运算还是讨论问题, 遇到“0”时, 一定要认真对待, 否则就会产生很多错误。例如, 认为:

(1) a 是任意一个有理数, 那么 $|a| > 0$;

(2) 任何一个有理数都有倒数;

(3) 如果 m 是任意整数, 那么 $\frac{1}{m}$ 一定有意义;

(4) 如果 a 是任意一个有理数, 那么 $a^2 > 0$;

(5) 如果两个互为相反数相除, 那么商为 -1 ;

(6) 两个互为相反数的绝对值的和, 一定是正数;

(7) 两个互为相反数的积, 一定是负数。

(8) 任何一个实数的零次幂都等于 1, 等等。同学们在后继学习中, 对“0”的认识会更加丰富。

四 为什么要学习“数轴”

数轴是形数结合的基础, 它使“数”和“直线”上的点之间, 建立了对应关系, 就是说, 在引入数轴后, 每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示; 而数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。此外, 数轴还能帮助我们更好地从图形的直观来加深认识有关数的某些问题。例如, 关于具有相反意义的量、相反数、绝对值等概念, 以及有理数和实数大小的比较和运算问题等等, 如果通过数轴来研究就很明显, 更容易理解。

在初中学习数轴, 要理解和研究以下两个问题:

1. 数轴的概念